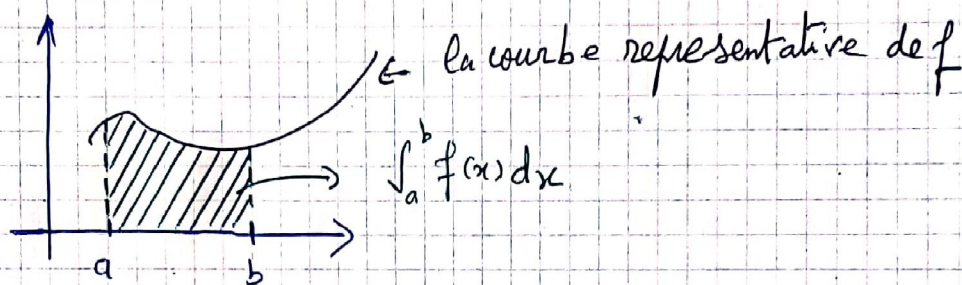


Cours d'analyse 04 N° 14.

Les intégrales multiples :

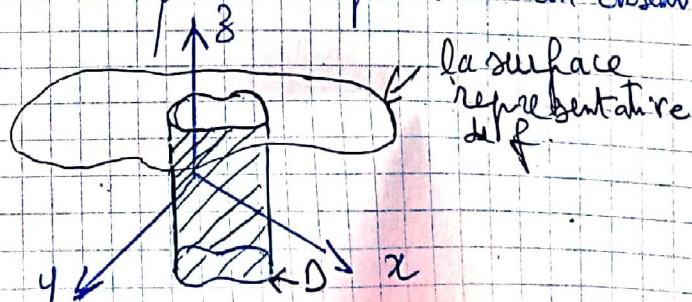
l'intégrale double الكامل الثاني

Motivation : l'intégrale simple d'une fct d'une seule variable nous permet d'évaluer l'aire (مساحة) d'une partie du plan que délimite sa courbe représentative et les axes $x=a$ $y=b$



mais pour une fct à deux variables il s'agit de construire une notion qui permet de mesurer le volume (حجم) d'une partie de l'espace délimité par sa surface représentative (السطح التمثيلي), le plan xoy et un cylindre qui correspond à un ensemble

D borné de $\mathbb{R}^2$



Intégrale sur un rectangle

soit $S = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$. soit f une fonction définie sur S à valeur dans $\mathbb{R}$.

- 1) si f est une fct en escalier, c-à-d il existe une partition de $[a, b] \times [c, d]$ par des subdivisions $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ et $c = t_0 < t_1 < \dots < t_h = d$ telle que f est constante à l'intérieur de chaque rectangle $]s_i, s_{i+1}[\times]t_j, t_{j+1}[$ ($f(x, y) = C_{ij}$)

Def : L'intégrale double de f sur le rectangle $S = [a, b] \times [c, d]$ est définie par :

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \sum_{i,j} C_{ij} (s_{i+1} - s_i) (t_{j+1} - t_j)$$

Remarque :

La valeur de l'intégrale ne dépend pas des valeurs de f sur les bords des petits rectangles.

- 2) si f est bornée sur $[a, b] \times [c, d]$ on approche f par des fct en escaliers.

Def : On dit que f est intégrable sur le rectangle

s'il existe un réel unique I tq pour toutes fonctions en escalier u et v définies sur S tq

$$u(x,y) \leq f(x,y) \leq v(x,y) \text{ on a}$$

$$\iint_S u(x,y) dx dy \leq I \leq \iint_S v(x,y) dx dy.$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe^S des fcts en escalier

$$u_\varepsilon, v_\varepsilon \text{ telles que } u_\varepsilon(x,y) \leq f(x,y) \leq v_\varepsilon(x,y)$$

$$\text{et } 0 \leq \iint_S v_\varepsilon(x,y) dx dy - \iint_S u_\varepsilon(x,y) dx dy \leq \varepsilon$$

le nombre I^S s'appelle l'intégrale double de f sur le rectangle S et on la note $\iint_S f(x,y) dx dy$.

Théorème : si f est continue sur le rectangle S , alors f est intégrable sur S .

Calcul pratique des intégrales doubles

1 Théorème de Fubini : intégrale double sur un pavé

soit f une fct réelle continue sur un pavé (domaine rectangulaire) $S = [a, b] \times [c, d]$ alors

$$\iint_S f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

* En particulier si f se décompose en $f(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ où f et g sont deux fcts à une seule variable continues sur $[a,b]$, $[c,d]$ respect. alors

$$\iint_S f(x,y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \times \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

⚠ Remarque importante : Le choix d'intégrer d'abord par rapport à x ou par rapport à y

dans le théorème de Fubini n'est pas indifférent ça peut amener des calculs plus ou moins longs voire impossibles.

Exemple 01 calculer $\iint_S f(x,y) dx dy$ où

$$S = [0, \pi] \times [0, \pi] \text{ et } f(x,y) = (x+y) (\sin x \sin y)$$

$$\text{on a } \iint_S f(x,y) dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi f(x,y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^\pi (x+y) \sin x \sin y dx \right) dy$$

$$= \int_0^\pi -\sin y \left[(x+y) \cos x - \sin x \right]_0^\pi dy = \int_0^\pi (\pi+y) \sin y + y \sin y dy$$

$$= \int_0^\pi (\pi+2y) \sin y dy = -(\pi+2y) \cos y + 2 \sin y \Big|_0^\pi = 4\pi$$

Remarque dans cet exemple on intègre par rapport à x puis par rapport à y ou bien on intègre par rapport à y puis par rapport à x se fait par le même calcul car d n'est pas différent.

Exemple 22 : calculer $\iint_S f(x,y) dx dy$ où $S = [a,b] \times [a,1]$
 et $f(x,y) = y^x$,

$$\text{on a } \iint_S f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_0^1 y^x dy \right) dx = \int_a^b \frac{1}{x+1} y^{x+1} \Big|_0^1 dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{x+1} - 0 \right) dx = \ln|x+1| \Big|_a^b = \ln \left| \frac{b+1}{a+1} \right|$$

ou bien $\iint_S f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_a^b y^x dx \right) dy$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\ln y} e^{x \ln y} \Big|_a^b dy = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy = \text{???!!}$$

et le calcul de la dernière intégrale ne peut pas se faire à l'aide des primitives.

donc dans cet exemple si on ~~com~~ intègre d'abord par rapport à y puis par rapport à x le calcul se fait facilement mais $\triangle$ si on intègre d'abord par rapport à x puis par rapport à y on arrive à rien et le calcul n'est pas faisable!!

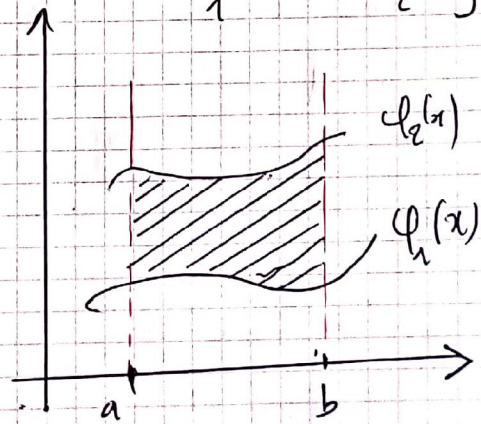
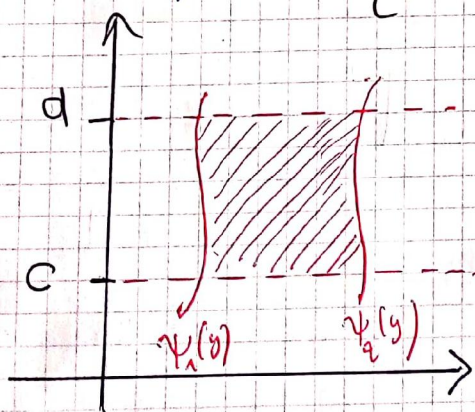
c'est pour ça on a dit que le choix d'intégrer par rapport à x puis à y ou à y puis à x est indifférent.

2. Intégrale double sur une aire plane :

Def : on appelle compact élémentaire une partie D de $\mathbb{R}^2$ pouvant être défini par :

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

ou bien par $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$



où $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont continues sur $[a, b], [c, d]$ respectivement.

théorème de Fubini : soit D un compact élémentaire
 tq $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
 soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fct continue sur D alors
 f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

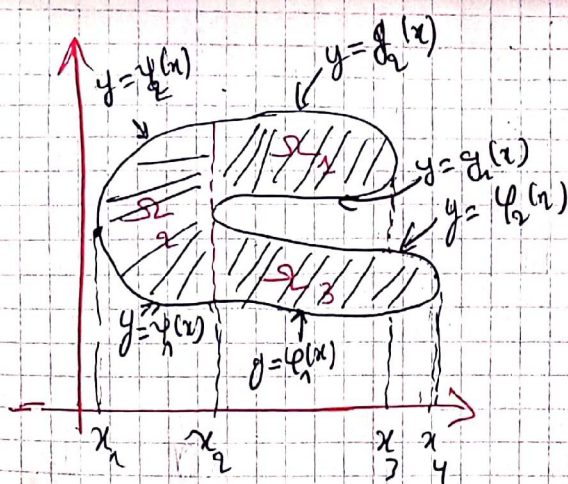
Remarque si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Remarque le calcul d'une intégrale double est ramené aux calculs successifs des deux intégrales simples.

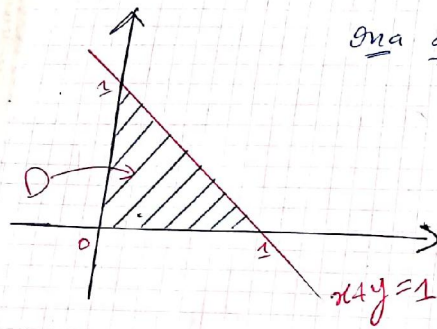
Remarque : si on intègre sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un compact élémentaire on sera amené à se découper le domaine Ω en des compacts élémentaire.



$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Also}} \quad \iint_D f(x,y) dx dy &= \iint_{S_1} f(x,y) dx dy + \iint_{S_2} f(x,y) dx dy \\
 &\quad + \iint_{S_3} f(x,y) dx dy \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{p_1(x)}^{q_1(x)} f(x,y) dy \right) dx + \int_{x_2}^{x_4} \left(\int_{p_2(x)}^{q_2(x)} f(x,y) dy \right) dx \\
 &\quad + \int_{x_2}^{x_3} \left(\int_{p_1(x)}^{q_1(x)} f(x,y) dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

Example: Calculate $\iint_D f(x,y) dx dy$ on

$$f(x,y) = x^2 y^2, \quad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad x+y \leq 1 \right\}$$



$$\begin{aligned} \underline{\text{ona}} \quad \underline{\text{along}} \quad \iint f(x,y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y) \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{ona}} \quad \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y) \, dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3} (1-x)^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{ou bien}} \quad \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x^2 + y^2) \, dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right) \Big|_0^{1-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} (1-y)^3 + y^2 (1-y) \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} (1-y)^3 + y^2 - y^3 \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{12} (1-y)^4 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

propriétés élémentaires de l'intégrale double

1) propriété 1 : soient f, g deux fonctions intégrables sur Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

on a
$$\iint_{\Omega} (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$$

(la linéarité de l'intégrale double)

2) propriété 2 : si f est intégrable sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

(la valeur de l'intégrale ne dépend pas des valeurs de f sur le bord de Ω).

3) propriété 3 : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ou bien ou bien l'aire de $(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ est 0

Alors si f est intégrable sur Ω on a donc

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dx dy$$

4) propriété 4 soit f, g deux fcts
intégrable sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. on a :

or si $g(x,y) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$ alors

$$\iint_{\Omega} g(x,y) dx dy \leq \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy.$$

$$\text{***} \quad \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \leq A(\Omega) \cdot \sup_{(x,y) \in \Omega} |f(x,y)|$$

où $A(\Omega)$ est l'aire de Ω .

$$\text{***} \quad \left| \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x,y)| dx dy.$$

$$\text{***} \quad 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \quad \text{alors} \quad \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \geq 0$$

$$\text{****} \quad \text{si } \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \quad \text{et } f \geq 0 \quad \text{alors}$$

$$\iint_{\Omega_1} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\Omega_2} f(x,y) dx dy.$$

5. propriété or : l'aire d'un compact élémentaire Ω de $\mathbb{R}^2$ est l'intégrale double sur Ω de la fct égale 1 sur Ω i.e $A(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy$

$$\text{***} \quad \text{si } A(\Omega) = 0 \quad \text{alors} \quad \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = 0.$$

Changement de variables :

soit D et Δ deux ensembles réguliers de $\mathbb{R}^2$
(réguliers ici elle est au sens où on peut définir une intégrale double). on notera (x, y) les pts de D et (u, v) les pts de Δ .

Déf : On désignera par changement de variable de Δ sur D toute application $\Phi: \Delta \longrightarrow D$
 $(u, v) \longmapsto \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \end{pmatrix}$

Tel que :

- 1) Φ est bijective de Δ sur D
- 2) α, β sont de classe C^1 sur Δ
- 3) si on écrit u, v en fonction de $(x, y) \in D$ à l'aide de Φ^{-1} , on obtient encore une fct de classe C^1 sur D

Remarque : on s'attachera surtout dans la pratique à vérifier les deux premiers points de la définition précédente

Rappel : on rappelle que $J\Phi$ est la matrice jacobienne de Φ c-à-d. $J\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{pmatrix}$

et $\det J\Phi$ est le déterminant de la matrice jacobienne

c-à-d. $\det J\Phi = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} \right)(u, v).$

Théorème: soit Δ, D deux ensembles bornés réguliers de $\mathbb{R}^2$, soit $\Phi: \Delta \rightarrow D$ un changement de variable de Δ sur D . On suppose que la fct $\det J\Phi$ reste bornée sur Δ .

On suppose que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fct continue sur $D = \Phi(\Delta)$ alors la fct

$(u, v) \mapsto f \circ \Phi(u, v)$ est intégrable sur Δ et on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) |\det J\Phi(u, v)| du dv.$$

Cas particulier coordonnées polaires.

Si le domaine ou la fonction est en $x^2 + y^2$, le calcul d'intégrale est souvent plus facile en passant en coordonnées polaires via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ définie par:

$$\Phi: \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \mapsto \Phi(r, \theta) = (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

on a $\det J\Phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$

donc $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi(\Delta)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$

Remarque : On cherche en général à trouver un changement de variables qui simplifie les calculs à effectuer, et on est souvent guidé pour cela par la géométrie des ensembles d'intégration, et cela n'est pas toujours évident.

Il est inutile d'utiliser un changement de variables qui tient compte la forme du domaine (en simplifiant les bornes d'intégration) mais qui complique la fonction à intégrer.

Exemple : soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

Calculer $\iint_D \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2 + \cos(x^2 + y^2)} dx dy$.

on pose $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow r \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi]$

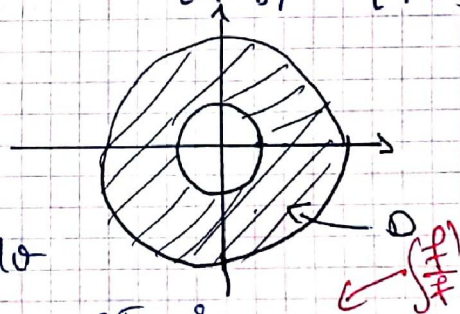
Alors $\iint_D f(x, y) dx dy$

$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{\sin r^2}{2 + \cos r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{-2r \sin r^2}{2 + \cos r^2} dr \right) d\theta$

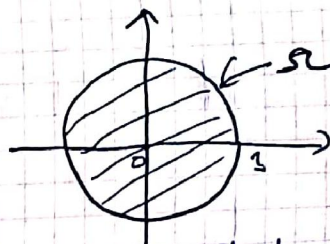
$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \ln |2 + \cos r^2| \Big|_1^2 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \cos 4}{2 + \cos 1} \right| \right) d\theta$

$= -\pi \ln \left| \frac{2 + \cos 4}{2 + \cos 1} \right|$



Exemple 02 : calculer $\iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$ où

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$



en passant au coordonnées polaires

$$\text{on obtient } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \cdot r \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right)$$

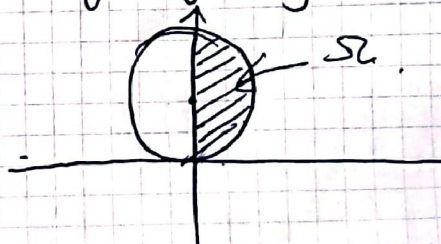
$$= \left(\frac{1}{6} r^3 \Big|_0^1 \right) \times \int_0^{2\pi} (\cos \cdot \sin)^2 d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 4\theta) \right] d\theta$$

$$\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)} = \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} 1 - \cos 4\theta d\theta = \frac{\pi}{24}$$

Exemple 03 : calculer $\iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$$



$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

en passant au coordonnées polaires

$$\text{on a pour } r > 0, x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \Rightarrow r^2 - 2r \sin \theta \leq 0 \Rightarrow r(r - 2 \sin \theta) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \quad \text{donc } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy =$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr \right) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{2 \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{16}{4} \sin^4 \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}) d\theta = \frac{3\pi}{4}$$