

Limites, continuité, fonctions usuelles

I Fonctions numériques, généralités

I.1 Opérations sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Dans l'étude des fonctions numériques, on rencontre des applications f à valeurs réelles, définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ appelée *domaine de définition* de f .

L'ensemble $\mathcal{D}$ consiste le plus souvent en une réunion d'intervalles d'intérieur non vide.

Par exemple, le domaine de définition de l'application *tangente* est la réunion des intervalles $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, pour tout entier relatif k .

L'étude d'une fonction f (continuité, monotonie, extrémums, etc.) doit cependant s'effectuer *intervalle par intervalle*. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on se limitera à des applications à valeurs réelles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^I$, l'ensemble des applications $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On rappelle que si f et g appartiennent à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$: $f = g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = g(x)$.

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On définit les applications $f + g$ et fg par :

$$\begin{cases} \forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall x \in I, (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Muni de ces deux opérations $+$ et $\times$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ a une structure d'anneau commutatif :

- Le neutre additif est l'application constante $x \mapsto 0$.
- L'opposée d'une application f est l'application $-f$ définie par : $\forall x \in I, (-f)(x) = -f(x)$.
- Le neutre multiplicatif est l'application constante $x \mapsto 1$.
- Une application f est inversible pour le produit $\Leftrightarrow$ elle ne prend pas la valeur 0.

Son inverse pour $\times$ est alors $\frac{1}{f}$, définie par : $\forall x \in I, \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Soit α un réel. On note encore α l'application constante $x \mapsto \alpha$.

La notation αf désigne l'application définie par : $\forall x \in I, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

(c'est le produit de f par l'application constante α).

I.2 Relation d'ordre sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Définition

- || Pour tous f et g de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on pose $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.
- || On définit ainsi une relation d'ordre *partiel* sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- || On note comme d'habitude $f \geq g \Leftrightarrow g \leq f$.

Définition

- || Soient f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- || On définit les applications $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ de la manière suivante :
 - $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I, \inf(f, g)(x) = \min(f(x), g(x)) \\ \forall x \in I, \sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)) \end{array} \right.$

Remarques et propriétés

f, g et h désignent ici trois applications quelconques de I dans $\mathbb{R}$.

- $\inf(f, g) = f \Leftrightarrow f \leq g \Leftrightarrow \sup(f, g) = g$.
- $\left\{ \begin{array}{l} \inf(f + h, g + h) = \inf(f, g) + h \\ \sup(f + h, g + h) = \sup(f, g) + h \end{array} \right.$
- Si $\alpha > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f, g) \\ \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f, g) \end{array} \right.$ et si $\alpha < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f, g) \\ \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f, g) \end{array} \right.$
- En particulier $\left\{ \begin{array}{l} \inf(-f, -g) = -\sup(f, g) \\ \sup(-f, -g) = -\inf(f, g) \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} \inf(f, g) \leq f \leq \sup(f, g) \\ \inf(f, g) \leq g \leq \sup(f, g) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (h \leq f \text{ et } h \leq g) \Leftrightarrow h \leq \inf(f, g) \\ (h \geq f \text{ et } h \geq g) \Leftrightarrow h \geq \sup(f, g) \end{array} \right.$

Autrement dit, dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ muni de la relation d'ordre $\leq$:

- $\left\{ \begin{array}{l} \inf(f, g) \text{ est le plus grand des minorants (la } \textit{borne inférieure} \text{) de la paire } \{f, g\}. \\ \sup(f, g) \text{ est le plus petit des majorants (la } \textit{borne supérieure} \text{) de la paire } \{f, g\}. \end{array} \right.$
- Les opérations $\inf$ et $\sup$ sont des lois de composition associatives sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- On peut donc généraliser et définir les applications $\inf(f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\sup(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Définition (Notations f^+ , f^- , $|f|$)

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On définit les applications $|f|$, f^+ et f^- de la façon suivante :

$$- \forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|.$$

$$- \forall x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$- \forall x \in I, f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Remarques et propriétés

$$- \text{Une définition équivalente de } f^+ \text{ et de } f^- \text{ est : } \begin{cases} f^+ = \sup(f, 0) \\ f^- = \sup(-f, 0) \end{cases}$$

- Les applications f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$$- \text{On vérifie les égalités : } \begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases} \text{ et on en déduit } \begin{cases} f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \end{cases}$$

$$- \text{Plus généralement : } \forall (f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \begin{cases} \sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \\ \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \end{cases}$$

I.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est *majorée* s'il existe un réel β tel que : $\forall x \in I, f(x) \leq \beta$.

Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

On note alors $\sup_I f$, ou $\sup_{x \in I} f(x)$ la borne supérieure de l'ensemble image $f(I)$.

On dit que cette quantité est la borne supérieure de f sur l'intervalle I .

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est *minorée* s'il existe un réel α tel que : $\forall x \in I, f(x) \geq \alpha$.

Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.

On note alors $\inf_I f$, ou $\inf_{x \in I} f(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $f(I)$.

On dit que cette quantité est la borne inférieure de f sur l'intervalle I .

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *bornée* si f est majorée et minorée.

f est donc bornée s'il existe deux réels α et β tels que : $\forall x \in I, \alpha \leq f(x) \leq \beta$.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit J un sous-intervalle de I , d'intérieur non vide.
 On dit que f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur J si la restriction de f à J est majorée (resp. minorée, resp. bornée).
 On a alors les inégalités :
$$\begin{cases} \inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in J \subset I} f(x) \\ \sup_{x \in I} f(x) \geq \sup_{x \in J \subset I} f(x) \end{cases}$$

Remarques

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- f est bornée $\Leftrightarrow |f|$ est majorée.
- Si f et g sont majorées, alors $f + g$ est majorée et $\sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g$.
 Si f et g sont minorées, alors $f + g$ est minorée et $\inf_I (f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g$.
- f majorée (resp. minorée) $\Leftrightarrow -f$ minorée (resp. majorée).
 On a alors : $\inf_I (-f) = -\sup_I f$, et $\sup_I (-f) = -\inf_I f$.
- Soit α un réel strictement positif.
 Si f est majorée alors αf est majorée et $\sup_I (\alpha f) = \alpha \sup_I f$.
 De même, si f est minorée alors αf est minorée et $\inf_I (\alpha f) = \alpha \inf_I f$.
- Si f et g sont bornées, alors : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est bornée.

I.4 Extremums absolus (ou globaux)**Définition**

Soit f une application définie sur l'intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
 On dit que f présente un *maximum absolu* (ou *global*) en a si : $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$.
 On dit que f présente un *minimum absolu* (ou *global*) en a de I si : $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$.
 Dans l'un ou l'autre cas, on dit que f présente un *extrémum absolu* en a .

Remarques

- f présente un maximum absolu en $a \Leftrightarrow f$ est majorée sur I et $f(a) = \sup_I f$.
 On exprime cela en disant que la borne inférieure de f sur I est *atteinte* en a .
 On peut alors noter $f(a) = \max_I f$ plutôt que $f(a) = \sup_I f$.
- De même, f a un minimum absolu en $a \Leftrightarrow f$ est minorée sur I et $f(a) = \inf_I f$.
 On dit alors que f atteint sa borne inférieure en a et on note $f(a) = \min_I f$.

Définition (Maximum local)

Soit f appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I .
 On dit que f présente un *maximum local* en a si :
 $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], f(x) \leq f(a)$.
 ($\Leftrightarrow$ au voisinage de a , f prend des valeurs toutes inférieures ou égales à $f(a)$)

Définition (*Minimum local*)

Soit f appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I .

De même on dit que f présente un *minimum local* en a si :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon], f(x) \geq f(a).$$

Remarques

- Un minimum ou un maximum local est aussi appelé un *extrémum local*.
- Un extrémum global (absolu) est bien sûr un extrémum local. La réciproque est fausse.

I.5 Applications monotones**Définition**

Soit f une application définie sur l'intervalle I , à valeurs réelles. On dit que f est :

- *croissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- *décroissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- *strictement croissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- *strictement décroissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- *monotone* si f est croissante ou décroissante.
- *strictement monotone* si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

- Seules les applications constantes sont à la fois croissantes et décroissantes.
- Pour exprimer qu'une application f n'est pas monotone, on peut écrire :
 $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq : $z \in [x, y]$ mais $f(z) \notin [f(x), f(y)]$.
- Soit f une application monotone. Dire que f n'est pas strictement monotone signifie qu'il existe un segment $[a, b]$ inclus dans I (avec $a < b$) sur lequel f garde une valeur constante.

Proposition (*Sommes d'applications monotones*)

- Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.
- Si f et g ont même monotonie, alors $f + g$ est monotone de même monotonie.
- Si de plus f ou g est strictement monotone, alors $f + g$ est strictement monotone.

Proposition (*Produits d'applications monotones*)

- Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.
- Si f et g sont positives croissantes, fg est positive croissante.
- Si f et g sont positives décroissantes, fg est positive décroissante.
- Si f et g sont négatives croissantes, fg est positive décroissante.
- Si f et g sont négatives décroissantes, fg est positive croissante.
- Si f est positive croissante et g négative décroissante, fg est négative décroissante.
- Si f est positive décroissante et g négative croissante, fg est négative croissante.

Remarques

- Dans les cas autres que ceux énumérés ci-dessus, on ne peut rien dire.
- Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
Si $\alpha \geq 0$, αf et f ont la même monotonie.
Si $\alpha \leq 0$, αf et f sont de monotonies contraires. C'est le cas en particulier pour $-f$ et f .

Proposition (*Inverse d'une application monotone*)

- Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f ne s'annule pas sur I , et qu'elle garde un signe constant.
Alors $\frac{1}{f}$ est monotone sur I , de monotonie contraire à celle de f .

Proposition (*Compositions d'applications monotones*)

- Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I)$ soit inclus dans J .
Soit g une application de J dans $\mathbb{R}$. L'application $g \circ f$ est donc définie sur I .
– Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
– Si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.
Les deux propriétés précédentes restent vraies pour des monotonies strictes.

I.6 Applications paires ou impaires

On considère ici des applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

On suppose que l'ensemble $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 ($x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}$).

Le cas le plus courant est celui d'un intervalle de centre 0, et notamment $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Définition

- On dit que f est *paire* si : $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$.
On dit que f est *impaire* si : $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$.

Proposition (*Parties paire et impaire d'une application*)

- Soit f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
 f s'écrit de manière unique $f = p + i$, où p est paire et i est impaire.
 p et i sont définies par : $\forall x \in \mathcal{D}, p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
On dit que p est la *partie paire* de f et que i en est la *partie impaire*.

Remarques

La seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle.

Soient les applications ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de $x \mapsto e^x$.

Proposition (*Opérations entre applications paires ou impaires*)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, paires ou impaires.

- Si f, g ont même parité, fg est paire. Si elles sont de parités contraires, fg est impaire.
- L'application $\frac{1}{f}$ est de même parité que f .
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: Si f, g sont paires (resp. impaires), $\alpha f + \beta g$ est paire (resp. impaire).
- Si f est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.
- Si f est paire, alors $h \circ f$ est paire (quelque soit l'application h).
- Si f est impaire, et si g est paire ou impaire, alors $g \circ f$ a la même parité que g .

I.7 Applications périodiques**Définition**

Soient $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit T un réel strictement positif.
L'application f est dite T -périodique si : $\forall x \in \mathcal{D}, x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x + T) = f(x)$

Propriétés

Si f est T -périodique, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, f est nT -périodique.

Si f et g sont T -périodiques, alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont T -périodiques.

Si f est périodique, alors $\frac{1}{f}$ est T -périodique.

Si f est T -périodique, alors pour toute application g , $g \circ f$ est T -périodique.

Remarques

- Si f est périodique, il vaut mieux utiliser sa plus petite période positive (si elle existe). Cette plus petite période n'existe pas toujours.

Par exemple, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ admet tout rationnel comme période.

- Soit f une application T_1 -périodique, et g une application T_2 -périodique.

On suppose que le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ est rationnel. Alors $f + g$ et fg sont encore périodiques.

Par exemple : si $T_1 = \frac{3\pi}{4}$ et $T_2 = \frac{\pi}{2}$, alors $f + g$ et fg sont $\frac{3\pi}{2}$ -périodiques.

- Si f est T -périodique, alors l'application $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est $\frac{T}{|\alpha|}$ -périodique.

I.8 Axes et centres de symétrie

Proposition (Parité, imparité et symétrie)

Soit f une application f à valeurs réelles, définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

La courbe représentative Γ de f (on dit aussi le *graphe* de f) est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ dans le plan affine $\mathcal{P}$ (muni d'un repère O, i, j), x décrivant le domaine de f .

- L'application f est paire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy .
- De même, f est impaire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'origine O .

Proposition (Axes de symétrie)

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a .

La droite $x = a$ est axe de symétrie du graphe Γ de f

$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = f(x)$.

$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a + h) = f(a - h)$.

$\Leftrightarrow$ L'application g définie par $g(x) = f(a + x)$ est paire.

Proposition (Centres de symétrie)

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a .

Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie du graphe Γ de f

$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a + h) - b = b - f(a - h)$.

$\Leftrightarrow$ L'application g définie par $g(x) = f(a + x) - b$ est impaire.

Proposition (Périodicité)

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant tel que : $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}$ ($T > 0$ donné).

L'application f est T -périodique

$\Leftrightarrow$ son graphe Γ est invariant dans toute translation de vecteur $kT(1, 0)$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Proposition (Grapshe de la bijection réciproque)

Soit f une application bijective de $\mathcal{D}$ sur $f(\mathcal{D})$.

Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.

II Limites des fonctions numériques

II.1 Propriétés vraies "au voisinage d'un point"

La définition suivante permettra de simplifier certains énoncés de ce chapitre.

Définition

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
 Soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$).
 Soit $\mathcal{P}$ un prédicat (une propriété) de la variable réelle x , défini sur I .
 $\mathcal{P}(x)$ désigne donc une proposition, vraie ou fausse selon les valeurs de x dans I .
 On dit que $\mathcal{P}$ est vraie *au voisinage de a* si l'une des situations suivantes est réalisée :
- a est réel et $\exists \delta > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
 - $a = +\infty$ et $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x > M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
 - $a = -\infty$ et $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x < M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarques

- Dans le premier cas, la clause $x \in I$ n'est utile que si a est une extrémité de I .
 En effet si a est intérieur à I , alors pour tout δ assez petit, $]a - \delta, a + \delta[\subset I$.
 Si f et g sont des applications définies sur I , on pourra par exemple écrire des propositions du genre : si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , alors ...

II.2 Limite en un point

Définition (Limite en un point de $\mathbb{R}$)

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit a un réel, élément ou extrémité de I .
 Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en a si :
- $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } (x \in I \text{ et } |x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- On dit que $+\infty$ est limite de f en a si :
- $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x \in I \text{ et } |x - a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \geq M.$$
- On dit que $-\infty$ est limite de f en a si :
- $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x \in I \text{ et } |x - a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \leq M.$$

Remarques

- Dans les trois cas, la clause $x \in I$ n'est pas nécessaire si a est intérieur à I .
 Si $a \in I$ et donc si f est définie en a , la seule limite possible de f en a est le réel $f(a)$.

Définition (*Limite en $+\infty$*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]\alpha, +\infty[$, ou $I = [\alpha, +\infty[$, ou $I = \mathbb{R}$.

Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M.$$

Définition (*Limite en $-\infty$*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]-\infty, \alpha[$, ou $I =]-\infty, \alpha]$, ou $I = \mathbb{R}$.

Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On dit que $-\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M.$$

Proposition (*Unicité de la limite*)

Les définitions précédentes permettent de donner un sens à la phrase ℓ est limite de f en a , où ℓ et a sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (droite numérique achevée), à condition que a soit élément de l'intervalle I ou qu'il en soit une extrémité.

Si un tel élément ℓ existe, alors il est unique.

On l'appelle la limite de f en a , et on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, ou $\lim_a f = \ell$ ou $\begin{matrix} f(x) \rightarrow \ell \\ x \rightarrow a \end{matrix}$

Remarque

Il se peut qu'une application ne possède pas de limite en un point. Par exemple

- ◊ L'application $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- ◊ L'application $x \mapsto E[x]$ n'a pas de limite en 0.

Importance des limites nulles ou des limites en 0

Si ℓ est un réel, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \ell) = 0$.

Si a est un réel, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \ell$.

Proposition (*Caractérisation séquentielle des limites*)

Soit f une application définie sur l'intervalle I , à valeurs réelles.

Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (élément de I ou extrémité de I). Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) de I tendant vers a , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$.

Définition (Limite par valeurs supérieures ou inférieures)

On suppose que la limite de f en a (élément de $\overline{\mathbb{R}}$) est le réel ℓ .

Quand x tend vers a , on dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures (resp. inférieures) si, au voisinage de a , $f(x) \geq \ell$ (resp. $f(x) \leq \ell$).

On peut alors éventuellement noter : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^+$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^-$).

II.3 Limite à gauche ou à droite**Définition** (Limite à gauche)

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I . Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a[$.

Le réel a est donc l'extrémité droite de J , et n'appartient pas à J .

On dit que f admet ℓ pour limite en a à gauche si g admet ℓ pour limite en a .

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$, ou $\lim_{a^-} f = \ell$, ou $f(x) \rightarrow \ell$ $x \rightarrow a^-$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Définition (Limite à droite)

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I . Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]a, +\infty[$.

Le réel a est donc l'extrémité gauche de J , et n'appartient pas à J .

On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si g admet ℓ pour limite en a .

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, ou $\lim_{a^+} f = \ell$, ou $f(x) \rightarrow \ell$ $x \rightarrow a^+$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Remarque

La limite de f en a , à gauche ou à droite, si elle existe, est unique. De même, la plupart des propriétés vraies pour les limites le sont encore s'il s'agit de limites à gauche ou à droite.

II.4 Opérations sur les limites

Proposition

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).
 Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \ell + \ell'$ (si $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée $\infty - \infty$).
 De même, $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell\ell'$ (si $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée $0 \times \infty$).

Cas particulier

Si λ est un réel non nul, alors $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda\ell$.

Proposition (Limite de l'inverse d'une fonction)

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
 Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.
 Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
 Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a , $f(x) > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
 Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a , $f(x) < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition (Composition des limites)

On suppose que l'application $g \circ f$ est définie au voisinage de a .
 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$.

II.5 Limites et relation d'ordre

Proposition (Limite et valeur absolue)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |\ell|$.
 La réciproque est fautive, mais : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = 0$.

Proposition (Conséquences de l'existence d'une limite finie)

Si f admet une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a (réciproque fautive).

Si f admet en a une limite réelle non nulle ℓ , alors au voisinage de a : $|f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2}$.

Plus précisément : $\begin{cases} \text{Si } \ell > 0, \text{ alors au voisinage de } a, f(x) > \frac{\ell}{2} > 0. \\ \text{Si } \ell < 0, \text{ alors, au voisinage de } a, f(x) < \frac{\ell}{2} < 0. \end{cases}$

Remarque

Les propriétés précédentes sont utiles parce qu'elles précisent le signe de f au voisinage de a et permettent de majorer $\frac{1}{|f(x)|}$ au voisinage de ce point par $\frac{2}{|\ell|}$.

Proposition

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).
 Si on a $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , alors $\ell \leq \ell'$.
 En particulier, si λ est un nombre réel :
 - Si $f(x) \leq \lambda$ au voisinage de a , alors $\ell \leq \lambda$.
 - Si $f(x) \geq \lambda$ au voisinage de a , alors $\ell \geq \lambda$.

Remarque

Si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a , alors on peut seulement affirmer que $\ell \leq \ell'$.

Par passage à la limite, les inégalités strictes "deviennent" donc des inégalités larges.

Proposition (Principe des gendarmes)

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$.

Cas particuliers

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

- Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$.

- Supposons $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a :
$$\begin{cases} \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty. \\ \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \end{cases}$$

Proposition

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si $\ell < \ell'$, alors, au voisinage de a on a l'inégalité $f(x) < g(x)$.

En particulier, si λ est un nombre réel :

- Si $\ell < \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) < \lambda$ au voisinage de a .

- Si $\ell > \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) > \lambda$ au voisinage de a .

Proposition (Limite aux bornes, pour une application monotone)

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors la limite ℓ de f en a et la limite ℓ' de f en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

- Supposons f croissante.

Si elle est majorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = +\infty$.

Si elle est minorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = -\infty$.

- Supposons f décroissante.

Si elle est minorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = -\infty$.

Si elle est majorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = +\infty$.

Proposition (Limite en un point intérieur, pour une application monotone)

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Soit c un réel de l'intervalle $]a, b[$.

L'application f admet en c une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.

Plus précisément :

- Si f est croissante : $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.

- Si f est décroissante : $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.

II.6 Formes indéterminées

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

On dit qu'on a affaire à la forme indéterminée :

$$\begin{cases} \infty - \infty & \text{si on veut calculer la limite en } a \text{ de } f + g \text{ et si } \ell = +\infty, \ell' = -\infty. \\ 0 \times \infty & \text{si on veut calculer la limite en } a \text{ de } fg \text{ et si } \ell = 0, \ell' = \pm\infty. \\ \frac{0}{0} & \text{si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \frac{f}{g} \text{ et si } \ell = \ell' = 0. \\ \frac{\infty}{\infty} & \text{si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \frac{f}{g} \text{ et si } \ell = \pm\infty \text{ et } \ell' = \pm\infty. \end{cases}$$

Le calcul de $\lim_a(f^g)$ donne lieu aux formes indéterminées : $\begin{cases} 1^\infty & \text{si } \ell = 1 \text{ et } \ell' = \pm\infty. \\ \infty^0 & \text{si } \ell = +\infty \text{ et } \ell' = 0. \\ 0^0 & \text{si } \ell = \ell' = 0. \end{cases}$

Toutes ces formes indéterminées peuvent se ramener à $\infty - \infty$ ou à $0 \times \infty$.

Pour les trois dernières il suffit en effet de poser $f^g = \exp(g \ln f)$.

Dans une forme indéterminée, tous les résultats sont possibles.

Chaque problème doit donc être résolu individuellement.

Comme on dit, il faut *lever* la forme indéterminée.

IV Continuité

IV.1 Continuité en un point

Définition

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe.

Au vu des définitions cette limite ne peut être égale qu'à $f(a)$.

Autrement dit : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x \in I \text{ et } |x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Définition (Continuité à gauche en un point)

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit a un élément de I , qui ne soit pas l'extrémité gauche de I .

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a]$

On dit que f est *continue à gauche* en a si g est continue en a .

Cela équivaut à dire que : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (a - \delta \leq x \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Définition (*Continuité à droite en un point*)

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I qui n'est pas l'extrémité droite de I .

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap [a, +\infty[$.

On dit que f est *continue à droite* en a si g est continue en a .

Cela équivaut à dire que : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ou encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a \leq x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Remarque

Soit a un point intérieur à l'intervalle I . Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a .

Définition (*Discontinuité de première espèce*)

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un point de I .

Si f n'est pas continue en a , on dit que f est *discontinue* en ce point.

Si a est intérieur à I , si f est discontinue en a , mais si les limites à gauche et à droite en a existent et sont finies, on dit que f présente en a une *discontinuité de première espèce*.

Définition (*Prolongement par continuité*)

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un réel, extrémité de I mais n'appartenant pas à I .

On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\ell = \lim_a f$ existe et est finie.

Cela signifie que g définie sur $I \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $g(a) = \ell$ est continue en a .

On dit que l'application g est le *prolongement par continuité* de f en a .

IV.2 Propriétés

Proposition (*Opérations sur applications continues en un point*)

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I .

Si f et g sont continues en a , il en est de même pour fg et $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en a .

Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Proposition (*Caractérisation séquentielle de la continuité*)

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I .

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de I convergeant vers a , la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Remarques

La propriété précédente est utile pour montrer qu'une application f n'est pas continue en un point a : on construit une suite (u_n) convergeant vers a , mais telle que la suite de terme général $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

De même si le réel a est une extrémité de I (n'appartenant pas à I), si la suite (u_n) converge vers a , mais si la suite de terme général $f(u_n)$ n'a pas de limite (ou si sa limite est infinie), on peut dire que f n'est pas prolongeable par continuité au point a .

IV.3 Continuité sur un intervalle

Définition

- Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
 On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .
 On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(I)$) l'ensemble des applications continues sur I , à valeurs réelles.

Propriétés et exemples

- Toute application constante est continue sur $\mathbb{R}$.
 Il en est de même des applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$.
- Soient f et g deux applications continues sur I .
 Pour tous scalaires α et β , $\alpha f + \beta g$ est continue sur I .
 Il en est de même de l'application fg .
 Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- Les applications polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
 Une application rationnelle (quotient de deux applications polynômiales) est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les applications usuelles $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.
- Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
- Si f est continue sur I , alors les applications $|f|$, f^+ et f^- sont continues sur I .
 Si f et g sont continues sur I , alors $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I .
- Si f est continue sur I , alors la restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J .

Remarques

Pour démontrer qu'une application est continue sur un intervalle I , on ne revient pratiquement jamais à la définition *epsilonlesque*.

Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un *cocktail* de fonctions continues classiques et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de f en chacun des points de I .

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

- Soit f une application continue sur l'intervalle I .
 Soient a, b deux éléments de I ($a < b$).
 Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
 Alors il existe un réel x , compris entre a et b , tel que $f(x) = y$.

Proposition (énoncé équivalent au TVI)

- Soit f une application continue sur l'intervalle I , à valeurs réelles.
 Alors $f(I)$ est un intervalle.

Proposition

- Soit f une application continue sur l'intervalle I , à valeurs réelles.
 On suppose qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
 Alors il existe c dans I , compris entre a et b , tel que $f(c) = 0$.

Théorème (*Fonction continue sur un segment*)

|| Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ (a, b deux réels, $a \leq b$).
 || Alors $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$.

Proposition

|| Toute application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes :
 || Il existe x_0 dans $[a, b]$ tel que $f(x_0) = m = \min\{f(x), a \leq x \leq b\}$.
 || Il existe x_1 dans $[a, b]$ tel que $f(x_1) = M = \max\{f(x), a \leq x \leq b\}$.

IV.4 Théorème de la bijection réciproque**Théorème**

|| Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
 || On suppose que f est continue et strictement monotone sur I .
 || Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
 || De plus, la bijection réciproque f^{-1} , de J vers I , est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que f).

Remarques

- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).
- Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à $f(x) = 0$.
Le théorème de la bijection réciproque assure l'unicité de cette solution.
- Si f est continue sur l'intervalle I , l'intervalle $J = f(I)$ n'a pas toujours les mêmes propriétés que I (ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf si I est un segment. Mais si f est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de I est conservé.

Exemples d'inversions d'applications continues

- L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.
- Pour tout α de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.
- L'application $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de x*).
- L'application $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de x*).
- L'application $x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de x*).

IV.5 Continuité uniforme

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } : \forall (x, y) \in I \times I, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque

Pour montrer qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, on doit montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver x et y dans I tels que $|x - y| < \delta$, mais cependant tels que $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Il revient au même de trouver deux suites (x_n) et (y_n) de I telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ mais telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(y_n) - f(x_n)) \neq 0$.

Continuité et continuité uniforme

Rappelons la définition de la continuité de f en un point a de I :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Dans cette définition, le réel δ dépend de ε et du point a .

La continuité uniforme exprime l'existence d'un réel δ ne dépendant plus du point a .

En particulier : si f est uniformément continue sur l'intervalle I , f est continue sur I .

La réciproque est fautive, comme le montrent ces exemples : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0, 1]. \\ f(x) = \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Le théorème suivant donne une condition où la continuité implique la continuité uniforme.

Théorème (Théorème de Heine)

Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ (a, b deux réels, $a \leq b$).
Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

IV.6 Applications lipschitziennes

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit λ un réel strictement positif.
On dit que f est λ -lipschitzienne (ou encore lipschitzienne de rapport λ) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

Remarques et propriétés

- Dire que f est λ -lipschitzienne sur I , c'est dire que les taux d'accroissement de f sur I (entre deux points quelconques) sont majorés en valeur absolue par λ .
- Si f est λ -lipschitzienne sur I , alors f est uniformément continue sur I .
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur le segment $[0, 1]$.
- Si f est λ -lipschitzienne sur I , alors, pour tout $\mu > \lambda$, f est μ -lipschitzienne sur I .
- Si f est λ -lipschitzienne sur I , avec $\lambda < 1$, on dit que f est *contractante* sur I .
- L'inégalité des accroissements finis (cours de Terminale) indique que si f est dérivable sur I , et si, pour tout x de I , $|f'(x)| \leq \lambda$, alors f est λ -lipschitzienne sur I .

Opérations entre applications lipschitziennes

- Si f est λ -lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est λ -lipschitzienne sur $[a, c]$.
- Si f et g sont λ -lipschitziennes sur I , alors $f + g$ est λ -lipschitzienne sur I .
- Si f est λ -lipschitzienne sur I , alors αf est $|\alpha|\lambda$ -lipschitzienne sur I .
- Si f et g sont lipschitziennes et bornées sur I , alors fg est lipschitzienne sur I .
- Si f est λ -lipschitzienne sur I , si g est μ -lipschitzienne sur J , et si $f(I) \subset J$, alors l'application $g \circ f$ est $\lambda\mu$ -lipschitzienne sur I .

Les notions d'applications uniformément continue ou lipschitzienne sur un intervalle I sont des notions globales (contrairement à la continuité, qui est une notion locale). En particulier, cela n'a aucun sens de dire que f est uniformément continue ou lipschitzienne en un point !

V Quelques fonctions usuelles

V.1 Fonctions circulaires réciproques

Définition (fonction arcsin)

- || La restriction à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de $x \mapsto \sin x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
 || La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin x$ (fonction "arc sinus").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \arcsin x$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à x :

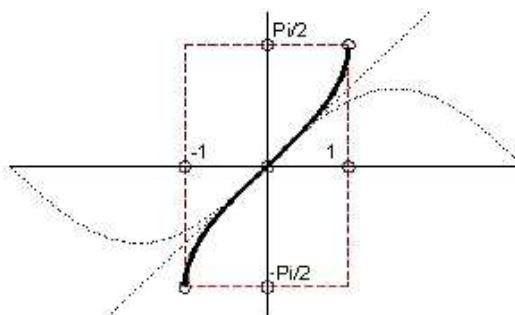
$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- Pour tout x de $[-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.
Pour tout x de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$ (attention au domaine!).
Pour tout x de $[-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
Pour tout x de $] -1, 1[$, $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- Dérivée : pour tout x de $] -1, 1[$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- Courbe représentative :

$y = \arcsin x$



Définition (fonction arccos)

La restriction à $I = [0, \pi]$ de $x \mapsto \cos x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.

La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos x$ (fonction "arc cosinus").

Propriétés

– L'application $x \mapsto \arccos x$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

Elle est continue et strictement décroissante.

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arccos x$ est l'angle compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à x :

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

– Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$.

Pour tout x de $[0, \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$ (attention au domaine !)

Pour tout x de $[-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

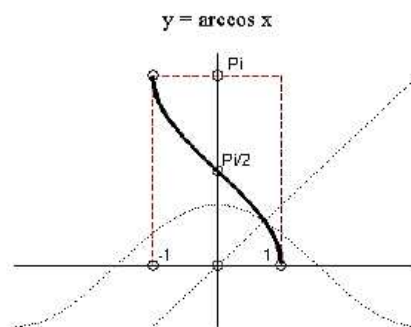
Pour tout x de $[-1, 0[\cup]0, 1]$, $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arccos(-x) + \arccos x = \pi$.

Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

– Dérivée : pour tout x de $] -1, 1[$, $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

– Courbe représentative :



Définition (fonction arctan)

- La restriction à $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $x \mapsto \tan x$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
 La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan x$ (fonction "arc tangente").

Propriétés

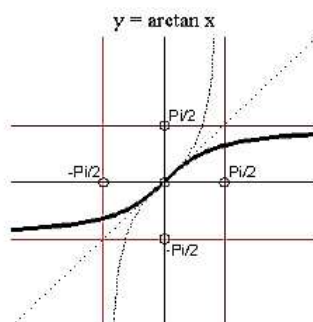
- L'application $x \mapsto \arctan x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- Pour tout x réel, $\arctan x$ est l'angle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x :

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
 Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$ (attention au domaine!).
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
 Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}$, avec $\varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- Dérivée : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.
- Courbe représentative :



V.2 Fonctions logarithmes et exponentielles

Définition (*logarithme népérien*)

On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur $\mathbb{R}^{++}$ et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$. Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

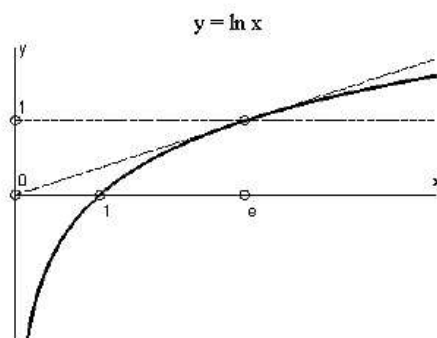
Propriétés

- L'application $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.
- Cette application est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$.
- Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

- Limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim_{0^+} \ln x = -\infty & \lim_{+\infty} \ln x = +\infty & \lim_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ & \lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim_1 \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0 & \lim_{0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 & \lim_{+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$$

- L'application $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ sur $\mathbb{R}$.
On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln e = 1$. On a : $e \approx 2.718281828$.
- L'application $x \mapsto \ln x$ est concave (sa dérivée seconde est $-\frac{1}{x^2} < 0$).
Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (avec égalité $\Leftrightarrow x = 1$.)
- Courbe représentative :



Remarques

- Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.
En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln x^2 = 2 \ln|x|$.
- L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Soit f une application dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.
On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\frac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.
- Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des applications dérivables et strictement positives sur l'intervalle I .
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$.
Alors la dérivée logarithmique de g est $\frac{g'}{g} = \alpha_1 \frac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \frac{f_2'}{f_2} + \dots + \alpha_n \frac{f_n'}{f_n}$.
- La dérivée logarithmique peut donc être un moyen commode de calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits, de puissances.
Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|} \exp \frac{1}{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$.
Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln|x(x+2)| + \frac{1}{x}$.
En dérivant, on obtient : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \frac{x^2-2}{x(x+2)} f$.
En redérivant sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$f''(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2} f(x)$$

$$= \frac{(x^2-2)^2 + (-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2} f(x) = \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x)$$
On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

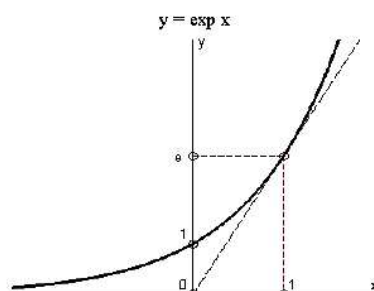
Définition (fonction exponentielle)

- On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *fonction exponentielle* et est notée $x \mapsto \exp x$.

Propriétés

- L'application $x \mapsto \exp x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{++}$, continue et strictement croissante.
On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$
- L'application $x \mapsto \exp x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x = \exp x$.
Plus généralement, $x \mapsto \exp x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp^{(n)} = \exp$.
- Propriétés fonctionnelles :
Pour tous x, y on a : $\exp(x+y) = \exp x \exp y \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}, \quad \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$.

- L'application $x \mapsto \exp x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est $\exp x > 0$).
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\exp(x) \leq 1 + x$ (égalité $\Leftrightarrow x = 0$.)
- Limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0^+ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1 \\ \forall \alpha, \beta > 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$$
- Notation $x \mapsto e^x$:
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$.
Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.
On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \exp x$.
On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque. Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.
- Courbe représentative :



Définition (fonctions exponentielles de base quelconque)

|| Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x , on pose $a^x = \exp(x \ln a)$.

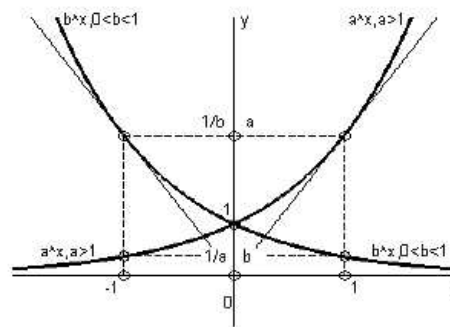
|| L'application $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a* .

Définition (fonctions puissances)

|| Soit α un nombre réel quelconque. On appelle *fonction puissance d'exposant α* l'application définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Propriétés des fonctions exponentielles

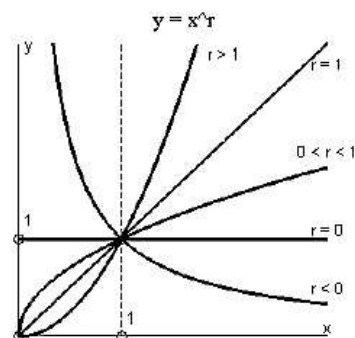
- Pour $a = e$, on retrouve l'application $x \mapsto \exp x$, déjà notée $x \mapsto e^x$.
L'application $x \mapsto \exp x = e^x$ est donc l'application exponentielle de base e .
- La notation a^x étend la définition de a^r pour tout rationnel r .
- Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln a) a^x$.
- L'application $x \mapsto a^x$ est
$$\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$$
- Si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{++}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ appelée fonction logarithme de base a .
Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $\log_{10} x = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ et elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto 10^x$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriétés des fonctions puissances

- Quant l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de l'application $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que $\mathbb{R}^{++}$).
- La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
Sur son domaine $\mathbb{R}^{++}$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$

- Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$.
- Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0. En $(0, 0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$. Toutes les courbes représentatives des applications $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1, 1)$.
- Le placement des différentes courbes est le suivant :
 $\forall x > 0, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$: $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$
- Courbes représentatives :



Propriétés fonctionnelles et limites usuelles

– Propriétés fonctionnelles :

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, pour tout a, b de $\mathbb{R}^{++}$, on a :

$$\begin{cases} a^{x+y} = a^x a^y & a^{-x} = \frac{1}{a^x} & a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y = a^{xy} & a^x b^x = (ab)^x & \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{cases}$$

– Limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \\ \forall \alpha > 0, \forall a > 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \forall \alpha > 0, \forall a \in]0, 1[& \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x = 0 \end{cases}$$

V.3 Fonctions hyperboliques

Définition (applications $x \mapsto \operatorname{sh} x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$)

|| Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (fonction "cosinus hyperbolique")

|| Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (fonction "sinus hyperbolique")

Propriétés

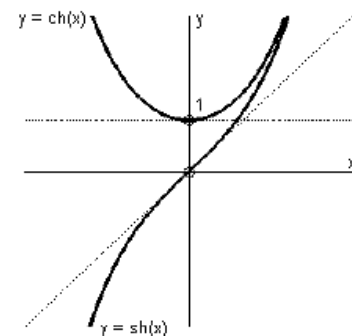
– Les applications $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$.

Les deux applications $x \mapsto y = \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto y = \operatorname{sh} x$ sont donc solutions de $y'' = y$.

L'application $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est paire, et l'application $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est impaire.

– Courbes représentatives :



$$- \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{cases}, \begin{cases} \operatorname{ch} x \geq 1 \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{cases}$$

$$- \forall x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{cht} = x, \operatorname{sht} = y \end{cases}$$

L'application $t \mapsto (\operatorname{cht}, \operatorname{sht})$ est un paramétrage de l'arc d'hyperbole $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

- Au voisinage de l'origine, on a : $\operatorname{sh} x \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion).

Toujours au voisinage de 0, on a : $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

- Au voisinage de $+\infty$, on a : $\operatorname{ch} x \sim \frac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh} x \sim \frac{e^x}{2}$.

Les deux courbes $y = \operatorname{ch} x$ et $y = \operatorname{sh} x$ sont asymptotes à $y = \frac{e^x}{2}$ (avec $\operatorname{sh} x < \frac{e^x}{2} < \operatorname{ch} x$.)

- Au voisinage de $-\infty$, on a : $\operatorname{ch} x \sim \frac{e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x \sim -\frac{e^{-x}}{2}$.

Définition (application $x \mapsto \operatorname{th} x$)

|| Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (fonction "tangente hyperbolique")

Propriétés

- L'application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est impaire. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1$.

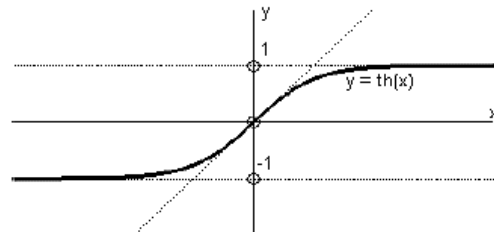
Au voisinage de 0, on a : $\operatorname{th} x \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion.)

- L'application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est indéfiniment dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $|\operatorname{th} x| \leq 1$.

- Courbe représentative :



V.4 Trigonométrie hyperbolique

- ch, sh et th d'une somme ou d'une différence :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \\ \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ch}2x = 2 \operatorname{ch}^2x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2x \\ \operatorname{sh}2x = 2 \operatorname{sh}x \operatorname{ch}x \end{cases}$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}x + \operatorname{th}y}{1 + \operatorname{th}x \operatorname{th}y}, \quad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th}x - \operatorname{th}y}{1 - \operatorname{th}x \operatorname{th}y}, \quad \operatorname{th}2x = \frac{2 \operatorname{th}x}{1 + \operatorname{th}^2x}$$

- Transformations de produits en sommes et de sommes en produits.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)) \\ \operatorname{ch}^2x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}2x) \\ \operatorname{sh}^2x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ch}p + \operatorname{ch}q = 2 \operatorname{ch}\frac{p+q}{2} \operatorname{ch}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{ch}p - \operatorname{ch}q = 2 \operatorname{sh}\frac{p+q}{2} \operatorname{sh}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{sh}p + \operatorname{sh}q = 2 \operatorname{sh}\frac{p+q}{2} \operatorname{ch}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{sh}p - \operatorname{sh}q = 2 \operatorname{sh}\frac{p-q}{2} \operatorname{ch}\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

- Changement de variable $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$: $\operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$
 – Changement de variable $u = e^x$: $\operatorname{ch}x = \frac{u^2+1}{2u}$, $\operatorname{sh}x = \frac{u^2-1}{2u}$, $\operatorname{th}x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$
 – Linéarisation.

On écrit $\operatorname{ch}^n x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n$ et $\operatorname{sh}^n x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$.

On développe (formule du binôme), on groupe les termes équidistants des extrémités, et on réutilise les définitions pour retrouver des $\operatorname{ch}(px)$ et/ou des $\operatorname{sh}(px)$. Par exemple :

$$\operatorname{sh}^4 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4x} - 4e^{2x} + 6 - 4e^{-2x} + e^{-4x}) = \frac{1}{8}(\operatorname{ch}4x - 4\operatorname{ch}2x + 3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^5 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}(e^{5x} + 5e^{3x} + 10e^x + 10e^{-x} + 5e^{-3x} + e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{16}(\operatorname{ch}5x + 5\operatorname{ch}3x + 10\operatorname{ch}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^5 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^5 = \frac{1}{16} \frac{1}{2}(e^{5x} - 5e^{3x} + 10e^x - 10e^{-x} + 5e^{-3x} - e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{16}(\operatorname{sh}5x - 5\operatorname{sh}3x + 10\operatorname{sh}x) \end{aligned}$$

- Opération inverse de la linéarisation.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$$

On peut ainsi exprimer $\operatorname{ch}(nx)$, $\operatorname{sh}(nx)$ en fonction de puissances de $\operatorname{ch} x$ et/ou de $\operatorname{sh} x$.

Pour cela on développe $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n$ par la formule du binôme.

La partie paire (resp. impaire) du résultat est alors égale à $\operatorname{ch}(nx)$ (resp. $\operatorname{sh}(nx)$).

Si on cherche à obtenir un résultat où figurent surtout des puissances de $\operatorname{ch} x$ (resp. de $\operatorname{sh} x$)

il convient de remplacer les puissances paires de $\operatorname{sh} x$ (resp. de $\operatorname{ch} x$) par des puissances de $(\operatorname{ch}^2 x - 1)$ (resp. de $(1 + \operatorname{sh}^2 x)$) puis de développer. Par exemple :

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^4 = \operatorname{ch}^4 x + 4 \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + 6 \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x + 4 \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} 4x = \operatorname{ch}^4 x + 6 \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^4 x \\ \operatorname{sh} 4x = 4 \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} 4x = \operatorname{ch}^4 x + 6 \operatorname{ch}^2 x (\operatorname{ch}^2 x - 1) + (\operatorname{ch}^2 x - 1)^2 \\ \operatorname{sh} 4x = 4 \operatorname{ch} x ((1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^3 x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} 4x = 8 \operatorname{ch}^4 x - 8 \operatorname{ch}^2 x + 1 \\ \operatorname{sh} 4x = 4 \operatorname{ch} x (2 \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x) \end{cases}$$

- Liens entre la trigonométrie hyperbolique et la trigonométrie circulaire.

Les formules de la trigonométrie hyperbolique peuvent être retrouvées à partir de celles de la trigonométrie circulaire, avec : $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$, $\sin(ix) = i \operatorname{sh} x$, $\tan(ix) = i \operatorname{th} x$.

Par exemple :

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3 \sin x) \Rightarrow \sin^3(ix) = \frac{1}{4}(-\sin(3ix) + 3 \sin(ix)) \\ &\Rightarrow -i \operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4}(-i \operatorname{sh}(3x) + 3i \operatorname{sh} x) \Rightarrow \operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4}(\operatorname{sh}(3x) - 3 \operatorname{sh} x) \end{aligned}$$