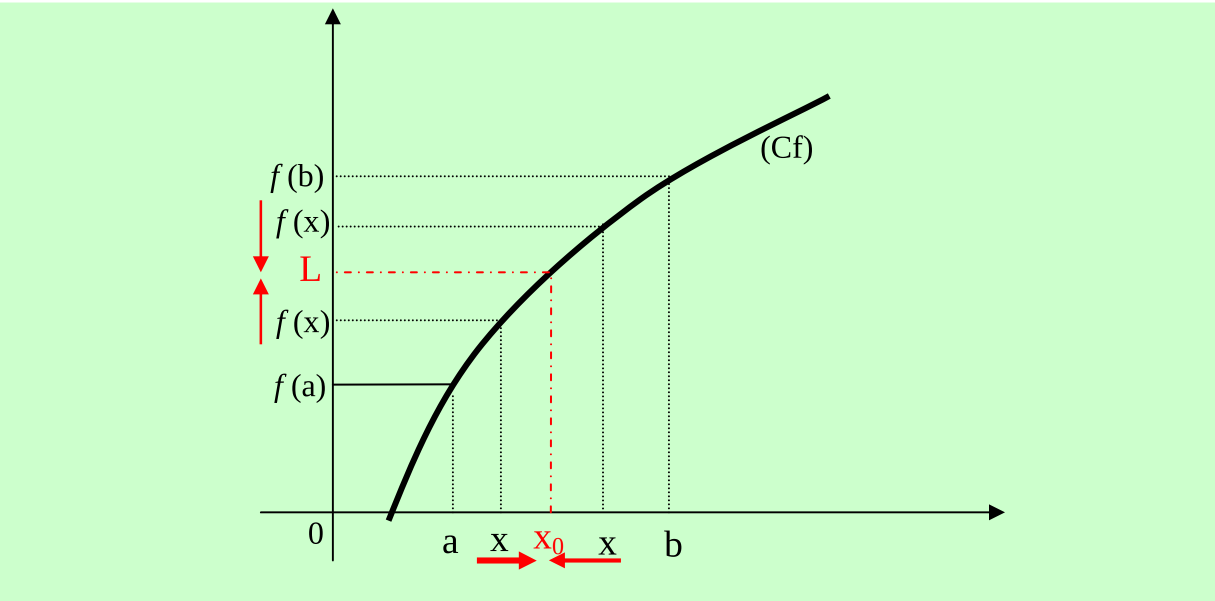
I) Notion de limite:

1°) Activité :

Soit une fonction f de représentation graphique ci-dessous :



Nous pouvons remarquer sur le graphique que les valeurs de $f(x)$ tendent vers **L** lorsque x tend vers $\mathbf{x_0}$ d'un côté comme de l'autre.
On exprime ce fait en disant que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est **L**.
On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

2°) Limite à gauche – limite à droite :

- Définition : Si une fonction admet pour limite ℓ à droite lorsque la variable x tend vers x_0 on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \succ x_0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

ℓ est appelé la limite à droite de f en x_0.

De même Si une fonction admet pour limite ℓ à gauche lorsque la variable x tend vers x_0 on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \prec x_0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

ℓ est appelé la limite à gauche de f en x_0.

Remarque : Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$**.**

3°) Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme : $]-\alpha\,;\,\alpha[$ ou sur $]-\alpha\,;\,x_0[\,\cup\,]x_0\,;\,\alpha[$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) et L un réel.

On dit que la limite de f au point d'abscisse x_0 est L, et on écrit :
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - L] = 0$.

4°) Théorème 1 :

Si une fonction admet pour limite ℓ au point d'abscisse x_0, alors cette limite est unique.

Exemple : *Soit f la fonction définie par :* $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\, ;\, 1] \;,\; f(x) = x^2 \\ \forall x \in [1\, ;\, +\infty[\;,\; f(x) = x + 1 \end{cases}$

f admet-elle une limite lorsque x est arbitrairement voisin de 1 ?

II – Règles de calcul des limites :

1°) Limites élémentaires : Soit a un nombre réel.

- R_1) $\lim\limits_{x \to a} (x) = a$;
- R_2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$;
- R_3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$;
- R_4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$;
- R_5) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right) = 1$;
- R_6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

2°) Théorème 2 :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ existent toutes deux, alors :

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$.

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$;

c) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 \times L_2$;

d) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ *avec* $(L_2 \neq 0)$;

e) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L_1}\quad (\,avec\ \ L_1\succ 0)$.

3°) Formes indéterminées :

Dans la recherche de la limite, si nous obtenons l'une des formes suivantes :

. $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\times\infty$; $(+\infty)+(-\infty)$, aucun théorème mathématique ne nous permet de conclure. On dit qu'on a une forme indéterminée.

a) Exemples de calculs de limites :

– Calculer $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)=\frac{0}{0}\ forme\ \ ind$.

Pour $x\neq 2$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

– $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+4)=5$; – $\lim\limits_{x\to -\infty}(-7x^2)=-\infty$; – $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^3)=+\infty$.

– $\lim\limits_{x\to -\infty}(5x^4)=+\infty$; – $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0$; – $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\ f.ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-cox)}{x^3\times\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}.$$

4°) Utilisation de l'expression conjuguée :

Soit $f(x)=\frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Réponses : a) Df =[–8 ; 1[ ]1 ; + ∞[; b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{6}$.

5°) Limites de fonctions polynomiales :

a) **Théorème 3 :** Quand n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, toute expression polynomiale de la variable réelle x a même limite que son monôme de plus haut degré.

b) **Exemples :** $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-5x+6)=\lim_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty$;

$\lim_{x\to-\infty}(-3x^3+x^2-9)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^3)=+\infty$.

6°) Limites de fonctions Rationnelles :

a) Théorème 4 :

Quand n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, toute expression se présentant sous la forme d'une fraction a même limite que le rapport des termes de plus degré du numérateur et du dénominateur.

b) **Exemples :** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{6x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$;

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5}{x^3-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$;

7°) Limites impliquant des radicaux :

Calculer les limites de fonctions suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$;

c) $\lim_{x\to3} f(x)$ où $\begin{cases} f(x)=x^2-5\ ,\ si\ \ x\leq 3 \\ f(x)=\sqrt{x+13}\ ,\ si\ \ x\succ 3. \end{cases}$

III – Continuité d'une fonction:

1– Continuité en un point d'abscisse x_0 :

a) Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition D_f. On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de D_f si et seulement si $f(x_0)$ est définie et $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

$$\left(\begin{array}{c} f\ \ est\ \ continue\ \ au\ \ point \\ x_0\ \ de\ \ D_f \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \bullet\ f(x_0)\ \ définie \\ \bullet\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \end{array}\right)$$

b) Exemple :

– Soit $f(x)=\dfrac{x-2}{2x}$. La fonction f est-elle continue en $x_0=1$? ; en $x_0=0$?

– Soit f définie par $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
- f est-elle continue en $x_0 = 2$?.

2– Prolongement par continuité en un point :

a) Définition :

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité au point } x_0 \end{array}\right) \text{Si et seulement si} \left(\begin{array}{c} \bullet\ x_0 \notin Df \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l,\ l \text{ réel} \end{array}\right).$$

Son prolongement est la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=f(x),\ si\ x\neq x_0 \\ g(x_0)=l \end{cases}$.

b) Exemples et contre exemple :

– Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$; f est-elle prolongeable par continuité en $x_0=1$? si oui déterminer son prolongement g.

– Soit f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?.

3– Continuité d'une fonction sur un intervalle I = [a ;b] :

Une fonction f est continue sur I = [a ; b] , si elle est continue en tout point de I = [a ; b].

4– Théorème 3:

– Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

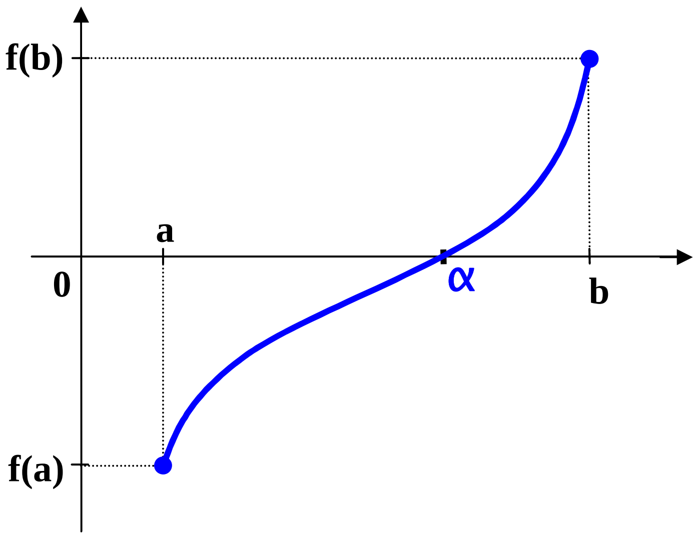
–Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

5– Théorème 4 :

Si f et g sont deux fonctions respectivement continue en x_0 ; alors les fonctions $(f+g)$; $(f-g)$; $(f\times g)$; (λf) $(\lambda \in IR)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ si $g(x)\neq 0$ sont continues en x_0.

6–Théorème de la bijection :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$ alors f réalise une bijection de $I = [a\,;\,b]$ sur $f(I)$ où $f(I)$ est un intervalle.



7- **Représentation graphique d'une bijection réciproque :**

Pour représenter la courbe ($\mathcal{C}_f^{-1}$) de la bijection réciproque de la bijection f ; on trace le symétrique orthogonal de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.