

## Fonctions dérivables

---

### 1 Calculs

#### Exercice 1

Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000699]

#### Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ . Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0; on note encore  $f$  la fonction prolongée. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais que  $f'$  n'est pas continue en 0.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000700]

#### Exercice 3

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \quad ; \quad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \quad ; \quad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \quad ; \quad f_3(1) = 1.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000698]

#### Exercice 4

Soit  $n \geq 2$  un entier fixé et  $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x \geq 0$ .  
 (b) En étudiant le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $f$  atteint un minimum sur  $\mathbb{R}^+$  que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

- (b) Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$  alors on a

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000739]

## 2 Théorème de Rolle et accroissements finis

### Exercice 5

Montrer que le polynôme  $X^n + aX + b$ , ( $a$  et  $b$  réels) admet au plus trois racines réelles.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000717]

### Exercice 6

Montrer que le polynôme  $P_n$  défini par

$$P_n(t) = \left[ (1-t^2)^n \right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré  $n$  dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à  $[-1, 1]$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000715]

### Exercice 7

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle  $[a, b]$  préciser le nombre "c" de  $]a, b[$ . Donner une interprétation géométrique.

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000721]

### Exercice 8

Soient  $x$  et  $y$  réels avec  $0 < x < y$ .

1. Montrer que

$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha) \ln y.$$

De l'étude de  $f$  déduire que pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000724]

## 3 Divers

### Exercice 9

Déterminer les extremums de  $f(x) = x^4 - x^3 + 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000733]

### Exercice 10

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) et dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

1. Montrer que  $g(x) \neq g(a)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .
2. Posons  $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  et considérons la fonction  $h(x) = f(x) - pg(x)$  pour  $x \in [a, b]$ . Montrer que  $h$  vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , où  $\ell$  est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. *Application.* Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000738]

---

### Exercice 11

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en particulier en  $t = 0$ .
2. Etudier l'existence de  $f''(0)$ .
3. On veut montrer que pour  $t < 0$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où  $P_n$  est un polynôme.

(a) Trouver  $P_1$  et  $P_2$ .

(b) Trouver une relation de récurrence entre  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  et  $P'_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000740]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

$f$  est continue en 0 en la prolongeant par  $f(0) = 0$ .  $f$  est alors dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Les problèmes sont seulement en 0 ou 1.  $f_1$  est dérivable en 0 mais pas  $f_2$ .  $f_3$  n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

Il faut appliquer le théorème de Rolle une fois au polynôme  $(1 - t^2)^n$ , puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde,...

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

1. Utiliser le théorème des accroissements finis avec la fonction  $t \mapsto \ln t$
  2. Montrer d'abord que  $f''$  est négative. Se servir du théorème des valeurs intermédiaires pour  $f'$ .
- 

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

1. Reasonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.
  2. Calculer  $h(a)$  et  $h(b)$ .
  3. Appliquer la question 2. sur l'intervalle  $[x, b]$ .
  4. Calculer  $f'$  et  $g'$ .
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ . Le seul problème est en  $x = 1$ .

Il faut d'abord que la fonction soit continue en  $x = 1$ . La limite à gauche est  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = +1$  et à droite  $\lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$ . Donc  $a + b + 1 = 1$ . Autrement dit  $b = -a$ .

Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction  $f$  restreinte à  $]0, 1[$  est définie par  $x \mapsto \sqrt{x}$  alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$  en  $x = 1$ . Donc  $f'_g(1) = \frac{1}{2}$ .

Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement  $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ , lorsque  $x \rightarrow 1$  avec  $x > 1$ . Or

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x - 1} = \frac{ax^2 - ax}{x - 1} = \frac{ax(x - 1)}{x - 1} = ax.$$

Donc  $f$  est dérivable à droite et  $f'_d(1) = a$ . Afin que  $f$  soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est  $a = \frac{1}{2}$ .

Le seul couple  $(a, b)$  que rend  $f$  dérivable sur  $]0, +\infty[$  est  $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

$f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Comme  $|\sin(1/x)| \leq 1$  alors  $f$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ . Donc en prolongeant  $f$  par  $f(0) = 0$ , la fonction  $f$  prolongée est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Le taux d'accroissement est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en  $x = 0$ . Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

3. Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ , Donc  $f'(x)$  n'a pas de limite quand  $x \rightarrow 0$ . Donc  $f'$  n'est pas continue en 0.

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. La fonction  $f_1$  est dérivable en dehors de  $x = 0$ . En effet  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $x \mapsto \cos x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition  $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Puis par multiplication par la fonction dérivable  $x \mapsto x^2$ , la fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme " $f$  est dérivable sur  $I$  comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur  $I$ ".

Pour savoir si  $f_1$  est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$

Mais  $x \cos(1/x)$  tend vers 0 (si  $x \rightarrow 0$ ) car  $|\cos(1/x)| \leq 1$ . Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc  $f_1$  est dérivable en 0 et  $f'_1(0) = 0$ .

2. Encore une fois  $f_2$  est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en  $x = 0$  est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  et que  $\sin 1/x$  n'a pas de limite quand  $x \rightarrow 0$ . Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc  $f_2$  n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction  $f_3$  s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

— Donc pour  $x \geq 1$  on a  $f_3(x) = x$ ; pour  $0 \leq x < 1$  on a  $f_3(x) = -x$ ; pour  $x < 0$  on a  $f_3(x) = x$ .

— La fonction  $f_3$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Attention ! La fonction  $x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0.

- La fonction  $f_3$  n'est pas continue en 1, en effet  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = +1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x) = -1$ . Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
- La fonction  $f_3$  est continue en 0. Le taux d'accroissement pour  $x > 0$  est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour  $x < 0$ ,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc  $f_3$  n'est pas dérivable en 0.

### Correction de l'exercice 4 ▲

- (a) Il est clair que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient pour  $x \geq 0$  :

$$f'(x) = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{n+1}}.$$

- (b) Par l'expression précédente  $f'(x)$  est du signe de  $x^{n-1} - 1$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Par conséquent on obtient :  $f'(x) \leq 0$  pour  $0 \leq x \leq 1$  et  $f'(x) \geq 0$  pour  $x \geq 1$ . Il en résulte que  $f$  est décroissante sur  $[0, 1]$  et croissante sur  $[1, +\infty[$  et par suite  $f$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^+$  au point 1 et ce minimum vaut  $f(1) = 2^{1-n}$ .
- (a) Il résulte de la question 1.b que  $f(x) \geq f(1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  et donc

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

- (b) En appliquant l'inégalité précédente avec  $x = b/a$ , on en déduit immédiatement l'inégalité requise (le cas du couple  $(0, 0)$  étant trivial).

### Correction de l'exercice 5 ▲

- Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour  $P_n(X) = X^n + aX + b$ . Notons les  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre  $x_1$  et  $x_2$ , entre  $x_2$  et  $x_3, \dots$ ) il existe  $x'_1 < x'_2 < x'_3$  des racines de  $P'_n$ . On applique deux fois le théorème Rolle entre  $x'_1$  et  $x'_2$  et entre  $x'_2$  et  $x'_3$ . On obtient deux racines distinctes pour  $P''_n$ . Or  $P''_n = n(n-1)X^{n-2}$  ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.
- Autre méthode* : Le résultat est évident si  $n \leq 3$ . On suppose donc  $n \geq 3$ . Soit  $P_n$  l'application  $X \mapsto X^n + aX + b$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. Alors  $P'_n(X) = nX^{n-1} + a$  s'annule en au plus deux valeurs. Donc  $P_n$  est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc  $P_n$  s'annule au plus trois fois.

### Correction de l'exercice 6 ▲

$Q_n(t) = (1-t^2)^n$  est un polynôme de degré  $2n$ , on le dérive  $n$  fois, on obtient un polynôme de degré  $n$ . Les valeurs  $-1$  et  $+1$  sont des racines d'ordre  $n$  de  $Q_n$ , donc  $Q_n(1) = Q'_n(1) = \dots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$ . Même chose en  $-1$ . Enfin  $Q(-1) = 0 = Q(+1)$  donc d'après le théorème de Rolle il existe  $c \in ]-1, 1[$  telle que  $Q'_n(c) = 0$ . Donc  $Q'_n(-1) = 0, Q'_n(c) = 0, Q'_n(+1) = 0$ . En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur  $[-1, c]$  et sur  $[c, +1]$ ), on obtient l'existence de racines  $d_1, d_2$  pour  $Q''_n$ , qui s'ajoutent aux racines  $-1$  et  $+1$ . On continue ainsi par récurrence. On obtient pour  $Q_n^{(n-1)}$ ,  $n+1$  racines :  $-1, e_1, \dots, e_{n-1}, +1$ . Nous appliquons le théorème de Rolle  $n$  fois. Nous obtenons  $n$  racines pour  $P_n = Q_n^{(n)}$ . Comme un polynôme de degré  $n$  a au plus  $n$  racines, nous avons obtenu toutes les racines. Par constructions ces racines sont réelles distinctes, donc simples.

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc en particulier sur  $[a, b]$ . Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un nombre  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce  $c$ . En effet  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$  implique  $\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a) = (2\alpha c + \beta)(b - a)$ . Donc  $c = \frac{a+b}{2}$ .

Géométriquement, le graphe  $\mathcal{P}$  de  $f$  est une parabole. Si l'on prend deux points  $A = (a, f(a))$  et  $B = (b, f(b))$  appartenant à cette parabole, alors la droite  $(AB)$  est parallèle à la tangente en  $\mathcal{P}$  qui passe en  $M = (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ . L'abscisse de  $M$  étant le milieu des abscisses de  $A$  et  $B$ .

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit  $g(t) = \ln t$ . Appliquons le théorème des accroissements finis sur  $[x, y]$ . Il existe  $c \in ]x, y[$ ,  $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$ . Soit  $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$ . Donc  $\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{1}{c}$ . Or  $x < c < y$  donc  $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ . Ce qui donne les inégalités recherchées.
  2.  $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$ . Et  $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$ . Comme  $f''$  est négative alors  $f'$  est décroissante sur  $[0, 1]$ . Or  $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$  d'après la première question et de même  $f'(1) < 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [x, y]$  tel que  $f'(c) = 0$ . Maintenant  $f'$  est positive sur  $[0, c]$  et négative sur  $[c, 1]$ . Donc  $f$  est croissante sur  $[0, c]$  et décroissante sur  $[c, 1]$ . Or  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 0$  donc pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \geq 0$ . Cela prouve l'inégalité demandée.
  3. Géométriquement nous avons prouvé que la fonction  $\ln$  est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de  $(x, f(x))$  à  $(y, f(y))$ ) est sous la courbe d'équation  $y = f(x)$ .
- 

### Correction de l'exercice 9 ▲

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$  donc les extremums appartiennent à  $\{0, \frac{3}{4}\}$ . Comme  $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$ . Alors  $f''$  ne s'annule pas en  $\frac{3}{4}$ , donc  $\frac{3}{4}$  donne un extremum local (qui est même un minimum global). Par contre  $f''(0) = 0$  et  $f'''(0) \neq 0$  donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas local, pensez à un fonction du type  $x \mapsto x^3$ ).

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

Le théorème de Rolle dit que si  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  et dérivable sur l'ouvert  $]a, b[$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ .

1. Supposons par l'absurde, qu'il existe  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $g(x_0) = g(a)$ . Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de  $g$  à l'intervalle  $[a, x_0]$  (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe  $c \in ]a, x_0[$  tel que  $g'(c) = 0$ , ce qui contredit les hypothèses faites sur  $g$ . Par conséquent on a démontré que  $g(x) \neq g(a)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .
2. D'après la question précédente, on a en particulier  $g(b) \neq g(a)$  et donc  $p$  est un nombre réel bien défini et  $h = f - p \cdot g$  est alors une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Un calcul simple montre que  $h(a) = h(b)$ . D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ . Ce qui implique la relation requise.
3. Pour chaque  $x \in ]a, b[$ , on peut appliquer la question 2. aux restrictions de  $f$  et  $g$  à l'intervalle  $[x, b]$ , on en déduit qu'il existe un point  $c(x) \in ]x, b[$ , dépendant de  $x$  tel que

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Alors, comme  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} c(x) = b$ , (car  $c(x) \in ]x, b[$ ) on en déduit en passant à la limite dans (\*) que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de "règle de l'Hôpital".

4. Considérons les deux fonctions  $f(x) = \arccos x$  et  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  pour  $x \in [0, 1]$ . Ces fonctions sont continues sur  $[0, 1]$  et dérivables sur  $]0, 1[$  et  $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$ ,  $g'(x) = -x/\sqrt{1-x^2} \neq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ . En appliquant les résultats de la question 3., on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

### Correction de l'exercice 11 ▲

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_*$  en tant que composée de fonctions dérivables, et sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est nulle sur cet intervalle; étudions donc la dérivabilité en 0.

On a

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

or  $e^{1/t}/t$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0 par valeurs négatives. Donc  $f$  est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc  $f$  est dérivable et  $f'(0) = 0$ .

2. On a

$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

donc le taux d'accroissement de  $f'$  au voisinage de 0 est

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et il tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc  $f$  admet une dérivée seconde en 0, et  $f''(0) = 0$ .

3. (a) On a déjà trouvé que  $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$ , donc  $f'(t) = P_1(t)/t^2 e^{1/t}$  si on pose  $P_1(t) = -1$ .  
Par ailleurs,  $f''(t) = e^{1/t}/t^4 + e^{1/t}(2/t^3) = \frac{1+2t}{t^4} e^{1/t}$  donc la formule est vraie pour  $n = 2$  en posant  $P_2(t) = 1 + 2t$ .

- (b) Supposons que la formule est vraie au rang  $n$ . Alors  $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$  d'où

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P'_n(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}} e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t} (-1/t^2) \\ &= \frac{P'_n(t)t^2 - (2nt + 1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}} e^{1/t} \end{aligned}$$

donc la formule est vraie au rang  $n + 1$  avec

$$P_{n+1}(t) = P'_n(t)t^2 - (2nt + 1)P_n(t).$$

4. Sur  $\mathbb{R}_*$  et sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f$  est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0. Montrons par récurrence que  $f$  est indéfiniment dérivable en 0, et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ . On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que  $f$  est  $n$ -fois dérivable, et que  $f^{(n)}(0) = 0$ . Alors le taux d'accroissement de  $f^{(n)}$  en 0 est :

$$\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n+1} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et sa limite est 0 quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc  $f^{(n)}$  est dérivable en 0, et  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang  $n + 1$ .

Par conséquent,  $f$  est de classe  $C^\infty$ .