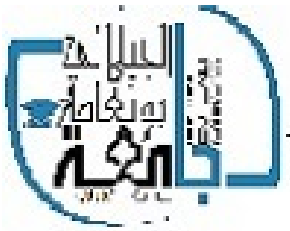
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



جامعة الجيلالي بونعامة
خميس مليانة -الجزائر-
Université Djilali Bounaama
Khemis Miliana -Algerie-

جامعة الجيلالي بونعامة

كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية

السنة اولى جذع مشترك (LMD) (S02&S04)

المقياس : رياضيات1

استاذة المقياس : دكتورة بكدي م

وحدة التعليم : المنهجية

الرصيد : 04

المعامل : 02

السنة الجامعية : 2022/2021

الفصل الاول : مبادئ نظرية المجموعات (théorie des ensembles)

1. الاعداد الحقيقية
2. العناصر التي تحد المجموعات
3. الحواد العليا و الحواد السفلى
4. الاحد الاعلى والحد الادنى
5.

1. الاعداد الحقيقية :

1.1.المجموعة المرتبة في R:

لتكن E مجموعة .

العلاقة $\Re$ على المجوعة E هي المجموعة الجزئية من R بحيث :

$$E \times E : (x, y) \in (E \times E)$$

نقول ان هناك العلاقة بين x, y ونرمز لها : $x\Re y$

نقول عن $\Re$ انها علاقة ترتيبية اذا كانت :

- $\Re$ انعكاسية (réflexive) اي $\forall x \in E \; ; \; x \leq x$
- $\Re$ ضد متناضرة (antisymétrique) اي $\forall x, y \in E \; ; \; (x \leq y \; et \; y \leq x) \rightarrow x = y$
- $\Re$ متعدية (transitive) اي $\forall x, y, z \in E \; ; \; (x \leq y \; et \; y \leq z) \rightarrow x \leq z$

نقول عن E إنها مرتبة كليا اذا كان :

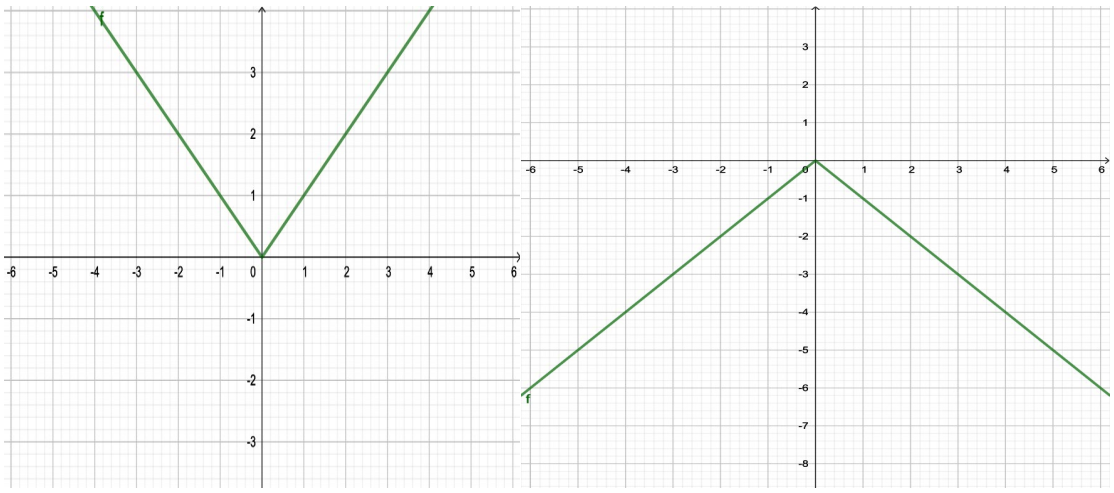
$$\forall x, y \in E \; ; \; (x \leq y \; ou \; y \leq x)$$

1.2.القيمة المطلقة (valeur absolue) :

من اجل كل عدد حقيقي x القيمة المطلق لـx هي :

$$|x| : \begin{cases} x : si \; x \geq 0 \\ -x : si \; x < 0 \end{cases}$$

منحنى دالة القيمة المطلقة $|x|$; $-|x|$:



المصدر :من تاليف الكاتب بالعتماد على Geogebra

بعض الخواص :

$$\begin{cases} \forall x \in R;\ |x| \geq 0 : |-x| = |x| \\ \forall x \in R;\ \sqrt{x^2} = |x| \\ \forall x \in R;\ |x.y| = |x|.|y| \\ \forall x \in R;\ |x+y| \leq |x| + |y| \end{cases}$$

2. عنصر حاد من الأعلى، حاد من الأدنى، الحد الأعلى، الحد الأدنى، القيمة العظمى، القيمة الصغرى.

تعريف :

- ليكن A جزءا من مجموعة مرتبة E $(A \subset E)$ بعلاقة ترتيب نرمز إليها بـ " $\leq$ " .

نقول عن A إنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر α من Eبحيث :

$$\forall x \in A, \quad x \leq \alpha$$

إذا كانت A محدودة من الأعلى وكان العنصر الحاد من الأعلى α ينتمي إلى A $(\alpha \in E)$فإننا نسمي α قيمة عظمى لـ A ، أي أن عنصرا α يمثل القيمة العظمى لـ A إذا حقق :

$$\alpha \in A, \forall x \in A, x \leq \alpha$$

نرمز إلى القيمة العظمى لـ A بـ $max\ A$ نقول إن لـ A حدا أعلى إذا قبلت مجموعة الحواد العليا قيمة صغرى، وتسمى هذه القيمة (عند وجودها) الحد الأعلى لـ A ،ونرمز إليه بـ supA .

ملاحظة :

جميع العناصر التي تكون اكبر من اة تساوي الحد الاعلى تسمى الحواد العليا M_0 (les majorants)

اي الحد الاعلى هو اصغر عناصر الحواد العليا.

$$Sup\ A = \alpha: \begin{cases} \alpha\ est\ un\ majorant\ de\ A \\ \alpha\ est\ le\ plud\ petit\ des\ majorants \end{cases}$$

$$Sup\ A = \alpha: \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall M_0 \in R, (\forall x \in A, x \leq M_0\ ) \Rightarrow \alpha \leq M_0 \end{cases}$$

2.1.الحواد العليا و الحواد الصغري (les majorants, les minorants) :

تعريف :

A مجموعة جزئية من R ليست خالية نقول ان M_0, حواد عليا اذا كانت :

$$A \neq \emptyset;\ \forall x \in A:\ \ x \leq M_0$$

A مجموعة جزئية من R ليست خالية نقول ان m_0, حواد صغرى اذا كانت :

$$A \neq \emptyset;\ \forall x \in A:\ \ m_0 \leq x$$

الحواد الدنيا **المجموعة E** **الحواد العليا**

مثال :

$$A:]-1; 1[$$

الحواد العليا :

$$M_0: [1;\ +\infty[$$

الحواد الدنيا :

$$m_0:]-\infty; -1\ ]$$

2.2.الحد الاعلى الحد لادني (borne supérieure , borne inférieure) :

نضرية :

كل مجموعة جزئية E من R $(E \subset R)$ ليست تشكل مجموعة خالية $E \neq \emptyset$ و محدودة من الاعلى فهي تقبل عنصر حاد من الاعلى $SupE$

حالة خاصة :

هذه النضرية لا يمكن تعميمها على جميع المجموعات فمثلا المجموعة $\mathbb{Q}$ اذا اخذنا مجموعة جزئية من الهذه المجوعة وغير خالية و محدودة من الاعلى وهناك احتمال عدم وجود حد اعلى ومثال على ذلك المجموعة :

$$A: \{x \in \mathbb{Q}: x^2 \leq 2\}$$

نقول عن A إنها محدودة من الأدنى إذا وجد عنصر β من E بحيث :

$$\forall x \in A, \qquad \beta \leq x$$

إذا كانت A محدودة من الأدنى وكان العنصر الحاد من الأدنى β ينتمي إلى A فإننا نسمي β قيمة صغرى لـ A ،أي أن عنصرا β يمثل القيمة الصغرى لـ A إذا حقق :

$$\beta \in \mathrm{A}, \forall x \in A, \qquad \beta \leq \mathrm{x}$$

نرمز إلى القيمة الصغرى لـ A بـ $minA$ نقول إن لـ A حدا أدنى إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا قيمة عظمى، وتسمى هذه القيمة (عند وجودها) الحد الأدنى لـ A ،ونرمز إليه بـ $infA$.

نضرية :

كل مجموعة جزئية E من R $(E \subset R)$ ليست تشكل مجموعة خالية $E \neq \emptyset$ و محدودة من الاسفل فهي تقبل عنصر حاد من لادنى $infE$

ملاحضة :

جميع العناصر التي تكون اصغر من اة تساوي الحد الادنى تسمى الحواد الدنيا (les minorants) m_0 اي الحد الادنى هو اكبر عناصر الحواد الدنيا.

$$inf\ A = \beta: \begin{cases} \beta\ est\ un\ minorant\ de\ A \\ \alpha\ est\ le\ plud\ grand\ des\ minorants \end{cases}$$

$$inf\ A = \alpha: \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \\ \forall m_0 \in R, (\forall x \in A, m_0 \leq\ x) \Rightarrow m_0 \leq \beta \end{cases}$$

ملاحظة :

يمكن ألا يكون الحد الأعلى موجودا وكذلك الحال فيما يخص الحد الأدنى والقيمة العظمى والقيمة الصغرى. لكن عند وجود أي من هذه القيم فستكون وحيدة .الأمر ليس كذلك فيما يخص الحواد العليا والحواد الدنيا .

مستلزمة :

$$si\ max\ (A): \text{موجود} \Rightarrow sup(A): \text{موجود} \Rightarrow max(A) = sup(A)$$

$$si\ min\ (A): \text{موجود} \Rightarrow inf(A): \text{موجود} \Rightarrow min(A) = inf(A)$$

أمثلة :

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ محدودة من الأدنى بـ العدد 0 .

ولدينا $min\mathbb{N} = inf\mathbb{N} = 0$ ،لكنها ليست محدودة من الأعلى.

- مجموعة الأعداد الصحيحة ليست محدودة من الأدنى وليست محدودة من الأعلى.
- إذا اعتبرنا المجال $[1, \mathbf{3}]$ من $\mathbb{R}$ ، فإننا نلاحظ أن :

$$max[-1{,}5] = sup[-1{,}5\ ] = 5\ ;\ \ min[-1{,}5] = inf\ [-1{,}5)] = -1$$

- إذا اعتبرنا المجال $[\ 1{,}5 -\ [$ من $\mathbb{R}$، فإننا نلاحظ أن :

$$\inf]-1\ ,5\ ] = -1\ ;\ \max]-1{,}5] = sup]-1, 5\ ] = 5$$

$min\ ]-1{,}5]$ غير موجود

بعض الخواص :

$$sup(A \cup B) = max[sup(A); sup(B)]$$

$$inf(A \cup B) = min[inf(A); inf(B)]$$

$$sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$$

$$sup(-A) = -inf(A)$$

$$\boldsymbol{sup(A \cap B) = max[sup(A); sup(B)]}$$

$$\boldsymbol{inf(A \cap B) = min[inf(A); inf(B)]}$$

تطبيق :

عين ان امكن : (sup , min , inf , max, les majorants et les minorants)

$$A: :\left\{\frac{1}{n^2} + 1; n \in N^*\right\}$$

الحل :

المجموعة : $\boldsymbol{A: \left\{\frac{1}{n^2} + 1; n \in N^*\right\}}$

لدينا :

$$\begin{cases} n^2 \geq 1 \\ 0 < \dfrac{1}{n^2} \leq 1 \\ 1 < \dfrac{1}{n^2} + 1 \leq 2 \end{cases}$$

اذن :

$$\boldsymbol{A \neq \emptyset\ car\ u_1 = 2}$$

$$sup\ (C) = max(C) = 2$$

$$inf(C) \neq min(C) = 1$$