

مشكلة التخصيص (التعيين).

تعتبر مشكلة التخصيص من إحدى النماذج التي تخص مسألة النقل التي هي إحدى تطبيقات نماذج البرمجة الخطية والتي على أساسها نفترض أن لدينا عددا من المصادر يتطلب تخصيصها إلى نفس العدد من مراكز التوزيع، حيث أن المصادر قد تكون أفراد أو وظائف أو أماكن يتطلب تخصيص مراكز توزيعها والتي قد تكون محطات أو آلات أو مخازن بما يهدف إلى تقليل الوقت أو التكلفة أو تعظيم الإرباح.

يتم نموذج التخصيص مثلا بحالة أن عدد العمال (n) يمكن تعيينهم (تخصيصهم) على عدد من الآلات (m)، والتي تحتاج إلى تكلفة (C_{ij}) حيث: ($i = 1 \dots n$) و ($j = 1 \dots m$).

ويظل الهدف لتخصيص وظائف العمال على الآلات لتحقيق أقل تكلفة إجمالية ممكنة أو تحقيق أكبر ربح ممكن.

أولا: حل مسألة التخصيص في حالة تدنية دالة الهدف.

يرجع حل هذه المسألة إلى حالة خاصة لمشكلة النقل، حيث العمال يعبرون عن العرض والآلات المستقبلية تعبر الطلب، وأن عرض العمال على أي آلة يساوي (1)، هذا يعني أن ($b_i=1$) (العامل لا يقبل العمل إلا في آلة واحدة)، وبالمثل فإن طلب الآلات لكل عامل يساوي (1)، هذا يعني أن ($a_i=1$) (الآلة لا تستقبل إلا عامل واحد فقط)، وبهذا يصبح جدول التكاليف الحادية في مشكلة التخصيص على النحو التالي:

جدول التكاليف الأحادية

العمال \ الآلات	1	2	...	n	b_j
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	1
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	1
...	...	...	...	...	...
m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	1
a_i	1	1	...	1	$m(\leq, \geq) n$

وعليه يمكن صياغة نموذج التخصيص بصفة عامة رياضية على النحو التالي:

$$\begin{cases} \text{إذا كان العامل } i \text{ لم يخصص إلى الآلة } j \\ \text{إذا كان العامل } i \text{ خصص إلى الآلة } j \end{cases}$$

وقبل البدء بحل مسألة التخصيص يجب أن نشير إلى أنه توجد ثلاث حالات لمسائل التخصيص كما يوضحه الجدول

أعلاه (حالة $n = m$) ، حالة $n > m$ ، حالة $n < m$ ،، لذا سنحاول حل بعض الأمثلة حسب كل حالة:

مثال (1) حالة $n = m$: شركة لنقل البضائع تملك 5 شاحنات متواجدة في أماكن مختلفة يمكنها نقل البضائع إلى 5 مدن مختلفة، الجدول التالي يبين تكاليف نقل كل شاحنة متوفرة على كل مدينة من المدن الخمسة المخصصة لاستقبال البضائع:

رقم المدينة رقم الشاحنة	1	2	3	4	5
0001	53	27	33	13	40
0002	35	20	34	28	20
0003	32	17	44	47	36
0004	20	26	24	23	30
0005	120	100	125	113	135

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل للشاحنات على المدن بأقل تكلفة.

- حل مشاكل التخصيص سنعتمد على طريقة تسمى "الطريقة الهنغارية"، وتمر هذه الطريقة بعدة مراحل تتكون من عدة خطوات كما هو موضح في الشرح التالي:
- المرحلة الأولى:

❖ تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

27	0	20	14	40
0	8	14	0	15
19	30	27	0	15
10	3	4	6	0
35	13	25	0	20

❖ تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه من الخطوة الأولى وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

ملاحظة (1): العمود أو الصف الذي يوجد فيه (صفر) أو أكثر نبقى على قيمه كما هو.

27	0	16	14	40
0	8	10	0	15
19	30	23	0	15
10	3	0	6	0
35	13	21	0	20

المرحلة الثانية:

- ❖ نفحص كل صف (يمكن أن نبدأ بتفحص الأعمدة) من الأعلى إلى الأسفل (يمكن أن تكون العملية من الأسفل إلى الأعلى)، إذا وجد فيه (0) واحد فقط وغير مخصص وغير مشطوب، فنقوم بوضعه داخل مربع (تخصيصه)، ثم نقوم بشطب كل الاصفار الموجودة في العمود الذي ينتهي إليه الصفر الموضوع داخل المربع.

ملاحظة (2): الصف الذي فيه أكثر من صفر واحد غير مخصص وغير مشطوب لا تخصص أصفاره في المرحلة الأولى، ونتركهم للمرحلة الموالية.

27	0	16	14	40
0	8	10	8	15
19	30	23	0	15
10	3	0	6	0
35	13	21	8	20

❖ نفحص كل عمود من الجدول المحصل عليه من الخطوة السابقة من اليمين إلى اليسار (يمكن أن تكون العملية من اليسار إلى اليمين)، إذا وجد فيه (0) واحد فقط وغير مخصص وغير مشطوب، فنقوم بوضعه داخل مربع (تخصيصه)، ثم نقوم بشطب كل الاصفار الموجودة في الصف الذي ينتمي إليه الصفر الموضوع داخل المربع.

27	0	16	14	40
0	8	10	8	15
19	30	23	0	15
10	3	8	6	0
35	13	21	8	20

❖ نعيد الخطوتين السابقتين من المرحلة الثانية عدة مرات حتى تكون كل الاصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة

ملاحظة (3): قبل المرور إلى المرحلة الثالثة من الحل يجب أن تكون كل الاصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة.
ملاحظة (4): عندما نطلق في عملية التخصيص من الصفوف والأعمدة التي تحتوي على صفر واحد فقط، وننتهي من هذه العملية، ثم نلاحظ انه مازالت بعض الصفوف أو الأعمدة تحتوي على أكثر من صفر واحد غير مخصصة وغير مشطوبة نطلق في عملية التخصيص من الصفوف والأعمدة ذات الصفرين، فنخصص الصفر الأول ونترك الصفر الآخر كما هو ونشطب كل الاصفار في العمود أو الصف الذي ينتمي إليه الصفر المشطوب، فإذا ما انتهت هذه المرحلة الأخيرة ننقل إلى تلك التي تحتوي على ثلاثة أصفار وهكذا حتى تنتهي عملية التخصيص.
الملاحظة (5): تتطلب عملية التخصيص احترام إجراءات تسلسل عملية التخصيص، هذا يعني إما إجراء كل مراحل عملية التخصيص انطلاقا من الصفوف ثم الأعمدة أو العكس، ومن يمين الجدول إلى يساره أو العكس، وإما كلها من أعلى إلى أسفل الجدول أو العكس.

المرحلة الثالثة:

نفحص الجدول المحصل عليه من المرحلة الثانية:

جدول محاولة التخصيص الأولى

27	0	16	14	40
0	8	10	8	15
19	30	23	0	15
10	3	8	6	0
35	13	21	8	20

❖ إذا كان الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة (الخانات الصفرية التي هي بداخل المربعات) يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، وإذا كان كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، فيمكن القول أنه قد تم تحقق شرط الأمثلية، وأن الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل، وللحصول على التكلفة الإجمالية نقوم بجمع القيم في الجدول الأول (جدول التكلفة الأحادية) والمقابلة للأصفار المخصصة في جدول الحل الأمثل.

❖ إذا كان أي عمود أو (و) صف أو أكثر يحتوي على أكثر من خانة مخصصة فإن هذا الحل يعتبر غير صحيح (خاطئ) ويجب إعادة مراجعته لأنه لا يحقق الشرط الأساسي لمنهج الطريقة الهنغارية في حل مسائل التخصيص وهو ضرورة تساوي عدد المهام المراد تخصيصها مع عدد المنفذين لهذه المهام.

❖ في حالة ما إذا كان عدد الخانات المخصصة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة (حالة مثالنا السابق) نستمر في البحث عن الحل الأمثل وذلك بالانتقال إلى المرحلة الرابعة والخامسة.

المرحلة الرابعة:

❖ نحدد أي صف لا يحتوي على صفر مخصص بوضع علامة (x) على يمينه.

27	0	16	14	40
0	8	10	0	15
19	30	23	0	15
10	3	0	6	0
35	13	21	0	20

x

❖ نحدد أي عمود يحتوي على صفر مشطوب من الصفوف المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) فوقه.

27	0	16	14	40
0	8	10	0	15
19	30	23	0	15
10	3	0	6	0
35	13	21	0	20

x

❖ نحدد أي صف يحتوي على صفر مخصص من الأعمدة المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) على يمينهم.

27	0	16	14	40
0	8	10	0	15
19	30	23	0	15
10	3	0	6	0
35	13	21	0	20

x

- ❖ نحدد أي عمود إن وجد يحتوي على صفر مشطوب من الصفوف المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) فوقه.
- ❖ نحدد أي صف يحتوي على صفر مخصص من الأعمدة المحدد في الخطوة السابقة إن وجد بوضع علامة (x) على يمينهم.
- ❖ وهكذا نستمر في عملية التحديد حتى يصبح آخر صف تم تحديده لا يحتوي على صفر مشطوب (الجدول الأخير من مثالنا).
- ❖ نشطب كل صف غير محدد وبالعكس نشطب كل عمود محدد.

			x		
27	0	16	14	40	
0	8	10	6	15	
19	30	23	0	15	x
10	3	8	6	0	
35	13	21	0	20	x

المرحلة الخامسة:

- ❖ نحدد أقل قيمة من بين القيم المتبقية في الجدول (القيم الموجودة في الصفوف والأعمدة غير المشطوبة).

			x		
27	0	16	14	40	
0	8	10	6	15	
19	30	23	0	15	x
10	3	8	6	0	
35	13	21	0	20	x

- ❖ نطرح هذه القيمة من نفسها ومن القيم الأخرى غير المشطوبة.
- ❖ نضيف هذه القيمة إلى القيم التي تقع عند تقاطع أي خط من خطوط الشطب (مشطوبة مرتين) المشار إليها أعلاه.
- ❖ نبقى القيم المشطوبة مرة واحدة كما هي ونعيد كتابة كل القيم في جدول جديد .

27	0	16	27	40
0	8	10	13	15
6	17	10	0	2
10	3	0	19	0
22	0	8	0	7

❖ بعد ذلك نعيد تطبيق خطوات المرحلة الثانية والثالثة (نجري المحاولة ثانية للتخصيص)، فإذا لم نصل إلى الحل الأمثل نعيد تطبيق خطوات المرحلة الرابعة والخامسة وهكذا حتى نصل إلى الحل الأمثل.
➤ **تخصيص جدول المحاولة الثانية:**

جدول محاولة التخصيص الثانية

27	0	16	27	40
0	8	10	13	15
6	17	10	0	2
10	3	0	19	0
22	0	8	0	7

➤ عدم تحقق شرط الامثلية (نواصل المرحلة الرابعة والخامسة).

	X		X		
27	0	16	27	40	X
0	8	10	13	15	
6	17	10	0	2	X
10	3	0	19	0	
22	0	8	0	7	X

25	0	14	27	38
0	10	10	15	15
4	17	8	0	0
10	5	0	21	0
20	0	6	0	5

➤ **تخصيص جدول المحاولة الثالثة.**

جدول محاولة التخصيص الثالثة

25	0	14	27	38
0	10	10	15	15
4	17	8	0	0
10	5	0	21	0
20	0	6	0	5

➤ نلاحظ أن الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، (5=5)، وأن كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، يمكن القول أنه قد تم تحقق شرط الأمثلية، وأن الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل.

التخصيص:

رقم المدينة	رقم الشاحنة	1	2	3	4	5
0001	53	27	33	13	50	
0002	35	20	34	28	20	
0003	32	17	44	47	36	
0004	20	26	24	23	30	
0005	120	100	125	113	135	

(الشاحنة 0001 مخصص للمدينة 4)(الشاحنة 0002 مخصص للمدينة 5)(الشاحنة 0003 مخصص للمدينة 1)
(الشاحنة 0004 مخصص للمدينة 3)(الشاحنة 0005 مخصص للمدينة 2).

أقل تكلفة ممكنة:

$$13 + 20 + 32 + 24 + 100 = 189.$$

مثال (2) حالة ($m < n$): إحدى الشركات لديها أربع مناطق بيعيه مختلفة وتمتلك هذه الشركة خمسة رجال بيع، وتريد الشركة تعيين رجال البيع على مناطق الأربعة بطريقة مثلى، وبما أن رجال البيع ليس كلهم بنفس الخبرة ولا نفس المهارة ولا نفس اللغة مناطق البيع ومتطلباتها مختلفة تكلفة، قامت الشركة بتقدير التكاليف المصاحبة لتعيين كل رجل من رجال البيع على كل منطقة بيعيه كما في الجدول:

E	D	C	B	A	رجل البيع المناطق
12	11	21	10	24	1
9	8	10	12	14	2
14	19	10	14	17	3
12	13	14	19	11	4

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على مناطق البيع بأقل تكلفة.

من ضمن شروط استعمال الطريقة الهنغارية في حل مسائل التخصيص هو ضرورة تساوي الصفوف والأعمدة في جدول المعطيات وذلك لضرورة تساوي عدد المهام المطلوب تنفيذها مع عدد المنفذين، وفي مثالنا يوجد عدد المنفذين (n) أكبر من عدد المهام المطلوب بتنفيذها (m)، ولمعالجة هذا المشكل وكما رأينا سابقا في مسألة النقل، نضيف عمود وهمي بقيم تخصيص تساوي (0)، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات المشار إليها سابقا.

12	11	21	10	24
9	8	10	12	14
14	19	10	14	17
12	13	14	19	11
0	0	0	0	0

❖ تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

2	1	11	0	14
1	0	2	4	6
4	9	0	7	5
1	2	3	8	0
0	0	0	0	0

❖ تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه من الخطوة الأولى وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

2	1	11	0	14
1	0	2	4	6
4	9	0	7	5
1	2	3	8	0
0	0	0	0	0

➤ تخصيص جدول الأول:

جدول محاولة التخصيص الاولى

2	1	11	0	14
1	0	2	4	6
4	9	0	7	5
1	2	3	8	0
0	0	0	0	0

نلاحظ تحقق شرط الأمثلية دون المرور بالمراحل الباقية (الرابعة والخامسة)، وان الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل.

E	D	C	B	A	رجل البيع المناطق
12	11	21	10	24	1
9	8	10	12	14	2
14	19	10	14	17	3
12	13	14	19	11	4
0	0	0	0	0	5

(البائع A يخصص للمنطقة 4) (البائع B يخصص للمنطقة 1) (البائع C يخصص للمنطقة 3)
(البائع D يخصص للمنطقة 2) (البائع E لا تخصص له منطقة لأنه موجود في الصف الوهمي).

$$10 + 8 + 10 + 11 = 39 \text{ أقل تكلفة ممكنة}$$

مثال (3) حالة ($n < m$): تملك شركة للبناء والأشغال العمومية ثلاث آلات مختلفة للحفر وتسوية الأراضي، تبين لهذه الشركة أربعة مشاريع لبناء السكنات، حيث كلفت هذه الشركة مكتب للدراسات بتقييم تكاليف حفر وتسوية أراضي هذه المشاريع حسب كل آلة تملكها، فجاءت نتائج المكتب في الجدول التالي:

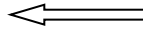
003	002	001	الآلات المشاريع
7	16	9	1
4	5	12	2
9	18	8	3
20	9	11	4

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على مناطق البيع بأقل تكلفة.

بنفس مبدأ حل الحالة السابقة يمكن حل حالة ($n < m$)، حيث من أجل تساوي عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، والذي يمثل شرط استخدام الطريقة الهنغارية، نضيف عمود وهمي بقيم تخصيص تساوي (0)، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات المشار إليها سابقا.

0	7	16	9
0	4	5	12
0	9	18	8
0	20	9	11

0	3	11	1
0	0	0	4
0	5	13	0
0	16	4	3



0	7	16	9
0	4	5	12
0	9	18	8
0	20	9	11

جدول محاولة التخصيص الثانية

X	0	2	10	X	
	1	0	0	4	X
	1	5	13	0	X
	0	15	3	2	X

جدول محاولة التخصيص الاولى

X	0	3	11	1	X
	0	0	0	4	X
	0	5	13	0	X
	0	16	4	3	X

جدول محاولة التخصيص الثالثة

0	0	8	0
3	0	0	6
1	3	11	0
0	13	1	2

بعد محاولة التخصيص الثالثة نلاحظ تحقق شرط الامثلية.

004	003	002	001	الآلات / المشاريع
0	7	16	9	1
0	4	5	12	2
0	9	18	8	3
0	20	9	11	4

(الآلة 001 يخصص للمشروع 3) (الآلة 002 يخصص للمشروع 2) (الآلة 003 يخصص للمشروع 1)
(المشروع 4 لا تأخذه المؤسسة بعين الاعتبار لأنه موجود في العمود الوهمي (مكلف جدا))

$$7 + 5 + 8 = 20 \text{ اقل تكلفة ممكنة:}$$

ثانياً: حل مسألة التخصيص في حالة تعظيم دالة الهدف.

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تدنيت التكاليف، إلا في بداية الحل، حيث يتم بموجب هذا الهدف تحديد أكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها، فنحصل على جدول جديد، ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: في حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة (($m < n$) أو (($m > n$) نقوم كمرحلة أولى بالبحث عن أكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها ونطرح باقي القيم منها، ومن الجدول الجديد المتحصل عليه نقوم بإضافة الصف أو العمود الوهمي حسب الحالة بقيم تخصيص صفرية.

مثال (1) حالة ($n = m$): تريد شركة توظيف أربعة مهندسين على أربعة وظائف مختلفة، فتقدم وبعد تجريبيهم على الوظائف الأربعة لمدة معينة، سجل رئيس مصلحة المستخدمين الأرباح المحقق لكل مهندس على كل وظيفة في الجدول التالي:

المهندسين الوظائف	احمد	محمد	وليد	منير
1	35	37	22	42
2	20	14	17	15
3	15	11	20	10
4	40	30	25	35

المطلوب: تخصيص الأمثل للمهندسين على الوظائف، ليعود على الشركة بأكبر ربح ممكن.

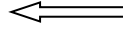
❖ تحديد أكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها.

0	20	5	7
27	25	28	22
32	22	31	27
7	17	12	2

42	22	37	35
15	17	14	20
10	20	11	15
35	25	30	40

❖ نتبع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.

0	20	0	7
5	3	1	0
10	0	4	5
5	15	5	0



جدول محاولة التخصيص الاولى

8	20	<u>0</u>	7
5	3	1	<u>0</u>
10	<u>0</u>	4	5
5	15	5	0

جدول محاولة التخصيص الثانية

<u>0</u>	20	0	8
4	2	<u>0</u>	0
10	<u>0</u>	4	6
4	14	4	<u>0</u>

تحقق شرط الامثلية.

التخصيص

منير	وليد	محمد	احمد	المهندسين الوظائف
42	22	37	35	1
15	17	14	20	2
10	20	11	15	3
35	25	30	40	4

أكبر ربح إجمالي ممكن: $40 + 14 + 20 + 40 = 116$

مثال (2) حالة ($n \neq m$): نشرت شركة إعلان توظيف في أربعة مناصب مختلفة، فتقدم 6 أشخاص لشركة، وبعد تجربتهم على الوظائف الأربعة لمدة معينة، سجل رئيس مصلحة المستخدمين الأرباح المحقق لكل مترشح على كل وظيفة في الجدول التالي:

المهندسين الوظائف	احمد	محمد	وليد	منير	عادل	حاتم
1	35	37	22	40	45	42
2	20	14	17	15	26	30
3	15	11	20	10	18	8
4	40	30	25	35	42	48

المطلوب: اختيار وتخصيص الأمثل للمتشحين على الوظائف الأربعة والذي يعود على الشركة بأكبر ربح ممكن.
❖ تحديد أكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها.

6	3	8	26	11	13
18	22	33	31	34	28
40	30	38	28	37	33
0	6	13	23	18	8

42	45	40	22	37	35
30	26	15	17	14	20
8	18	10	20	11	15
48	42	35	25	30	40

❖ من اجل مساواة عدد الصفوف مع عدد الأعمدة في الجدول، نضيف صفين وهميين بأرباح صفرية.

6	3	8	26	11	13
18	22	33	31	34	28
40	30	38	28	37	33
0	6	13	23	18	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

❖ تتبع نفس الخطوات المشار إليها سابقا وصولاً إلى الحل الأمثل.

3	0	5	23	8	10
0	4	15	13	16	10
12	2	10	0	9	5
0	6	13	23	18	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

3	0	5	23	8	10
0	4	15	13	16	10
12	2	10	0	9	5
0	6	13	23	18	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

7	0	5	23	8	10
0	0	11	9	12	6
16	2	10	0	9	5
0	2	9	19	14	4
4	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0

7	0	1	19	4	6
0	0	7	5	8	2
20	6	10	0	9	5
0	2	5	15	12	0
8	4	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0

➤ تحقق شرط الامثلية.

التخصيص

المهندسين الوظائف	احمد	محمد	وليد	منير	عادل	حاتم
1	35	37	22	40	45	42
2	20	14	17	15	26	30
3	15	11	20	10	18	8
4	40	30	25	35	42	45
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

تخصيص (احمد، وليد، عادل، حاتم) في الوظائف (2,1,3,4) على الترتيب، وعدم توظيف (مُحَمَّد، منير).

أكبر عائد ممكن: $45 + 30 + 20 + 40 = 135$