1.3 Mesure, définition et exemples.

Définition 1.3.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. Une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application :* $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ *telle que:*

1- $\mu(\emptyset) = 0$.

2- Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux-à-deux disjoints (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) alors

$$\mu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n). \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

Définition 1.3.2 *Le triplé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est appelé* ***espace mesuré*** *(espace mesurable + mesure)*

Remarque 1.3.1 *La seconde propriété s'appelle* σ*-additivité. Il s'agit d'une condition assez forte sur les mesures. Cette condition est assez naturelle si l'on comprend la notion de mesure de manière intuitive. En réinterprétant la* σ*-additivité, on peut dire que la longueur d'une réunion (dénombrable) de morceaux disjoints est égale à la somme des longueurs des différents morceaux disjoints. Au fond, c'est la seule chose que l'on demande à une mesure.*

Définition 1.3.3 *Soient* Ω *un ensemble et* $\mathcal{F}$ *une tribu sur* Ω*. On appelle probabilité une mesure* P *sur* Ω *telle que* $P(\Omega) = 1$*: On dit que* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est un espace probabilisé et les éléments de* Ω *sont appelés les événements.*

Exemple 1.3.1 *Il y a deux exemples triviaux sur* $(\Omega, P(\Omega))$*.*

- La mesure nulle μ_0 définie par $\mu_0(A) = 0$ pour tout $A \in P(\Omega)$.

-La mesure triviale μ_t définie par $\mu_t(\emptyset) = 0$ et $\mu_t(A) = +\infty$ si $A \in P(\Omega)$ et est non-vide.

Exemple 1.3.2 - *Mesure de comptage (ou de dénombrement) sur* $(\Omega, P(\Omega))$:

$$\eta(A) = \begin{cases} card\ A & si\ A\ est\ fini. \\ +\infty & sinon \end{cases} \tag{1.3.1}$$

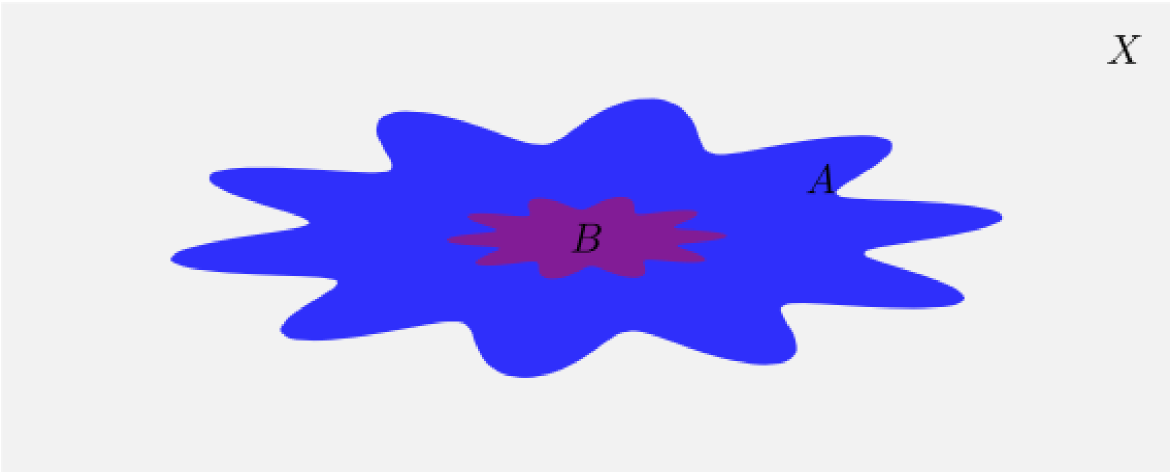
- Mesure de Dirac sur $(\Omega, P(\Omega))$: soit $a \in \Omega$,

$$\eta(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A. \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

1.4 Propriétés des mesures, mesures extérieurs, mesures complètes :

1.4.1 Propriétés des mesures

Proposition 1.4.1 *Soit A, B deux éléments de $\mathcal{F}$ tels que $B \subseteq A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$. De plus, si $\mu(A) < +\infty$ alors $\mu(A) - \mu(B) = \mu(A/B)$*



Ce que nous dit la proposition c'est que la mesure de l'ensemble en rouge est plus petite que celle en bleu et que, si l'ensemble bleu est de mesure finie alors la mesure de l'ensemble bleu est la somme de la mesure de l'ensemble rouge et de la partie en bleu qui n'est pas rougie.

On a bien $A = B \cup (A \backslash B)$.

Remarquons de plus que $B \cap (A \backslash B) = \emptyset$ car $A \backslash B = A \cap B^c \subseteq B^c$ et donc $B \cap (A \backslash B) \subseteq B \cap B^c = \emptyset$.

Ainsi la réunion ci-dessus est disjointe. En appliquant la σ-additivité finie, on a

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \backslash B).$$

Puisque $\mu(A \backslash B) \geq 0$ par définition, $\mu(A) \geq \mu(B)$.

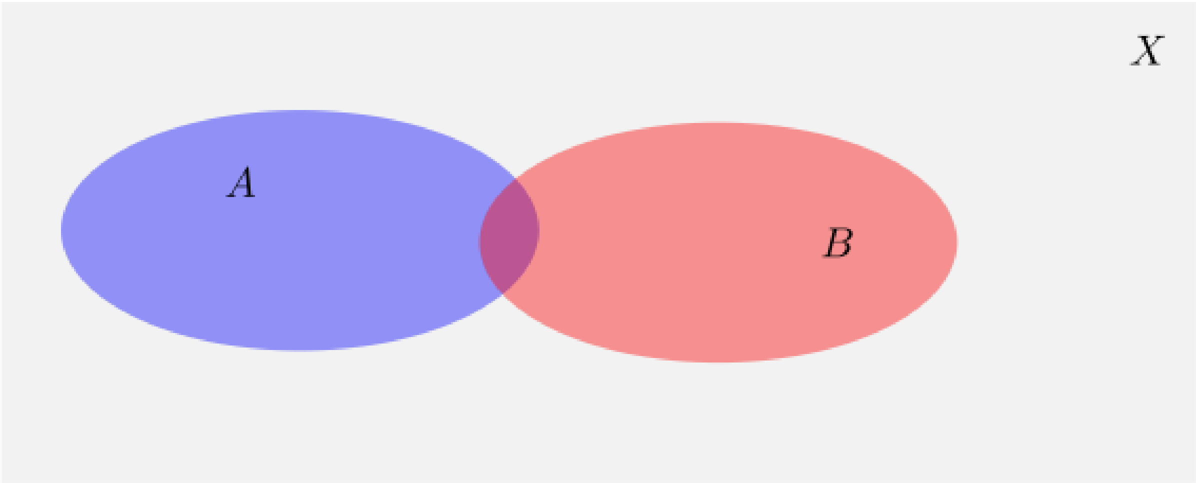
Si de plus $\mu(A)$ est fini alors $\mu(B)$ et $\mu(A\backslash B)$ le sont également (en utilisant ce que l'on vient de faire). Et dans ce cas, on a bien

$$\mu(A) - \mu(B) = \mu(A\backslash B).$$

On remarquera que $\mu(A) - \mu(B)$ ne fait sens que si $\mu(A)$ est fini.

Proposition 1.4.2 *Soit A, B deux éléments de $\mathcal{F}$ alors*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$



La mesure de la partie colorée + la mesure de la partie violette est égale à la mesure de la partie bleu (dont la violette) + la mesure de la partie rouge (dont la violette).

Preuve. Il va s'agir de décomposer $A \cup B$ en sous-ensembles disjoints. On écrit

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup ((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) \\ &= (A \cup (B \cap A)) \cup (B \cap A^c) \quad \text{par distributivité de } \cup \\ &= A \cup (B \cap A^c) \quad \text{car } B \cap A^c \subseteq A^c \end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que ces deux ensembles sont disjoints. Ainsi, par σ-additivité, on a

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \cap A^c)}_{\leq \mu(B)} \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Ainsi, si $\mu(A \cup B) = +\infty$ alors $\mu(A)$ ou $\mu(B)$ est infini et dans ce cas $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = +\infty$ et $\mu(A) + \mu(B) = +\infty$ donc on a bien l'égalité voulue. Si $\mu(A \cup B) < +\infty$

alors, par croissance $\mu(A)$ et $\mu(B)$ sont finis également. Remarquons que l'on a une réunion disjointe:

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

ainsi (puisque $\mu(B)$ est finie) $\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(B \cap A)$. Ainsi, en reprenant l'égalité plus haut, on obtient :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

ou encore

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

■

Proposition 1.4.3 *Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors*

$$\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

Preuve. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\mu(\cup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_n).$$

Si $n = 0$ alors $\mu(\cup_{k=0}^{n} A_k) = \mu(A_0) = \sum_{k=0}^{0} \mu(A_n)$ donc la propriété est vraie.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\mu(\cup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_n) \quad \text{et montrons que } \mu\left(\cup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n+1} \mu(A_n)$$

Si l'on note $B = \cup_{k=0}^{n} A_k$ alors

$$\cup_{k=0}^{n+1} A_k = B \cup A_{n+1}$$

et donc par additivité de μ, on a

$$\mu\left(\cup_{k=0}^{n+1} A_k\right) + \mu(B \cap A_{n+1}) = \mu(B) + \mu(A_{n+1})$$

or $\mu(B) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$ par hypothèse de récurrence donc

$$\mu\left(\cup_{k=0}^{n+1} A_k\right) + \mu(B \cap A_{n+1}) = \mu(B) + \mu(A_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu(A_k)$$

Puisque $\mu(B \cap A_{n+1}) \geq 0$ et donc

$$\mu\left(\cup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n+1} \mu(A_k) - \mu(B \cap A_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n+1} \mu(A_k)$$

Et on conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\cup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k).$$

■

Définition 1.4.1 *On dit qu'une mesure positive μ est finie si elle est à valeurs finies*

c-à-d

$$\mu(A) < \infty \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}.$$

Autrement dit, $\mu(A) < \infty$.

Définition 1.4.2 *Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit qu'elle est σ-finie s'il existe une suite de parties mesurables $(E_n)_{n\geq 1}$ telle que $\Omega = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$.*

Exemple 1.4.1 *1) La mesure de Direc δ_x est finie car $\delta_x(\Omega) = 1 < \infty$.*

2) La mesure de comptage sur Ω est :

i) finie si et seulement si Ω est fini

ii) σ-finie si et seulement si Ω est dénombrable.

Proposition 1.4.4 ***La continuité croissante*** *Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ croissante pour l'inclusion (c'est-à-dire $A_n \subseteq A_{n+1}$ pour $n \geq 1$), alors*

$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve. On va se ramener à la σ-additivité. Posons

$$B_n = \begin{cases} A_1 & \text{si } n = 1, \\ A_n \backslash A_{n-1} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur n que

$$A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k.$$

Le cas $n = 1$ est clair car $A_1 = B_1 = \cup_{k=1}^{1} B_k$.

Supposons que l'on ait pour un $n \geq 1$.

$$A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k \text{ et montrons } A_{n+1} = \cup_{k=1}^{n+1} B_k$$

Puisque A_n est contenu dans A_{n+1},

$$A_{n+1} = A_n \cup \underbrace{(A_{n+1} \backslash A_n)}_{=B_{n+1}} = A_n \cup B_{n+1}.$$

D'ou, par hypothèse de récurrence

$$A_{n+1} = B_{n+1} \cup (\cup_{k=1}^{n} B_k) = \cup_{k=1}^{n+1} B_k.$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k.$$

Maintenant, on montre facilement que $\cup_{k=1}^{+\infty} A_n = \cup_{k=1}^{+\infty} B_k$: une inclusion vient de ce que $B_k \subset A_k$ pour tout k, l'autre de ce que si $x \in \cup_{k=1}^{+\infty} A_n$ alors en notant k le plus petit entier tel que $x \in A_k$ alors on a $x \in B_k$ car $x \notin A_{k-1}$ et donc $x \in \cup_{k=1}^{+\infty} B_k$.

D e plus si $k < l$, alors $B_k \subseteq A_k \subseteq A_{l-1}$. Or $B_l = A_l \backslash A_{l-1}$ donc $B_k \cap B_l = \emptyset$.

Donc les (B_k) sont deux à deux disjoints. Comme les B_k sont disjoints, on a

$$\begin{aligned} \mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\cup_{n=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.5 ***La continuité décroissante*** *Soit* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{F}$ *décroissante pour l'inclusion (c'est-à-dire* $A_{n+1} \subseteq A_n$ *pour* $n \geq 1$*), avec*

$$\mu(A_1) < \infty,$$

alors, on a

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve. Pour tout $n \geq 1$ posons:

$$B_n = \left\{ \begin{array}{cc} A_1 & \text{si } n = 1 \\ A_1 \backslash A_n = A_1 \cap A_n^c & \text{si } n \geq 2 \end{array} \right\}.$$

Comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante, en utilisant la proposition précédente:

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

d'autre part on a

$$\cup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \cap \left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = A_1 \backslash \cap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

il résulte que

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n\right),$$

Enfin, on peut simplifier par $\mu(A_1)$ puisque cette dernière quantité est finie,

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

La condition $\mu(A_1) < \infty$ de la proposition précédente est nécessaire comme le montre l'exemple suivant. ■

Exemple 1.4.2 *Considérons l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), card)$ *et la suite des parties mesurables* $(A_n)_{n\geq 1}$ *telle que*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante,*

$$A_{n+1} = \{n+1, n+2, n+3, ...\} \subset A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

et

$$\mu(A_1) = card(\{1, 2, 3, ...\}) = +\infty$$

Si $x \in \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$ *alors* $x \geq n$ *pour tout* $n \geq 1$. *D'ou* $\mathbb{N}$ *est bornée, ce qui est une contradiction.*

Donc

$$\cap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset.$$

D'autre part

$$0 = \mu\left(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} card(\{n, n+1, n+2, ...\}) = +\infty$$