

Méthodes de raisonnement-Ensembles – Relations- Applications

Exercice1:

- 1)- Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$.
- 2)- Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice2:

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$ alors $a = b$.

Exercice3 :

1. Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la formule suivante:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Montrer les inégalités suivantes:

- a. $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- b. $2^n > n^2 \quad \forall n \geq 5.$

Exercice 4:

Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E . Montrer que :

- 1). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- 2). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- 3). $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ 4). $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A,$ 5). $p(A) \cup p(B) \subset p(A \cup B)$

Exercice 5:

Soit E et F deux ensembles non vides, A et B deux parties de E , et C et D deux parties de F . Montrer que :

1. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$
2. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C.$
3. $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D).$

Exercice6:

On définit sur \mathbb{R} la relation \mathcal{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe de 0 notée $cl(0)$.

Exercice 7:

1. Les applications suivantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$x \rightarrow 2x+1; \quad x \rightarrow x(x^2-1); \quad x \rightarrow x^2; \quad x \rightarrow \sin x.$$

2. On considère l'application $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \frac{x-1}{x+1} = f(x).$

- a) Montrer que f est injective.