جامعة خميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية **السنة الأولى** LMD **المجموعات 1، 2، 3** **(2014/13)**

الرياضيات **1** **1سا 30** : **2014-01- 25**

EMD 1

تمرين 1 [10] أ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل: $f(x)=3-\frac{2}{x+1}$

1. أدرس تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$.
2. برهن بأنه إذا كان $x \in [0\ ;\ 1+\sqrt{2}]$ فإن $f(x) \in [0\ ;\ 1+\sqrt{2}]$.

ب) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3-\frac{2}{u_n+1} \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3. ما هي النهايات الممكنة لـ(u_n) ؟
2. مثل بيانيا المنحنيَيْن اللذيْن معادلتيهما $y=f(x)$ و $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، ثم استخدمهما لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2. على الترتيب. (الوحدة 4 سم).
3. أثبت باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$. ماذا تستنتج ؟

جـ) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الأول $v_0 = 3$ والعلاقة $v_{n+1} = 3-\frac{2}{v_n+1}$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$

1. أثبت، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن المتتالية (v_n) متناقصة.
2. بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن $v_n - u_n \leq 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$. واستنتج بأن (u_n) و (v_n) متجاورتان. ما هي $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ ؟

تمرين 2 [10] $f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & , \quad x \geq 1 \\ x\,e^{x-1}+1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

1. عين الصور $f(-2)$، $f(-1)$، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 1$.
3. ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$، واستنتج بأن اقتصار f على $]1,+\infty[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي f^{-1}
4. أنشئ منحنييْ الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).
5. هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\ ,\ 2]$ ؟
6. استخدم التكامل بالتجزئة لحساب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$. لوِّن بقلم الرصاص مساحة الحيز من المستوي التي تمثل قيمة هذا التكامل (المحدد بالمستقيمات: $x=0$ و $y=0$ و $x=2$ ومنحنى $y=f(x)$).

التمرين الأول

أ) 1. **تغيرات** f (1.5)

الدالة $f(x)=3-\frac{2}{x+1}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$: $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$

2. **الاستلزام** $x\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right] \Rightarrow f(x)\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right]$ (1)

بما أن $0\le x\le 1+\sqrt{2}$ و f متزايدة على $[0,+\infty[$، فإن

$$f(0)\le f(x)\le f(1+\sqrt{2})$$

ومنه أيضا $0<1\le f(x)\le 1+\sqrt{2}$ وأخيرا نحصل على : $f(x)\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right]$

ب) 1. **الحدود** u_1 **و** u_2 **و** u_3**، والنهايات الممكنة لـ** (u_n)

- بالحساب نجد: $u_1=2$ ، $u_2=\frac{7}{3}\approx 2.33$ ، $u_3=\frac{12}{5}=2.4$ (1)
- إذا تقاربت المتتالية ذات الحدود الموجبة (u_n) نحو النهاية ℓ، فإن ℓ تحقق: $\ell=3-\frac{2}{\ell+1}$، (1.5)

أي: $\ell^2-2\ell-1=0$. بحساب المميز نستنتج: $\boxed{\ell=1+\sqrt{2}\approx 2.41}$.

2. **التمثيل البياني** موضح في الشكل **1**. (1.5)

3. **أثبات باستخدام البرهان بالتراجع : من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **يكون** $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1+\sqrt{2}\ldots(*)$

بما أن: $u_0=1$ و $u_1=f(u_0)=2$ ، فإن المتراجحات $(*)$ تتحقق من أجل $n=0$.

من أجل $n\ge 0$، نفرض أن $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1+\sqrt{2}$.

بما أن f متزايدة على $[0,+\infty[$، فإن $f(0)\le f(u_n)\le f(u_{n+1})\le f(1+\sqrt{2})$

أي $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 1+\sqrt{2}$ ، ومنه : $1\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 1+\sqrt{2}$

إذن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_n\le u_{n+1}\le 1+\sqrt{2}}$ (0.5)

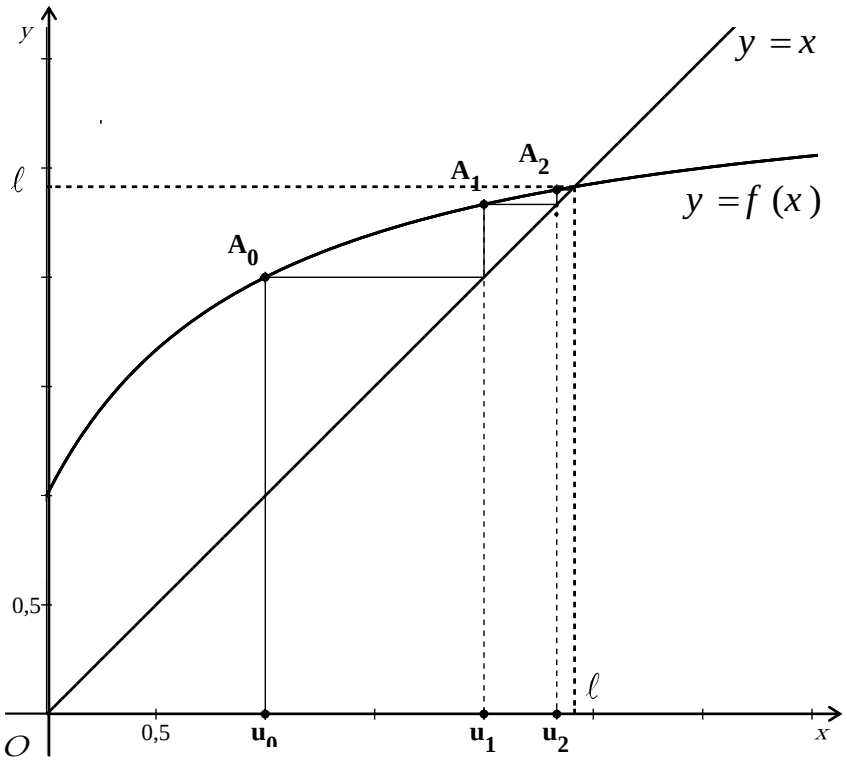
نتيجة: المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $1+\sqrt{2}$ ، فهي إذن متقاربة، وحسب السؤال **ب) 1.** فإن هذه النهاية ما هي إلا $\ell=1+\sqrt{2}\approx 1.41$.

جـ) 1. **نثبت** بالتراجع، **أن** $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}\le v_n\ldots(**)$ (1)

(v_n) ذات حدود موجبة. لدينا $v_0=3$ و $v_1=f(u_0)=2.5$ ، ومنه $(**)$ متحققة من أجل $n=0$.

من أجل $n\ge 0$، نفرض أن $v_{n+1}\le v_n$، بما أن الدالة f متزايدة على $[0,+\infty[$، يكون لدينا أيضا $f(v_{n+1})\le f(v_n)$ ، أي $v_{n+2}\le v_{n+1}$

وحسب مبدأ التراجع نحصل على : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}\le v_n}$



1.5

شكل 1

2. نثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ أن $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

1

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{(u_n + 1)(v_n + 1)}\left(v_n - u_n\right)$

وبما أن الجداء $(u_n + 1)(v_n + 1)$ موجب تماما، فإن إشارة $v_{n+1} - u_{n+1}$ هي من نفس إشارة $v_n - u_n$ ، التي هي من إشارة $v_0 - u_0 = 3 - 1 = 2$ (الموجبة تماما). وكذلك، لكون $1 \le u_n$ و $v_n \le 3$، فإن $1 + u_n \le 2$ و $1 + v_n \le 4$، ينتج من ذلك أن $8 \le (u_n + 1)(v_n + 1)$. وبالتالي $\frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \le \frac{1}{8}$.

وبالتالي يكون $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right)}$ ... (***)

0.5

لنستخدم الآن البرهان بالتراجع لإثبات الخاصية $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_0 - u_0 = 2$ و $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2$ ومنه $v_0 - u_0 \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0$. ومنه المتراجحة متحققة من أجل $n = 0$.

ومن أجل $n \ge 0$، وبفرض $v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، واستخدام العلاقة (***) يكون لدينا :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right) \le \frac{1}{4}\cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

إذن، من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا $0 \le v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبأخذ نهايتي طرفي هذه المتراجحة عندما $n \to +\infty$، نجد $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - v_n) = 0$. وهذا يدل على أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان. ولهما نفس النهاية، أي $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell = 1+\sqrt{2}}$.

التمرين الثاني

1. **حساب الصور** $f(-2)$، $f(-1)$، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$. **1.5**

بالحساب المباشر: $f(-2) = -\frac{2}{e^3}+1 \simeq 0.90$ ، $f(-1) = -\frac{1}{e^2}+1 \simeq 0.86$ ، $f(0) = 1$ ،

$f(1) = 2$ ، $f(1.5) = \sqrt{e}+1 \simeq 2.65$ ، $f(2) = e+1 \simeq 3.72$

2. **دراسة اشتقاق الدالة** f **1.5**

- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , \quad x > 1 \\ (x+1)\,e^{x-1} & , \quad x < 1 \end{cases}$$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0 = 1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\,e^{x-1}+1-2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}+1-2}{x-1} = 1$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0 = 1$.

3. • **تغيرات** f **على** $\mathbb{R}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. ومنحنى f يقبل خط مقارب معادلته $y = 1$. (الشكل **1**).

جدول تغيرات f **1.5**

x	$+\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$2+$	0	$-$	$\|\ 1$	$+$	
$f(x)$	1	↘	$1-e^{-3}$	↗	2	↗	$+\infty$

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x = -2$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0 = 1$ وتغير إشارتها على جانبيها).

• **اقتصار f على $]1,+\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$:** 1.5

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,+\infty[$، وتأخذ قيمها في $]1,+\infty[$ فهي تقابل. دالتها العكسية $f^{-1}(x)$ تكون أيضا مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ في $]1,+\infty[$.

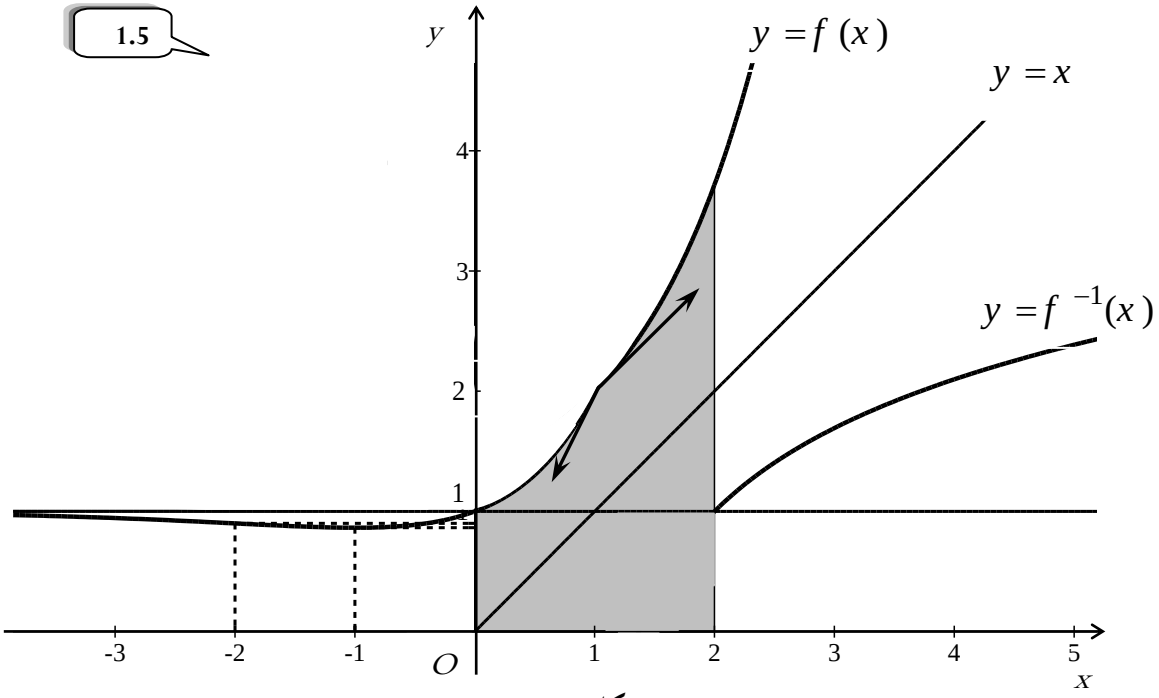
منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y=x$.

• وبوضع : $y=f(x)=e^{x-1}+1,\ x\geq 1$ نحصل على $x=\ln(y-1)+1,\ y\geq 2$

ومنه $\boxed{(x\geq 2)\qquad f^{-1}(x)=\ln(x-1)+1}$

4. **منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ يوضحه (الشكل 2).

1.5



شكل 2

5. **اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\ ,\ 2]$** 1

نلاحظ بأن الدالة f مستمرة على $[0\ ,\ 2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0\ ,\ 2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

6. **استخدام التكامل بالتجزئة لحساب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$** 1.5

لدينا $I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x\,e^{x-1}+1)\,dx+\int_1^2 e^{x-1}\,dx$

نحسب (بالتجزئة) أولا التكامل $J=\int x\,e^{x-1}dx$، ثم نحسب تكون قيمة I بالوحدات المربعة:

إذن $I=\int_0^2 f(x)\,dx=\left[x\,e^{x-1}-e^{x-1}+x\right]_0^1+\left[e^{x-1}\right]_1^2=e+e^{-1}\approx 3.08$