UNIVERSITE DE DJILALI BOUNAAMA- KHEMIS MILIANA

**Maths II** $1^{ème}$ *Année* 2019 – 2020

**Serie d'exercices n°3**

**Exercice 1**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \cdot B$, $B \cdot A$, ${}^tB \cdot A \cdot B$, $A^{20} \times B^{20}$.

**Exercice 2**

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Calculer $M^2$ et $M^3$, En déduire $M^{-1}$.

**Exercice 3**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2$, $A^3$ et vérifier que $A^3 = 3A^2 - 2A$. En déduire que $A$ n'est pas inversible .

**Exercice 4**

A l'aide des déterminants , calculer le rang des matrices suivantes .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 18 & 7 \\ 18 & 40 & 17 \\ 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5**

Inverser , si possible , les matrices suivantes .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6**

Utiliser la méthode du PIVOT pour étudier l'inversibilité des matrices suivants et éventuellement calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7**

Calculer les déterminants des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8**

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $a$ pour que $B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants:

$$1) \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 6y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -2 \end{cases} ;$$

$$3) \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} ; \quad 4) \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - 3z = -3 \end{cases}$$

**Exercice 10**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -3x - z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - z = -1 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

en utilisant la méthode de CRAMER, lorsque cela sera possible.

**Exercice 11**

On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les vecteurs propres de $M$ et en déduire que $M$ est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.
   Appliquer ce résultat au calcul de $M^3$.