Algèbre linéaire.

Exercices 2018-2019

Niveau 1.

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

1. Etudier si les ensembles proposés sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés.
   Si oui, en donner une base et la dimension.
   - $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\}$, et : $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+z=2.x+y+z=0\}$, dans $\mathbb{R}^3$.
   - $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2.y-z-t = x-y+3.z+2.t=0\}$, dans $\mathbb{R}^4$.
   - $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(2)=0\}$, dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et soit : $(u,v) \in E^2$, tel que : $u \neq 0$.
   a. Montrer que la famille (u,v) est liée si et seulement si : $\exists\ \lambda \in \mathbf{K},\ v=\lambda.u$.
   b. A-t-on l'implication : ((u,v) est liée) $\Rightarrow$ ($\exists\ \mu \in \mathbf{K},\ u=\mu.v$) ?

3. Déterminer dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la dimension de $Vect(\sin,\cos)$.

4. Soit E un **K**-espace vectoriel, et soit $(e_1,...,e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
   Montrer que si : $a \in E$, tel que : $a \notin Vect(e_1,...,e_p)$, alors $(e_1+a,...,e_p+a)$ est libre.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

Dans les 3 exercices suivants, indiquer si les sous-espaces vectoriels proposés sont supplémentaires.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+z=2.x+y+z=0\}$, et : $G = Vect((0,1,-1),(1,1,1))$.

6. Dans E rapporté à une base (e_1,e_2,e_3), on note :
   $u=e_1-e_2+e_3$, $v=2.e_1+2.e_2+e_3$, $w=4.e_1+3.e_3$, $x=-e_1+2.e_2$,
   puis : $F=Vect(u,v,w)$, et : $G=Vect(x)$.

7. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, les sous-espaces vectoriels formés des matrices symétriques et antisymétriques.
   Même question avec les fonctions paires et impaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

8. Dans $\mathbb{R}^4$, soient :
   $E=Vect((0,1,0,2))$, $F=Vect((1,2,-1,0))$, $G=\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2.y-z-t=x-y+3.z+2.t=0\}$.
   A-t-on : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$?

9. Soient : $F = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0)=f'(0)=0\}$, et : $G=\{x \mapsto a.x+b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Applications linéaires.

10. Soit : $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un **K**-espace vectoriel quelconque.
    a. Montrer que : $(u^2=0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u))$.
    b. Si f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}(E)$, montrer de même que: $(fog=0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f))$.

11. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et soit : $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $f^3=0$.
    Montrer que : $rg(f^2) \leq \dfrac{n}{2}$.

12. Soient E un **K**-espace vectoriel et : $f \in \mathscr{L}(E)$, nilpotent (c'est-à-dire tel que : $\exists\ n \in \mathbb{N}^*,\ f^n=0$).
    En s'inspirant de la factorisation de $1-x^n$, montrer que : $g=id_E-f$, est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

13. Pour : $n \geq 2$, on note : $\omega = e^{\frac{2.i.\pi}{n}}$.

Pour tout polynôme P, on pose par ailleurs : $F(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).X^k$.

Montrer que F définit un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

14. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit : $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, tel que :
$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$.
En raisonnant sur les dimensions, montrer que les sommes précédentes sont directes.

15. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et soit : $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, tel que : $f^2 + fog = id_E$.
Montrer que f et g commutent (on pourra commencer par montrer que f est bijective).

16. Soit E l'espace $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On définit φ et ψ sur E, par : $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f'$, et : $\psi(f) = g$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x f(t).dt$.

a. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.

b. Déterminer $\varphi o \psi$ et $\psi o \varphi$.

c. Déterminer image et noyau de φ et de ψ.

17. Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Montrer que pour tout sous-espace vectoriel E' de E, on a : $\dim(u(E')) = \dim(E') - \dim(E' \cap \ker(u))$.

18. Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie.
Soient : $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et : $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

Montrer que : (gof est un isomorphisme) $\Leftrightarrow$ (f est injective, g est surjective, et : $F = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(g)$).

19. Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels et : $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On note : $A_f = \{g \in \mathscr{L}(F,E),\ fogof = 0\}$.

a. Montrer que A_f est un espace vectoriel.

b. Montrer que si f est injective, alors : $A_f = \{g \in \mathscr{L}(F,E),\ \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)\}$.

c. Montrer que si f est surjective, alors : $A_f = \{g \in \mathscr{L}(F,E),\ \mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)\}$.

20. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et : $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $rg(f) = rg(f^2)$.

a. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, et : $\ker(f) = \ker(f^2)$.

b. En déduire que : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

c. Plus généralement, montrer que :

$\forall (f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, $(rg(gof) = rg(g)) \Leftrightarrow (E = \mathrm{Im}(f) + \ker(g))$,

$\forall (f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, $(rg(gof) = rg(f)) \Leftrightarrow (\{0\} = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g))$.

21. Images et noyaux itérés.
Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie : $n \geq 1$.

Pour tout entier naturel p, on note : $I_p = \mathrm{Im}(f^p)$, et : $N_p = \ker(f^p)$, où : $f^p = fofo...of$ (p fois).

a. Montrer que les suites (I_p) et (N_p) sont respectivement décroissantes et croissantes pour l'inclusion.

b. Justifier l'existence d'un entier : $r \in \mathbb{N}$, tel que : $I_{r+1} = I_r$.

c. Vérifier que les deux suites (I_p) et (N_p) sont alors constantes à partir du rang r.

d. Montrer que : $I_r \oplus N_r = E$.

e. Justifier que la plus petite valeur r vérifiant l'égalité de la question b est telle que : $r \leq n$.

Projecteurs.

22. Soient E un ℝ-espace vectoriel et : $f \in \mathscr{L}$(E), tel que : $f^2 - 3.f + 2.id_E = 0$.

a. Montrer que $\ker(f - id_E)$ et $\ker(f - 2.id_E)$ sont supplémentaires dans E.

b. On note p (respectivement q) le projecteur de E sur $\ker(f - id_E)$ (respectivement $\ker(f - 2.id_E)$) dans la direction $\ker(f - 2.id_E)$ (respectivement $\ker(f - id_E)$).
Déterminer $p + q$ et montrer que : $f = p + 2.q$.

c. Calculer f^n pour tout valeur entière n en fonction de p et q.

d. Justifier que f est inversible et exprimer f^{-1} en fonction de p et q.

23. Soient : $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, et : $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, tels que uov soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que : $\mathrm{Im}(uov) = \mathrm{Im}(u)$, puis que : $vou = id_{R^2}$.

24. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.
On note ϕ l'application de $\mathscr{L}$(E) dans $\mathscr{L}$(E) définie par : $\forall\ f \in \mathscr{L}$(E), $\phi(f) = fop + pof$.

a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}$(E).

b. Montrer que : $\forall\ f \in \mathscr{L}$(E), ($\phi(f) = f$) $\Leftrightarrow$ ($f(\ker(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$, et : $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \ker(p)$).

25. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et soit : $f \in \mathscr{L}$(E).
Montrer que : (f est un projecteur) $\Leftrightarrow$ ($rg(f) + rg(f - id_E) = n$).
On pourra faire intervenir $\ker(f)$ et $\ker(f - id_E)$.

Matrices.

26. On note, pour : $0 \le k \le 3$, $P_k = (X+1)^k$, puis : $\mathscr{B}'$ = (P_0, P_1, P_2, P_3).

a. Justifier que $\mathscr{B}'$ est un base de $\mathbb{R}_3$[X].

b. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$, base canonique de $\mathbb{R}_3$[X], à $\mathscr{B}'$ puis celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

27. Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que : $A^2 - 4.A + I_2 = 0$.

b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

c. Montrer alors que : $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, $A^k \in Vect(I_2, A)$ (on distinguera suivant le signe de k).

28. Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(A + I_3)^3$, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

29. On note : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) F de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ contenant J et stable par multiplication.

b. Préciser la dimension et une base de F.

30. On note : $F=\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\}\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $n\geq 2$, et : $U=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en préciser une base et la dimension.
b. Calculer le produit de deux éléments de F à l'aide de U.
c. Calculer : $M(a,b)^p$, pour tout : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et : $p\in\mathbb{N}$.
d. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur (a,b) pour que $M(a,b)$ soit inversible et préciser alors $M(a,b)^{-1}$.

31. Soient : $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, non nulles avec : $n\geq 2$, vérifiant : $A.B.C=0$.
Montrer qu'au moins deux des matrices A,B,C ne sont pas inversibles.

32. a. Déterminer noyau et image de f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Sont-ils supplémentaires ?
f est-il un projecteur ?
c. Que dire du rang de la matrice, ou du rang de f ?
Quels résultats étaient prévisibles ?

33. On note : E = $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de E dans E, qui à X fait correspondre $X.A$.
Montrer que : $u\in\mathcal{L}(E)$, trouver son image, son noyau, et sa matrice représentative dans la base canonique de E.

34. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall\ P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)=P(X+1)$.
a. Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

35. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n, et soit : $f\in\mathcal{L}(E)$, tel que : $E=\mathrm{Im}(f)\oplus\ker(f)$.
Montrer à l'aide par exemple d'une analyse-synthèse, qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$mat_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice par blocs avec : $A'\in Gl_r(\mathbf{K})$, où : $r=rg(f)$.

36. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension 3 et : $u\in\mathcal{L}(E)$, tel que : $u\neq 0$, $u^2=0$.
a. Si u est solution du problème, comparer $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$, et en déduire $rg(u)$.
b. A l'aide d'une analyse-synthèse, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :
$$mat_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

37. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension 3, et soit : $f\in\mathcal{L}(E)$, tel que : $f^3=0$, $f^2\neq 0$.
a. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $mat_{\mathcal{B}}(f)=A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b. Monter que : $\forall\ g\in\mathcal{L}(E)$, $(gof=fog)\Leftrightarrow(g\in Vect(id_E,f,f^2))$.

c. Généraliser pour un espace de dimension n.

38. Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit : $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $\forall\ 1\le i\le n$, $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i,j}|<|a_{i,i}|$.

a. En utilisant : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X\neq 0$, $A.X=0$, et i_0 tel que : $|x_{i_0}|=\max_{1\le i\le n}|x_i|$, aboutir à une contradiction.

b. En déduire que la matrice A est inversible.

Trace.

39. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
a. Pour : $(f,g)\in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$, calculer $tr(fog-gof)$.
b. En déduire que dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'existe pas de couple (f,g) d'endomorphismes tel que : $fog-gof=id_E$.

40. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $tr(A)\neq 0$, et soit ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi(M)=tr(A).M-tr(M).A$.
a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. Déterminer le noyau puis l'image de ϕ.

41. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
On considère l'équation : $X+tr(X).A=B$, d'inconnue : $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
a. Montrer qu'une solution de cette équation est nécessairement de la forme : $X=B+\lambda.A$, où : $\lambda \in \mathbf{K}$.
b. Réciproquement, montrer que :
- si : $tr(A)\neq -1$, cette équation admet une solution unique que l'on précisera.
- si : $tr(A)=-1$, l'équation n'admet pas de solution ou en admet une infinité suivant la valeur de $tr(B)$, et préciser alors ces solutions.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

42. Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un **K**-espace vectoriel E de dimension : $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Montrer que si : $D\not\subset H$, alors D et H sont supplémentaires dans E.
b. La réciproque est-elle vraie ?

43. Soit : $n \in \mathbb{N}^*$, et soit ϕ définie par : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P)=P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(1-\frac{X}{2}\right)-2.P(X)$.

a. Déterminer le degré de $\phi(P)$ en fonction de celui de P, pour : $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

b. En déduire que ϕ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on notera encore ϕ).

c. Déterminer $\ker(\phi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.

d. On considère alors l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ notée θ et définie par : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\theta(P)=\int_0^1 P(t).dt$.
Montrer que θ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que : $\ker(\theta)=\mathrm{Im}(\phi)$.

44. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in$ E, et f une forme linéaire non nulle sur E.
On appelle ϕ l'endomorphisme de E défini par : $\forall\ x \in$ E, $\phi(x)=f(x).u$.
Montrer que : $\det(id_E+\phi)=1+f(u)$.

Calcul de déterminants.

45. Montrer que si α, β, γ sont des réels entre 0 et π, de somme π, alors : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$.

46. Calculer : $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$, où : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis déterminer : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ D = 0\}$.

47. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$, avec : $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}_{(n)}$, avec : $a \in \mathbb{R}$,
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(n)}$.

48. Soient $a_1, ..., a_n$ des nombres complexes.
On définit la matrice A par : $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $a_{i,j} = a_{\max(i,j)}$.
a. Ecrire la matrice A et calculer son déterminant.
b. En déduire les déterminants $\det((\max(i, j))_{1\le i\le n, 1\le j\le n})$, et $\det((\min(i, j))_{1\le i\le n, 1\le j\le n})$.

Déterminants tridiagonaux.

49. Soient : $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $n \ge 2$.
Calculer : $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a.b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a.b \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$, puis : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2.\cos(\alpha) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2.\cos(\alpha) \end{vmatrix}$.
Pour D_n, on distinguera les cas : $a \ne b$, et : $a = b$.

Déterminant de Vandermonde.

50. Pour : $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose : $V_n(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, puis : $P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$.
a. Montrer que : $P_n \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$.
b. Que vaut $V_n(x_1, ..., x_n)$ si deux des x_i sont égaux entre eux ?
c. Dans le cas où les x_i sont distincts 2 à 2, donner une expression factorisée de P_n.
d. En déduire que :
$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$, $V_n(x_1, ..., x_n) = (x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})$ puis la valeur de $V_n(x_1, ..., x_n)$.
e. Retrouver, directement à partir de l'expression de $V_n(x_1, ..., x_n)$ la relation de récurrence précédente.

Déterminants par blocs.

51. Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telles que C et D commutent et D est inversible.

On pose par ailleurs : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, et : $N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

A l'aide d'un produit faisant intervenir la matrice N, montrer que : $\det(M) = \det(A.D - B.C)$.

52. Soit : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, et soit M définie par blocs par : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

En utilisant des combinaisons de lignes ou de colonnes, montrer que : $\det(M) = \det(A + B).\det(A - B)$.

Déterminants et applications linéaires.

53. Soit : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice représentative dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Déterminer $rg(A)$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour que : $(x, y, z, t) \in \mathrm{Im}(u)$.

54. Soit : $F = \{x \mapsto e^x.P(x)$, avec : $P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b. Montrer que la dérivation de fonctions est un endomorphisme de F dont on calculera le déterminant.

55. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

a. Rappeler la dimension de $\mathbb{C}$ dans ce cas, puis une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) de complexes tels que : $\forall\ z \in \mathbb{C},\ f(z) = a.z + b.\bar{z}$.

c. Exprimer $\det(f)$ en fonction de a et de b.

Systèmes linéaires.

56. Résoudre les systèmes :

$$(S_1)\ \begin{cases} m.x + y + z & = & 1 \\ x + m.y + z & = & m \\ x + y + m.z & = & 1 \\ x + y + z & = & m \end{cases}, \qquad (S_2)\ \begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ a.x + b.y + c.z & = & d \\ a.(a-1).x + b.(b-1).y + c.(c-1).z & = & d.(d-1) \end{cases},$$

avec : $m \in \mathbb{R}$, et : $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

57. Peut-on trouver des valeurs de m, pour lesquelles le système (S) admet d'autres solutions que (0,0,0) ?

$$(S)\ \begin{cases} x - (m+1).y - z & = & 0 \\ m.x + 2.y - (3.m + 2).z & = & 0 \\ 2.x - 3.y + 3.z & = & 0 \end{cases}.$$

Calcul de rang de matrice.

58. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, et : $\alpha \in \mathbb{C}$, on note : $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M(\alpha))$, et en déduire $rg(M(\alpha))$, suivant la valeur de α.

<u>Niveau 2.</u>

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

59. Dans : E = $\mathscr{F}$(ℝ,ℝ), on note f_n la fonction définie sur ℝ, pour : $n \in$ ℕ, par : $\forall\ x \in$ ℝ, $f_n(x) = \sin(x+n)$.
Déterminer, pour tout : $n \in$ ℕ, $\dim(F_n)$, où : $F_n = Vect(f_0, f_1, ..., f_n)$.

60. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathscr{F}(\,]-1,+1[\,$,ℝ) engendré par les fonctions définies par :
$\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

61. Montrer que : $Vect(\sin,\cos) \oplus \{ f \in$ E, $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\}$ = C^0([0,π],ℝ).

62. Dans ℝ[X], F = ℝ$_2$[X], et : $G = \{P \in$ ℝ[X], $P(a) = P'(a) = 0\}$, avec : $a \in$ ℝ, sont-ils supplémentaires ?

Applications linéaires, projecteurs.

63. Soit : E = C$^\infty$(ℝ,ℝ), et u qui à f fait correspondre f''.
a. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$.
b. A-t-on : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$?

64. Soient : E = C^0([0,1],ℝ), et T l'application définie par :
$\forall\ f \in$ E, $\forall\ x \in$ [0,1], $T(f)(x) = \int_0^x f(4.(t-t^2)).dt$.
a. Justifier que T est un endomorphisme de E.
b. T est-il injectif ? surjectif ?

65. Soient : $n \in$ ℕ*, et Δ (dérivée discrète), l'application de ℝ$_n$[X] dans ℝ[X] définie par :
$\forall\ P \in$ ℝ$_n$[X], $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
a. Montrer que Δ permet de définir un endomorphisme de ℝ$_n$[X], que l'on notera Δ_n.
b. Montrer que : $\Delta_n^{n+1} = 0$ (c'est-à-dire Δ_n est nilpotent d'ordre $n+1$).
c. En déduire qu'il existe des constantes $a_0, ..., a_{n+1}$ (que l'on déterminera) telles que :
$\forall\ P \in$ ℝ$_n$[X], $\sum_{k=0}^{n+1} a_k.P(X+k) = 0$.
On pourra faire intervenir l'endomorphisme T de ℝ$_n$[X] défini par : $\forall\ P \in$ ℝ$_n$[X], $T(P) = P(X+1)$.

66. Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E.
On suppose que pour tout élément x de E, $(x, f(x))$ est une famille liée.
Montrer que f est une homothétie.
Remarque : en dimension finie, on pourra utiliser une base de l'espace.

67. Soit : E = ℂ^{ℕ}, et soit p, qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par :
$v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$, $\forall\ n \in$ ℕ, $v_{n+2} = v_{n+1} + 6.v_n$.
Montrer que p est un projecteur de E.

68. Soient f, g et h trois endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E, tels que :
$fog = h$, $goh = f$, $hof = g$.
a. Montrer que f, g et h ont même image et même noyau.
b. Montrer que : $f^5 = f$.
c. En déduire que : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

69. Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E tels que : $fog = id_E$.
   a. Montrer que : $\ker(gof) = \ker(f)$, et : $\mathrm{Im}(gof) = \mathrm{Im}(g)$.
   b. Montrer que : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
   c. Dans quel cas peut-on conclure : $g = f^{-1}$?
   d. Calculer $(gof)o(gof)$ et caractériser gof.

70. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et soit : $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
   On veut montrer que : $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.
   a. Montrer que : $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, et en déduire la deuxième inégalité.
   b. Montrer qu'il suffit de démontrer que : $(rg(f) - rg(g)) \leq rg(f+g)$, pour établir la première inégalité, et la déduire de l'inégalité que l'on vient de démontrer.

71. Soient u et v deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
   On pose E' un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E, soit : $E = E' \oplus \ker(u)$.
   a. Montrer que : $\ker(vou) = \ker(u) \oplus \ker(vou_{|E'})$.
   b. On note $(e'_1, ..., e'_k)$, une base de $\ker(vou_{|E'})$.
   Montrer que $(u(e'_1), ..., u(e'_k))$ est libre et en déduire que : $\dim(\ker(vou_{|E'})) \leq \dim(\ker(v))$.
   c. Montrer que : $\dim(\ker(vou)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v))$.

72. Soient E un **K**-espace vectoriel, et : $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, tels que : $gofog = g$, $fogof = f$.
   a. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans E.
   b. Justifier que : $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

73. Soient E un **K**-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
   a. Montrer que : $u^{-1}(u(F)) = F + \ker(u)$.
   b. Exprimer de même $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\mathrm{Im}(u)$.
   c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $u^{-1}(u(F)) = u(u^{-1}(F))$.

74. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques sur ℝ.
   A toute fonction f de E, on associe : $\phi(f) = f - \int_0^1 f(t).dt$.
   Montrer que ϕ est une projection vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Matrices.

75. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et soit f dans $\mathscr{L}(E)$, tel que : $f^2 = 0$.
   a. On suppose E de dimension 4.
   Que peut-on dire de $rg(f)$?
   Montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est 'simple'.
   b. Si E est de dimension n, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $mat(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   matrice définie par blocs, avec : $r = rg(f)$.

76. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
   a. Montrer que : $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$, si et seulement si : $u^2 = 0$, et : $n = 2.rg(u)$.
   b. Montrer que : $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$, si et seulement si il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée inversible de type $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

77. On note : $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où : $n \in \mathbb{N}^*$.

On note par ailleurs u_n, de E_n dans E_{n+1}, tel que : $u_n(P) = Q$, où : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = e^{x^2}.\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}.P(x)\right)$.

Vérifier que ces données sont cohérentes, trouver $\mathrm{Im}(u_n)$, $\ker(u_n)$, et $mat(u_n, \mathscr{B}_n, \mathscr{B}_{n+1})$, où $\mathscr{B}_n$ est la base canonique de E_n.

78. Soit : $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que : $\forall\ Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists\,!\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)$.

Préciser P pour : $n = 3$, $Q = X^3$.

79. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$.

Calculer A^2 puis A^{-1}.

80. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on définit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. A l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à A, calculer A^k, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
b. En déduire M^k, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

Calcul de déterminants.

81. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et A' déduite de A par : $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $a'_{i,j} = (-1)^{i+j}.a_{i,j}$.

Calculer $\det(A')$ en fonction de $\det(A)$.

82. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $a_{i,j} = \pm 1$.

Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

83. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ 1 \le i, j \le n$, $a_{i,j} \ge 0$, et : $\forall\ 1 \le i \le n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \le 1$.

Montrer à l'aide d'une récurrence que : $|\det(A)| \le 1$.

84. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et : $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, tels que : $A.B - B.A = B$.

a. Montrer que : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $A.B^k = B^k.(A + k.I_n)$.
b. En déduire que : $\det(B) = 0$.
c. Que peut-on dire de $tr(B)$?

85. Pour a, b, c dans **K**, on définit les matrices carrées : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, et : $M(a,b) = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$.

a. Montrer que : $x \mapsto \varphi(x) = \det(M(a,b) - x.J)$, est un polynôme en x de degré au plus 1.
En déduire dans le cas où : $a \ne b$, et après avoir calculé $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, la valeur de $\det(M(a,b))$.
b. Montrer que : $x \mapsto \psi(x) = \det(M(a,x))$, est un polynôme en x, et donc une fonction continue de x.
En déduire la valeur de $\det(M(a,a))$, (soit $\det(M(a,b))$ lorsque : $a = b$).

c. Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

86. Soit : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$, pour : $n \geq 1$.

a. En écrivant la dernière colonne sous la forme : $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$, et à l'aide de la n-linéarité, trouver une relation entre D_n et D_{n+1}.

b. En déduire la valeur de D_n à l'aide en particulier de : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminants tridiagonaux.

87. On pose : $A_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$, pour : $n \geq 1$, et : $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\det(A_n(x))$ pour tout entier n suivant la valeur de x.

Déterminant de Vandermonde.

88. Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ des réels, et $f_1,\ldots,f_{n-1}$, des polynômes normalisés de degrés respectifs $1,2,\ldots,n-1$.

a. Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, et en déduire la valeur du déterminant.

b. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\cos(k.x)$ est un polynôme en $\cos(x)$, de degré k et de coefficient dominant égal à 2^{k-1}, et en déduire la valeur de : $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(n.a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(n.a_{n+1}) \end{vmatrix}$, où : $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Déterminants, applications linéaires et matrices.

89. Soit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, telle que : $f(X) = {}^tX$.

a. Calculer $\det(f)$.

b. Pouvait-on prévoir sa valeur ? ou que ce déterminant serait non nul ?

90. Soit A une matrice réelle à diagonale strictement dominante, donc telle que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$.

On rappelle qu'une telle matrice est inversible (voir exercice 38).
On suppose de plus que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $a_{i,i} > 0$.

a. Montrer que $f : x \mapsto \det(A + x.I_n)$, est polynomiale de degré n et préciser son coefficient dominant.

b. Montrer que la matrice $(A + x.I_n)$ est à diagonale strictement dominante pour tout : $x \in \mathbb{R}^+$.

c. Etudier la limite de f en $+\infty$, et en déduire que : $\det(A) > 0$.

91. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que : $\exists\ P \in Gl_n(\mathbb{C}),\ B = P^{-1}.A.P$.
On décompose P en partie réelle et imaginaire : $P = P_1 + i.P_2$, avec : $(P_1, P_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
a. Montrer que : $P_1.B = A.P_1$, et : $P_2.B = A.P_2$.
b. Montrer que l'application : $x \mapsto \det(P_1 + x.P_2)$, est polynomiale en x.
c. En déduire que : $\exists\ a \in \mathbb{R}, \det(P_1 + a.P_2) \neq 0$.
d. Conclure que : $\exists\ Q \in Gl_n(\mathbb{R}),\ B = Q^{-1}.A.Q$.
e. Que vient-on de démontrer ?

Niveau 3.
Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

92. Soient : $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $E^+ = \{ f \in E,\ f$ est nulle sur $\mathbb{R}^-\}$, $E^- = \{ f \in E,\ f$ est nulle sur $\mathbb{R}^+\}$, et E^0 l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
a. Montrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de E.
b. Montrer que : $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$.

93. Soient : $F = \{ f \in C^0([-1,+1],\mathbb{C}),\ \int_{-1}^{+1} f(t).dt = 0 \}$, et : $G = \{ f \in C^0([-1,+1],\mathbb{C}),\ f$ constante$\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$.

94. Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites complexes, les sous-espaces vectoriels :
$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ u_0 = u_1 = 0\}$,
$G = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ u_0 \in \mathbb{C},\ u_1 \in \mathbb{C},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 4.u_n\}$,
sont-ils supplémentaires ?

Applications linéaires, projecteurs.

95. Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension n.
On suppose que f est nilpotent d'indice p, à savoir : $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$.
a. Montrer qu'il existe : $x \in E$, tel que : $(x, f(x),..., f^{p-1}(x))$ libre.
b. En déduire que : $p \leq n$, puis que : $f^n = 0$.

96. On note : $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et D l'application dérivée dans E.
On définit par ailleurs : $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, par : $\forall\ f \in E,\ \varphi(f) = f'' - 3.f' + 2.f$.
a. Exprimer φ en fonction de D.
b. Montrer que : $\ker(\varphi) = \ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E)$.
c. En déduire $\ker(\varphi)$ sans l'aide de la résolution des équations différentielles du second ordre.

97. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie n.
Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
- $\exists\ u \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $\mathrm{Im}(u) = F$, et : $\ker(u) = G$,
- $\dim(F) + \dim(G) = n$.

98. Soient E un **K**-espace vectoriel, E' un sous-espace vectoriel, et F_1, F_2 des supplémentaires de E' dans E.
Soit p la projection de E sur F_1 parallèlement à E'.
Montrer que p définit un isomorphisme de F_2 sur F_1.

99. Soient E_0, E_1, … , E_n, des **K**-espaces vectoriels, et $f_0,\ f_1,..., f_{n+1}$, des applications linéaires, vérifiant :
$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} ... \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n+1}} \{0\},$$
et la propriété de suite exacte, à savoir : $\forall\ 0 \leq k \leq n$, $\mathrm{Im}(f_k) = \ker(f_{k+1})$.

a. Que cela signifie-t-il pour f_1 et f_n ?

b. En supposant tous les espaces de dimension finie, montrer que : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k)=0$.

c. Construire une suite exacte avec $F+G$, $F\cap G$ et $F\times G$, où F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie E et retrouver la formule de Grassmann.

Matrices.

100. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n$(**K**), soit : {$C \in \mathcal{M}_n$(**K**), $\forall\ X \in \mathcal{M}_n$(**K**), $X.C=C.X$ }.
On pourra utiliser une base de $\mathcal{M}_n$(**K**).

101. Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang r.
Montrer qu'on peut trouver deux matrices : $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, et : $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$, telles que : $A=BC$.

102. Montrer par récurrence sur n que toute matrice nilpotente de taille n est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire une matrice triangulaire dont la diagonale est formée de 0).

103. Soit : A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, telle que : $0\le d\le c\le b\le a$.

Pour : $n\ge 2$, on note : $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Montrer que : $\forall\ n\ge 2$, on a : $b_n+c_n\le a_n+d_n$.

Trace.

104. Soit : $H \in \mathcal{M}_n$(**K**), telle que : $rg(H)\le 1$.

a. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}$(**K**), telle que : $H=U.{}^tV$, et : $tr(H)={}^tV.U$.

b. En déduire que : $H^2=tr(H).H$.

c. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Montrer l'équivalence : ($A^2=0$) $\Leftrightarrow$ ($rg(A)\le 1$, et : $tr(A)=0$).

105. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système d'inconnues X et Y suivant :

{$tr(X).Y+tr(Y).X=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, et : $X.Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$}.

106. Soient : $N=\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists\ p \in \mathbb{N},\ M^p=0\}$, et : $T=\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M)=0\}$.
Montrer que : $Vect(N)=T$.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

107. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de F.

a. En utilisant une base de E adaptée à F, montrer que F est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans.

b. Montrer que le nombre minimum d'hyperplans pour obtenir le résultat précédent est $\dim(F)$.

108. a. Si A et B dans $\mathcal{M}_n$(**K**), vérifient : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n$(**K**), $tr(A.X)=tr(B.X)$, montrer que : $A=B$.

b. Soit : $f \in \mathcal{M}_n$(**K**)*.
Montrer que : $\exists$! $F \in \mathcal{M}_n$(**K**), tel que : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n$(**K**), $f(A)=tr(A.F)$.

c. Soit : $f \in \mathcal{M}_n$(**K**)*, telle que : $\forall(A,B) \in \mathcal{M}_n$(**K**)², $f(A.B)=f(B.A)$.
Montrer que : $\exists\ \lambda \in$ **K**, $f=\lambda.tr$.

109. Soient $a_0,...,a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux.

Pour tout k, on pose : $P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(X-a_j)}{(a_k-a_j)}$.

a. Montrer que ($P_0,...,P_n$) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et trouver les coordonnées d'un polynôme quelconque dans cette base.

b. Montrer que : $\forall (b_0,...,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que : $\forall\ 0 \leq i \leq n,\ Q(a_i) = b_i$.

c. Montrer que : $\exists\ (c_0,...,c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t).dt = \sum_{k=0}^{n} c_k.P(a_k)$.

d. Déterminer les éléments $c_0,...,c_n$.

110. Soient E = $\mathbb{R}_2[X]$, et a un réel.

Soient y_0, y_1, y_2 les formes linéaires qui à P de E font correspondre $P(a)$, $P'(a)$, $P''(a)$.

a. Ces formes sont-elles indépendantes ?

b. Généraliser à $\mathbb{R}_n[X]$, et aux formes y_k qui à P font correspondre $P^{(k)}(a)$.

c. Montrer qu'on obtient ainsi une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

111. Dans : E = $\mathbb{R}_3[X]$, avec a,b,c réels deux à deux distincts, on note y_a, y_b, y_c les formes qui à P dans E, font correspondre $P(a), P(b), P(c)$, et y définie par : $y(P) = \int_a^b P(t).dt$.

La famille (y_a, y_b, y_c, y) est-elle libre dans E* ?

112. Soient E un **K**-espace vectoriel, et y^*, z^* des éléments de E* non nuls.

Montrer qu'il existe un vecteur x de E vérifiant : $y^*(x).z^*(x) \neq 0$.

Formes multilinéaires.

113. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n, soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit : $u \in \mathscr{L}$(E).

Pour : $(x_1,...,x_n) \in$ E^n, on pose : $f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},...,x_n)$.

Montrer que f est n-linéaire alternée, puis que : $f = tr(u).\det_{\mathscr{B}}$.

114. a. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $a, x_1,...,x_n$ des vecteurs de E.

Montrer que : $\det_{\mathscr{B}}(a+x_1,a+x_2,...,a+x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_{i-1},a,x_{i+1},...,x_n)$.

b. En déduire : $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$, où $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ sont des scalaires.

Calculs de déterminants.

115. Calculer le déterminant de la matrice : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $a_{i,j} = (i+j-1)^2$.

On pourra faire intervenir une famille de n polynômes de degré 2, notamment pour : $n \geq 3$.

116. On note, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, A la matrice $n \times n$ dont le terme générique $a_{i,j}$ vaut :

$S_k = \sum_{p=1}^{k} p$ où : $k = \min(i,j)$.

Préciser la matrice A et calculer son déterminant.

117. Soit : $(a, x_1, ..., x_n) \in$ **K**$^{n+1}$, et :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+x_n \end{vmatrix},\ E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),$$ où le 1 est sur la i ème ligne et : $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

a. Ecrire D_n à l'aide des colonnes E_i et C.

b. En déduire, à l'aide de la n-linéarité du déterminant, la valeur de D_n.

118. Déterminants de Cauchy et de Hilbert.

Soient : $n \geq 2$, et : $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des réels tels que : $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$.

On pose par ailleurs : $D_n = \det\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

a. En utilisant comme pivot la dernière colonne dans un premier temps, puis la dernière ligne dans un deuxième temps, montrer que : $D_n = \dfrac{(b_1 - b_n)...(b_{n-1} - b_n).(a_1 - a_n)...(a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n)...(a_{n-1} + b_n).(a_n + b_n).(a_n + b_{n-1})...(a_n + b_1)}.D_{n-1}$.

b. En déduire la valeur de D_n pour tout : $n \geq 1$ (déterminant de Cauchy).

c. Dans le cas où : $a_i = i$, $b_j = j$, $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, donner la valeur de D_n (déterminant de Hilbert).

119. Pour : $(p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on note : $\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.

a. Montrer que : $\forall\ (p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x) = (p+1)!.x^p$.

b. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\varphi_p(n+1) = (p+1)!.\sum_{k=1}^{n} k^p$.

c. En déduire la valeur de : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, en calculant 3 déterminants.

120. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

a. Que dire de A si : $n = 1$?

Pour : $n \geq 2$, on note : $r = rg(A)$.

b. Montrer que : $\det(A) = 0$, puis que : $r < n$.

c. Montrer qu'il existe une matrice X de rang $n - r$ telle que : $\det(A + X) \neq 0$.

En déduire que : $r = 0$, puis que A est nulle.