دائرة العلوم الاقتصادية

السنة الأولى: علـوم اقتصادية

المقياس : **Mathématique**

العلامة من 20

تصحـيح EMD2

التمرين الأول [7.5]

1. النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **3** للدوال المطلوبة، يكون كالآتي:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$ **1**

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$ **1**

$$\left(1+x\right)^x=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)$$ **1**

2. ويكون النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 2 للدوال المطلوبة:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+o\left(x^2\right)$$ **1.5**

$$\ln\left(1-x\ln\left(1+x\right)\right)=-x^2+o\left(x^2\right)$$ **1.5**

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e\left[-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right]+o\left(x^2\right)$$ **1.5**

التمرين الثاني [12.5]

أ) حل المعادلة التفاضلية: $(1)\ \ldots\ldots\ \ y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ **1**

- نوجد الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x)+y(x)=0$ ، الذي هو: $\boxed{y_1=c\cdot e^{-x}}$
- نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}$:

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}$ أي: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-y_0$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على: $c'(x)\cdot e^{-x}-y_0+y_0=x\cdot e^{-x}$ الذي يمكن مكافئته على النحو:

$$c'(x)=x\ \Leftrightarrow\ \frac{dc}{dx}=x\ \Leftrightarrow\ dc=x\cdot dx$$

وبالمرور على المكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية بالشكل: $c(x)=\int dc=\int x\cdot dx=\frac{1}{2}x^2$. **1**

فيكون الحل الخاص للمعادلة المتجانسة: $\boxed{y_0=c_0(x)\cdot e^{-x}=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}}$ **1**

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y=y_1+y_0$ أي : $\boxed{y=c\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}}$

الحل الخاص y_0 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y(0)=1$ أي : $c\cdot e^{-0}+\frac{1}{2}0^2\cdot e^{-0}=c=1$

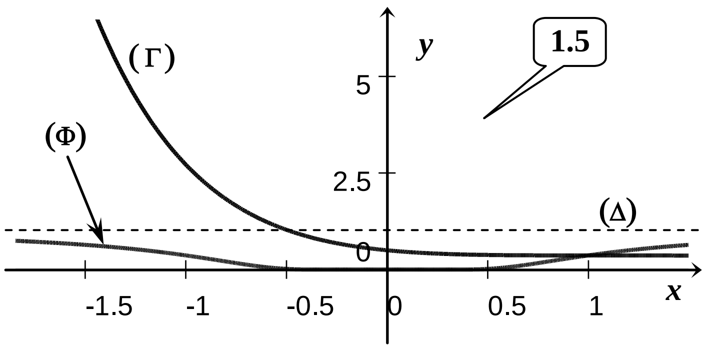
هو : $\boxed{y(0)=f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x}}$ **1**

ب) 1. نلخص دراسة تغيرات الدالة $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}$ المستمرة على مجموعة تعريفها $D_f=]-\infty,+\infty[$ في النقاط الآتية:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)\cdot e^{-x}}{x}=\infty\\ f'(x)=\frac{1}{2}(-x^2+2x-1)\cdot e^{-x}=-\frac{1}{2}(1-x)^2\cdot e^{-x}\end{array}\right\}$$

1.5

$$f'(x)\geq 0,\quad \forall x\in D_f$$



1.5

0.5

2. إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)$ نجدها بالمكاملة بالتجزئة كالآتي:

$$z(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\cdot e^{-x}$$

- باشتقاق الدالة: $z(x)=-\frac{1}{2}(x^2+2x-2c)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x)=\frac{1}{2}(x^2+2c-2)\cdot e^{-x}$

1.5

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $\boxed{z+z'=-(x+1)\cdot e^{-x}}$

جـ) 1. نلخص دراسة تغيرات الدالة الزوجية $g(x)$ على نصف المجال $[0,+\infty[$ في ما يلي:

- $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x\to0^-} e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ **0.5**

2. من المساواة: $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(x)}{x-0}=0$ نستنتج أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر. ولدينا كذلك:

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, & x>0\\ 0\quad, & x=0\end{cases}\quad ، \quad 0\leq g'(x)\quad \forall\, x\geq 0$$

1

- كما أن منحنى $g(x)$ تقبل خط مقارب أفقي معادلته $y=1$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}}=+1\right)$

0.5

3. مما سبق ينتج النشر المحدود من الرتبة الأولى بجوار الصفر للدالة $g(x)$:

$$g(x)=g(0)+g'(0)\cdot x+o(x)$$
$$g(x)=0+0\cdot x+o(x)=0+o(x)$$

1.5