Correction série N° 4

Espace vectoriel - App linéaire

EXO 1

$E = \mathbb{R}^3$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = a,\ a \in \mathbb{R}\}$

si $\boxed{a=0}$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$

(*) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in A$ car $0+0+0=0$

(**) soit $X = (x_1, x_2, x_3) \in A$.

c.a.d $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in A$

c.a.d : $y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$X+Y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$.

$(x_1+y_1) + (x_2+y_2) + (x_3+y_3) =$

$(x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3)$

$0 + 0 = 0$

c.a.d : $X+Y \in A$.

(***) soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $X \in A$.

$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1+x_2+x_3)$

$= \lambda \times 0$

$= 0$

c.a.d : $\lambda X \in A$

donc si $a=0$ alors

A est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

si $a \neq 0$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = a\}$

$0_{\mathbb{R}^3} \notin A$

Car $0+0+0 = 0 \neq a$.

donc si $a \neq 0$

A n'est pas un s.e.v

EXO 2

on montre qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$v = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$

$v = \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,2,3) + \lambda_3 (1,-1,1)$

$(1,-2,r) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3,\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)$

donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 & \text{--- (1)} \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -2 & \text{--- (2)} \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = r & \text{--- (3)} \end{cases}$

(1) - (3) $\Rightarrow -2\lambda_2 = -4$

$\Rightarrow \lambda_2 = +2$

(2) + (1) $\Rightarrow 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow 2\lambda_1 + 3(+2) = -1$

$\Rightarrow 2\lambda_1 = -1 - 6$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -\frac{7}{2}}$

$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

$\boxed{\lambda_3 = \frac{5}{2}}$

$\boxed{v = -\frac{7}{2} V_1 + 2V_2 + \frac{5}{2} V_3}$

Calculer k pourque.

$(1,-2,k) = \lambda_1 u + \lambda_2 w.$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$(1,-2,k) = (3\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_2, 2\lambda_1 - 5\lambda_2)$

$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_2 = -2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 2} \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 = k. \end{cases}$

$3\lambda_1 + 2(2) = 1$

$3\lambda_1 = -3$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$

$2(-1) - 5(2) = k$

$-2 - 10 = k$

$\boxed{k = -12}$

EXO3

soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,-3,2) + \lambda_3(2,-1,5)$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3; 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3; 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 5\lambda_3) = (0,0,0)$

d'où $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad \dots \times 2 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$-\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$

$\boxed{\lambda_2 = 3\lambda_3}$

$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_3 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -5\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$-5\lambda_3 + \lambda_3 = 0$

$-4\lambda_3 = 0$

$\boxed{\lambda_3 = 0}$

et donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$

et $\lambda_2 = 0$

$G = \{v_1, v_2, v_3\}$

est une famille libre.

2) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

$\lambda_1(1,-2,1) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(7,-4,1) = 0$

$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3; -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) =$

$(0,0,0)$

et donc

$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \rightarrow 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \rightarrow 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \rightarrow 3 \end{cases}$

$2 + 3 \Rightarrow -\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = -3\lambda_3$

$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$+5\lambda_1 + 11\lambda_3 = 0$

$\boxed{\lambda_1 = -\frac{11}{5}\lambda_3}$

8

le calcul donne

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

③

$w_2 = (0,0,0)$ est un vecteur nul

en fait le vecteur nul est lineairement dependant avec tout vecteur

EXO4

$E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = f(x) \}$

$A = \{ f_0, f_1, f_2 \}$

$f_0(x) = 1, \; f_1(x) = \cos x, \; f_2(x) = \cos^2 x$

on montre que A est une famille libre.

on montre, que

$\lambda_1 f_0(x) + \lambda_2 f_1(x) + \lambda_3 f_2(x) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \cos^2 x = 0, \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (x = 0) \to ①$

$\lambda_1 + \lambda_2 \times 0 + \lambda_3 (0) = 0 \quad (x = \frac{\pi}{2}) \to ②$

$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (x = \pi) \to ③$

$② \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

$\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3$

$\lambda_3 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3$

donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

EXO5

on montre que

$v_1(1,1,1), \; v_2(1,2,3), \; v_3(2,-1,1)$ engendre $\mathbb{R}^3$

C.A.D, $\forall w \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

tq $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

Soit $w(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$(x,y,z) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,3) + \lambda_3(2,-1,1)$

$(x,y,z) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 ; \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 ; \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

$\lambda_1 = y - 2\lambda_2 + \lambda_3$

$\lambda_1 = z - 3\lambda_2 - \lambda_3$

$y - 2\lambda_2 + \lambda_3 = z - 3\lambda_2 - \lambda_3$.

$-2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = z - y$

$\boxed{\lambda_2 + 2\lambda_3 = z - y}$

$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x$

$\lambda_1 + z - y = x$

$\boxed{\lambda_1 = x - z + y} \to ①$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = y$.
$\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = z$

$2\lambda_1 + 5\lambda_2 = y + z$

$5\lambda_2 = y + z - 2(x + y + z)$

$5\lambda_2 = y + z - 2x - 2y + 2z$

$5\lambda_2 = -2x - y + 3z$

$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{5}(-2x - y + 3z)} \longrightarrow 2$

$\lambda_3 = z - \lambda_1 - 3\lambda_2$

$= z - (x - z + y) - 3\left(\frac{-2x - y + 3z}{5}\right)$

$= \frac{\cancel{5z} - 5x + \cancel{5z} - 5y + 6x + 3y - \cancel{9z}}{5}$

$\boxed{\lambda_3 = \frac{z - 2y + x}{5}} \longrightarrow 3.$

$\lambda_3 = \frac{1}{5}(+x + 2y + z)$

pour que les vecteurs V_1, V_2, V_3 constituent une base de $\mathbb{R}^3$

il faut que :

① il forment une partie libre
② il engendre $\mathbb{R}^3$.

Donc, il faut voir si les vecteurs V_1, V_2, V_3 forment une partie libre (linéairement indépendant)

EXO6 :

$E \subset \mathbb{R}^3$

E engendré par w_1, w_2, w_3.

C.A.D, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq

$\forall w \in E$, $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$.

Comme on peut le remarquer

$w_3 = w_2 - w_1$

donc $w_3 - w_2 + w_1 = 0$

w_1, w_2, w_3 sont linéairement dépendant donc ils ne peuvent pas formés une base.

ona $\forall w \in E$:

$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$

$= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 (w_2 - w_1)$

$= (\lambda_1 - \lambda_3) w_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) w_2$

donc $\boxed{w_1, w_2 \text{ engendre } E}$

de plus soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$

$\lambda_1 (2,1,3) + \lambda_2 (1,2,0) = (0,0,0)$

$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0.}$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$

$3\lambda_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

donc w_1 et w_2 sont linéairement indépendant

$\{w_1, w_2\}$ est une base de E

$\dim E = 2$.

Exo 7 :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+y, y+z)$

on dit que f est linéaire si

① $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3 : f(X+Y) = f(X) + f(Y)$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^3 : f(\lambda X) = \lambda f(X)$

en effet

soit $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$f(X+Y) = f(\overbrace{x_1+y_1}^{a}, \overbrace{x_2+y_2}^{b}, \overbrace{x_3+y_3}^{c})$

$= (a+b, b+c)$

$\boxed{f(X+Y) = (x_1+y_1+x_2+y_2, x_2+y_2+x_3+y_3)}$

$f(X)+f(Y) = f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$

$= (x_1+x_2, x_2+x_3) + (y_1+y_2, y_2+y_3)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2 ; x_2+x_3+y_2+y_3)$

$= f(X+Y)$

② soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $X \in \mathbb{R}^3$

$f(\lambda X) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2 + \lambda x_3)$

$= \lambda (x_1+x_2, x_2+x_3)$

$= \lambda f(X)$

donc f est linéaire.

$\text{Ker} f = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{X \in \mathbb{R}^3 / (x_1+x_2, x_2+x_3) = (0,0)\}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = -x_2 \\ x_2 + x_3 = 0 \implies x_3 = -x_2. \end{cases}$

$X = (x_1, x_2, x_3)$

$= (-x_2, x_2, -x_2)$

$= x_2(-1, 1, -1)$

$\text{Ker} f = \langle (-1, 1, 1) \rangle$

soit $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\text{Im} f = \{ f(X), X \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ (x_1+x_2, x_2+x_3) / X \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ (x_1+x_2, 0) + (\quad) \}$

$= \{ (x_1+x_2)(1,0) + (x_2+x_3)(0,1) \}$

$= \langle (1,0) ; (0,1) \rangle$

Rmq :

dim Ker f = 1

dim Im f = 2