Convergence dominée et applications

Théorème 5.4.1 (Convergence dominée) *Soit sur* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, *mesurables telles que* $f_n \to f$ *p.p. quand* $n \to +\infty$. *S'il existe* g *une fonction mesurable* $(X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ *telle que*

1. $|f_n| \leq g$ *p.p.*
2. g *est* μ*-intégrable.*

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu. \tag{5.3}$$

Conséquence : Si la convergence est dominée, on peut intervertir limite et intégrale. En fait, on a même mieux que (5.3) : on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0. \tag{5.4}$$

Cela asure en particulier (5.3) puisque

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu.$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \, d\mu$.

On propose deux preuves différentes du Th. 5.4.1. L'une à partir de la Proposition , l'autre pour la conclusion plus forte (5.4).

Démonstration : Comme $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ p.p. et $-g \leq f_n \leq g$, la Proposition assure que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu &\leq \int \limsup_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

Démonstration : (de (5.4)) On considère la fonction $2g - |f - f_n|$. Comme $|f_n| \leq g$ et (à la limite) $|f| \leq g$, il vient facilement $|f - f_n| \leq 2g$, c'est à dire $2g - |f - f_n| \geq 0$. De plus, comme $f_n \to f$ simplement, on a $\lim_{n\to+\infty} 2g - |f - f_n| = 2g$. On applique alors le lemme de Fatou (Th. 4.4.1) à cette suite de fonctions :

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{n\to+\infty} \big(2g - |f - f_n|\big)\ d\mu &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int 2g - |f - f_n|\ d\mu \\
\int 2g\ d\mu &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int 2g\ d\mu - \int |f - f_n|\ d\mu \\
\int 2g\ d\mu &\leq \int 2g\ d\mu + \liminf_{n\to+\infty} \left(- \int |f - f_n|\ d\mu \right) \\
0 &\leq -\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\ d\mu \\
\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\ d\mu &\leq 0
\end{aligned}$$

en simplifiant par $\int g\ d\mu$ finie. Comme en plus $\liminf_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\ d\mu \geq 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int |f - f_n|\ d\mu = 0$ et a fortiori

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n\ d\mu = \int f\ d\mu.$$

□

Exemple : Montrer que si $f_n : [0,1] \to [0,1]$ est continue et pour tout $x \in [0,1]$ on a $f_n(x) \to 0$ alors $\int_{[0,1]} f_n d\lambda \to 0$. Essayer sans convergence dominée.

Exemple : Considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ mesurables définies sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $n \geq 1$, et $x \in \mathbb{R}$: $|f_n(x)| \leq 1/(1 + x^2)$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. Montrer alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Corollaire 3.6.2 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(\varphi_n)_n$ *une suite de fonctions numériques intégrables. On suppose que la série de fonctions* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ *converge presque partout et que les fonctions* $\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right|$ *sont majorées par une fonction intégrable indépendante de* n*. Alors,* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ *est intégrable et on a*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi_k d\mu \tag{3.23}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions intégrables

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

qui converge presque partout vers $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ et qui sont majorées en module par une fonction intégrable fixe. ■

3.7 Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann.

Proposition 3.7.1 *[11]Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

(ii) f est bornée sur $[a,b]$ et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 3.7.2

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{3.24}$$

Intégrales généralisées

Soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (soit I n'est pas borné, soit I est borné et non fermé). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et supposons que la restriction de f à tout intervalle compact $[a,b]$ de I est Riemann intégrable.

Définition 3.7.3 *Lorsque la limite*

$$\lim_{a \overset{>}{\longrightarrow} \alpha, b \overset{<}{\longrightarrow} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est convergente et on pose

$$\int_I f(x)dx = \lim_{a \overset{>}{\longrightarrow} \alpha, b \overset{<}{\longrightarrow} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est divergente.

Si $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente.

Le théorème suivant fait la lien entre convergence absolue de l'intégrale $\int_I f(x)dx$ et Lebesgue intégrabilité de f sur I.

Théorème 3.7.4 *Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle compact $[a,b] \subset I$ est Riemann intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Lebesgue intégrable sur I.*

(ii) L'intégrale $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, on a

$$\int_I f d\lambda = \int_I f(x)dx \tag{3.25}$$

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii). Si f est Lebesgue intégrable sur I, alors $|f|$ est aussi Lebesgue intégrable sur I et pour tout intervalle $[a, b]$ inclus dans I

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_{[a,b]} |f|\, d\lambda \leq \int_I |f|\, d\lambda < +\infty,$$

d'où il résulte que $\int_I |f(x)|\, dx < \infty$.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Posons $I = (\alpha, \beta)$ et choisisons des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ de points de I tels que

$(a_n)_n$ est décroissante et $a_n \longrightarrow \alpha$

$(b_n)_n$ est croissante et $b_n \longrightarrow \beta$

$a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Posons $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$. Comme f est Riemann intégrable sur $[a_n, b_n]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a_n, b_n]$ et f_n Lebesgue intégrable sur I. Les fonctions $|f_n|$ forment une suite croissante de fonctions Lebesgue intégrables sur I qui converge simplement vers $|f|$. En outre,

$$\int_I |f_n|\, d\lambda = \int_{[a_n,b_n]} |f|\, d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\, dx \leq \int_I |f(x)|\, dx < +\infty,$$

et le théorème de Beppo-Levi prouve que $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur I. Comme on a

$$|f_n| \leq |f|, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1) implique que f est Lebesgue intégrable sur I et que

$$\int_I f d\lambda = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_I f_n d\lambda = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

■

Exemple 3.7.5 *La fonction* $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ *est Lebesgue intégrable sur* $[a, +\infty[$ *(où* $a > 0$*) si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. En effet, la relation

$$\int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

montre que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Il s'ensuit que la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas on a

$$\int_{[a,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} d\lambda(x) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$$

■

Exercice corrigé 3.7.6 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue et bornée sur* $\mathbb{R}$. *Après avoir montré son existence, calculer*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx \tag{3.26}$$

Démonstration. Les fonctions $x \longmapsto f_n(x) = e^{-nx} f(x)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc mesurables. L'application f est bornée donc il existe $M > 0$ telle que

$$\left| e^{-nx} f(x) \right| \leq M.e^{-nx}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \geq 1.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-nx} < \infty$, alors $\int_0^{+\infty} |e^{-nx} f(x) dx| < \infty$ et donc la limite (3.26) existe et par le Théorème 3.7.4 on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx = \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$$

La suite $(f_n)_n$ est convergente vers $f = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$ on a

$$\left| e^{-nx} f(x) dx \right| \leq M.e^{-x} = g(x),$$

et
$$\int_{[0,+\infty[} g d\lambda = \int_0^{+\infty} g(x)dx < \infty.$$
Donc par le théorème de convergence dominée il suit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} f d\lambda = 0$$
■