CONTRÔLE CONTINU FINAL - 3 HEURES - /60

Pas de document autorisé – Pas de calculatrice – Barème donné à titre indicatif

Dans toute la suite, sauf indication contraire, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ **désigne un espace mesuré.**

— **Exercice 1. Cours**. /10

a) Énoncer le théorème de Beppo-Levi.

b) Montrer que si $A, B \in \mathcal{T}$ vérifient $A \subseteq B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

c) En déduire la sous σ-additivité finie : pour tout n, si $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ alors

$$\mu(A_0 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mu(A_0) + \cdots + \mu(A_n).$$

d) En déduire la sous σ-additivité de μ.

— **Exercice 2. Singletons chargés dans un espace mesuré fini**. /8

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\mu(X) < +\infty$.

a) Soit $k \geq 1$, montrer que $\{x \in X \mid \mu(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$ est de cardinal fini.

b) En déduire que $\{x \in X \mid \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.

c) Donner un espace mesuré $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ où $\{x \in Y \mid \nu(\{x\}) > 0\}$ n'est pas dénombrable.

— **Exercice 3. Limites d'intégrales et une intégrale à paramètre**. /8

a) Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Calculer $\lim\limits_n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, montrer que $\lim\limits_n \displaystyle\int_0^1 \left(1 + 3x\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{2n} f(x)dx = \int_0^1 e^{6x} f(x)dx$

c) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Justifier que $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x-y)dx$ est bien définie et continue.

— **Exercice 4. La tribu des ensembles dénombrables**. /8

Soit Y un ensemble infini.

a) Soit $\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{P}(Y) \mid D$ est dénombrable ou D^c est dénombrable$\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu.

b) Notons $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(Y) \mid F$ est fini ou F^c est fini$\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas une tribu.

c) Justifier que $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F})$.

— **Exercice 5. Beppo-Levi décroissant**. /8

Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives de X vers $\mathbb{R}_+$.

a) Justifier que (f_n) converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive.

b) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0} \in \mathcal{L}^1(\mu)$, montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

c) Trouver un contre-exemple si aucune des fonctions f_n n'est intégrable.

— **Problème. Mesure à densité pour la mesure de Lebesgue**. /23

Dans tout ce problème, on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\mu_f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \overline{\mathbb{R}_+} \\ B & \mapsto & \int_B f d\lambda \end{array} \right.$$

est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

b) On se propose ici de montrer que $\int_{\mathbb{R}} g d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} g f d\lambda$ pour g une fonction μ_f-intégrable.

i) Montrer l'égalité si g est une fonction étagée positive.

ii) En déduire l'égalité si g est une fonction mesurable positive.

iii) En déduire l'égalité si $g \in \mathcal{L}^1(\mu_f)$.

iv) Si $f : x \mapsto e^{-x} 1_{]0,+\infty[}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ et si $g : x \mapsto x^n$, calculer $\int_{\mathbb{R}} g d\mu_f$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que tout ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue est négligeable pour μ_f. Est-ce que la réciproque est vraie ?

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$. On définit pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) := \mu_f(]-\infty, x[)$.

i) Justifier que F est une fonction croissante, vérifiant $0 \leq F(x) \leq 1$.

ii) Dessiner le graphe de F si $f = \frac{1}{3} 1_{[1,4]}$. Même question si $f(x) = 1_{[0,+\infty[}(x) e^{-x}$.

iii) Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, F est continue en x_0. On pourra regarder les limites à gauche et à droite.