Notes de cours
TOPOLOGIE
$2^{ème}$ année Licence Mathématiques (LMD)

BENBACHIR Maamar
Maître de conférences

Table des matières

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 Introduction

La topologie est une branche des mathématiques qui étudie les déformations spatiales par des transformations continues, elle est définie comme étant une branche de la géométrie qui cherche les propriétés des êtres géométriques subsistants après une déformation continue, d'ailleurs quelconque,(sans arrachages ni recollement des structures) en d'autres termes la topologie est définit comme étant la géométrie qui étudie les propriétés géométriques qui ne dépendent pas des variations du volume et de la forme.

Le mot TOPOLOGIE est formé de de mots grecs *topos* et *logos* qui signifient "lieu" et "étude" la traduction littéraire directe du mot topologie sera "étude du lieu". En terme mathématique plus moderne le mot lieu est remplacé par "espace". Une ancienne dénomination de la topologie fut *"analysis situs" :* l'étude du lieu.

le mot Logie signifie science, donc la topologie est la science qui étudie les espaces, plus précisément elle s'intéresse aux espace topologiques à travers les applications qui les lient. Le concept central en topologie est la notion de limite et par la suite la continuité. La continuité d'une fonction dépend définitivement de la topologie.

La topologie est presque partout présente en mathématiques, on en distingue :

1. Topologie générale qui étudie les notions fondamentales de la topologie
2. Topologie algébrique, l'idée principale de la topologie algébrique consiste à associer à différents espaces des invariants de manière à pouvoir les classifier.
3. Géométrie différentielle qui étudie les variétés différentielles ainsi que leurs prolongements dans les espaces euclidiens.

1.2 Aperçu historique

Depuis le 19^{eme} siècle, la topologie est devenue une branche autonome des mathématiques, d'ont l'influence apparaît dans la plus part des autres branches. Les notions de limites et de continuité datent de l'antiquité. La conception actuelle de la topologie est due à Riemann, lequel fournit un programme d'étude et trouve les premiers résultats de topologie algébrique. Les définitions de point d'accumulation, d'ouvert de fermé ont été données par G. Cantor. Initialement limitée aux ensembles de points, la topologie s'applique bientôt aux ensembles de fonctions (Analyse Fonctionnelle), le langage géométrique (points, boules, voisinages) rend de nombreux résultats intuitif. En définissant les espaces métriques en 1906, Fréchet crée un outil commode pour l'étude des espaces fonctionnels. F. Hausdorff définit axiomatiquement la topologie générale en 1914, comme son nom l'indique, elle permet l'étude des espaces topologiques les plus généraux, non nécessairement métrisables. En 1937 H. Cartan introduit la notion de filtre, étendant la notion de limite à des espaces non topologiques. En cette même année, A. Weil définit les espaces uniformes permettant l'étude des espaces fonctionnels non métrisables. Vers 1920, les besoins de l'analyse fonctionnelle ont conduit à la création des espaces vectoriels normés par S. Banach et H. Hahn et plus généralement les espaces vectoriels topologiques. La définition des espaces localement convexes a été donnée J.Von Neumann en 1935. Enfin, la théorie des déformations, étudiée initialement par H. Poincaré est à l'origine de la topologie algébrique et de la topologie différentielle, disciplines qui font l'objet de nombreux travaux contemporains.

Chapitre 2

Topologie usuelle réelle

2.1 Rappels

$(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

Toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ admet des majorants dont le plus petit s'appelle : borne supérieure. Il est possible que $\sup A$ n'appartienne pas à A. Les deux propriétés suivantes importantes caractérisent $\sup A$:

1. $\forall x \in A, x \leq \sup A$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / \sup A - \varepsilon < x \leq \sup A$.

De même, toute partie non vide et minorée B de $\mathbb{R}$ admet des minorants dont le plus grand s'appelle : borne inférieure. Elle vérifie :

1. $\forall x \in B, \inf B \leq x$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in B / \inf B \leq x < \inf B + \varepsilon$.

Une partie A de $\mathbb{R}$ sera dite bornée si elle est majorée et minorée à la fois.

$\mathbb{R}$ est un corps Archimédien : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}/an \geq b$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (dans $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$) : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}/a < b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}/a \leq q \leq b$.

Définition 2.1 *Soient a et r deux nombres réels tels que $r > 0$. On appelle intervalle ouvert (respectivement fermé) de centre a et de rayon r, le sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ constitue des éléments x de $\mathbb{R}$ vérifiant : $a - r < x < a + r$ (respectivement $a - r \leq x \leq a + r$).*

Proposition 2.1 *Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle possède la propriété suivante : $\forall a \in I, \forall b \in I/a < b \Rightarrow [a, b] \in I$.*

Preuve 2.1 *La condition est nécessaire (exercice).*

La condition est suffisante.

On distingue quatre cas :

1. *I n'est ni majoré ni minoré, alors $\forall x \in \mathbb{R} \exists a, b \in I/a < x < b$ et comme $[a, b] \subset I \Rightarrow x \in I$ donc $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.*
2. *I est majoré mais non minoré, dans ce cas I admet une borne supérieure $c = \sup I$, donc $\forall x \in \mathbb{R}/x < c, \exists a, b \in I : a < x < b < c$. Or $[a, b] \in I$, donc $x \in I$ et ceci implique que $I =]-\infty, c]$ ou $I =]-\infty, c[$.*

3. *I est minoré mais non majoré : le raisonnement est analogue au précédent.*
4. *I est borné, alors $\exists c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c = \sup I, d = \inf I$. On montre que I est l'intervalle d'origine d et d'extrémité c. En effet $\forall x \in]d, c[, \exists a, b \in I$ tels que $d \leq a < x < b \leq c$ (par définition de c et d). Mais $[a, b] \subset I$ (par hypothèse) donc $x \in I$. alors $I = [d, c]$ ou $I =]d, c[$.*

Remarque 2.1 *Le nombre $b - a$ est appelé longueur de l'intervalle (a, b).*

2.2 Ensembles ouverts

Définition 2.2 *On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est ouvert, s'il vérifie la propriété suivante :*

A est ouvert si et seulement si $A = \phi$ ou $\forall x \in A\ \exists I_x$ tel que $x \in I_x \subset A$. (I_x désigne un intervalle ouvert).

Propriétés

1. Tout intervalle ouvert est un ensemble ouvert (la réciproque est fausse)
2. $\mathbb{R}$ est ouvert.

Exemple 2.1

1. *$A =]-1, 1[\cup]2, 3[$ est un ensemble ouvert.*
2. *$A = \{1\}$ n'est pas ouvert. D'une manière générale toute partie finie de $\mathbb{R}$ n'est pas ouverte (car elle ne peut contenir un intervalle ouvert).*
3. *$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ ne sont pas ouverts.*

Proposition 2.2 *Pour qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ soit ouvert, il faut et il suffit qu'il soit réunion d'intervalles ouverts.*

Preuve 2.2 *La condition est suffisante (facile).*

La condition est nécessaire : En effet si A est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}$, alors : $\forall x \in A,\ \exists I_x$ tel que $x \in I_x \subset A$, on en déduit que $A \subset \underset{x\in A}{U} I_x \subset A$ d'ou $A = \underset{x\in A}{U} I_x$.

Définition 2.3 *On appelle topologie usuelle de $\mathbb{R}$ la famille de ses parties ouvertes. Autrement dit, la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la sous-famille τ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ constituée de l'ensemble vide et de toutes les réunions d'intervalles ouverts. Le couple $(\mathbb{R}, \tau)$ s'appelle espace topologique, on le note par $(\mathbb{R}, |.|)$.*

Propriétés

La topologie ci-dessus possède les propriétés suivantes :
P_1 : $\mathbb{R}$ et ϕ appartiennent à τ.
p_2 : τ est stable par la réunion (finie ou infinie).
p_3 : τ est stable par l'intersection finie.

En effet P_1 est évidente grâce à la définition d'un ouvert. p_2 trouve sa justification dans le fait que toute réunion d'ensembles dont chacun est réunion d'intervalles ouverts, est elle même réunion de tous ces intervalles ouverts :

$$\underset{\alpha\in M}{\cup} A_\alpha = \underset{\alpha\in M}{\cup}\big(\underset{\beta\in L}{\cup} I_{\alpha,\beta}\big) = \underset{(\alpha,\beta)\in M\times L}{\cup} I_{\alpha,\beta}$$

où $(A_\alpha)_{\alpha\in M}$ est une famille d'éléments de τ et $(I_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in M\times L}$ sont des intervalles ouverts.

On raisonne de la même manière pour p_3.

Si A et B sont deux éléments de τ, on peut écrire :

$$A = \underset{\alpha\in M}{\cup} I_\alpha, \quad B = \underset{\beta\in L}{\cup} I_\beta$$

d'ou

$$\begin{aligned} A\cap B &= (\underset{\alpha\in M}{\cup} I_\alpha) \cap (\underset{\beta\in L}{\cup} I_\beta) \\ &= \underset{(\alpha,\beta)\in M\times L}{\cup} (I_\alpha \cap I_\beta) \end{aligned}$$

or $I_\alpha \cap I_\beta$ est vide ou il est un intervalle ouvert. Donc $A\cap B \in \tau$.

Remarque 2.2 *L'intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte : soient les suites d'ouverts*

$$A_n =]2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}[, n\in\mathbb{N}^*.$$
$$B_n =]0, 3+\frac{1}{n}[, n\in\mathbb{N}^*.$$

On a $\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} A_n = \{2\}$, $\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} B_n =]0,3]$ *qui ne sont pas ouverts.*

2.3 Ensembles fermés

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

Exemple 2.2 *Tout singleton de $\mathbb{R}$ est fermé. D'une manière générale, tout ensemble fini de $\mathbb{R}$ est fermé.*

Tout intervalle fermé est un sous-ensemble fermé. En effet si a et b sont dans $\mathbb{R}$ tels que $a<b$, alors $C_{\mathbb{R}}^{[a,b]} =]-\infty, a[\cup]b,+\infty[$.

Remarquons que la réciproque est fausse (voir exemple précédent).

Exemple 2.3 *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés puisque $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} = (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}]n,n+1[\cup]-\infty,0[)$, $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup}]n,n+1[$.*

$\mathbb{Q}, C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}, [a,b[$ et $]a,b]$ avec $a<b$ ne sont pas fermés.

$\mathbb{R}$ et ϕ sont fermés.

Remarque 2.3
1. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut-être ni fermé ni ouvert.*
2. *Il n'y a que $\mathbb{R}$ et ϕ qui sont ouverts et fermés à la fois dans $\mathbb{R}$.*
3. *La topologie τ possède les propriétés suivantes :*
   P_1' : $\mathbb{R}$ et ϕ sont fermés.
   P_2' : Toute réunion finie de fermés et fermé.
   P_3' : Toute intersection (finie ou non) de fermés est fermée.
4. *Une réunion infinie de fermés de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement fermée*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, A_n = [1, 2-\frac{1}{n}]$$

est fermé, mais

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty}([1,2-\frac{1}{n}]) = [1,2[,$$

n'est pas fermé.

2.4 Voisinages

Définition 2.4 *On appelle voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$, tout sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ contenant un ouvert Ω lequel contient x. On désigne la famille de voisinage de x par $V_{(x)}$. Elle n'est jamais vide (elle contient au moins $\mathbb{R}$). On écrit*

$$V \in V_{(x)} \iff \exists \Omega \in \tau / x \in \Omega \subset V.$$

Exemple 2.4

1. *$A = \{1, 2\}$ n'est pas un voisinage de 1, ni de 2 car il ne peut contenir aucun ouvert.*
2. *$A = \{1, 2\} \cup]3, 4[$ est voisinage de tous les points x tels que $3 < x < 4$.*
3. *Tout intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points. Pourquoi ?*

Remarque 2.4 *La définition précédente de voisinage peut prendre la forme simple suivante :*

$$V \in V_{(x)} \iff \exists r > 0 /]x - r, x + r[\subset V.$$

Proposition 2.3 *Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ est ouvert, si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve 2.3 *La définition (2.4) rend la condition nécessaire évidente.*
Inversement la condition est aussi suffisante, car ce sous-ensemble serait réunion d'intervalles ouverts, donc il est ouvert.

Proposition 2.4

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y) \exists V \in V_{(x)}, W \in V_{(y)} / V \cap W = \phi$$

On dit que $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace séparé.

Preuve 2.4 *Sans perte de généralité, on peut considérer $x < y$.*
$W =]z, +\infty[$, $V =] - \infty, z[$ où $z \in]x, y[$.

2.5 Points d'accumulations et points isolés

Définition 2.5 *Soient A une partie non vide de $(\mathbb{R}, |.|)$ et x_0 un point quelconque de $(\mathbb{R}, |.|)$. On dit que x_0 est un point d'accumulation de A, si tout voisinage de x_0 contient au moins un point de A (différent de x_0 si $x_0 \in A$). Autrement dit :*

$$x_0 \text{ est un point d'accumulation de } A \Leftrightarrow \forall V \in V_{(x_0)} / \; V \backslash \{x_0\} \cap A \neq \phi$$

Exemple 2.5 *Vérifier la véracité de ces affirmations :*

1. *$A = [-2, 4]$ tout point de A est un point d'accumulation.*
2. *$A =] - 2, 4[$ tout point de $[-2, 4]$ est un point d'accumulation.*
3. *$A =]a, +\infty[$ l'ensemble des points d'accumulation de A est $[a, +\infty[$.*
4. *$A = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{0\}$ $x = 0$ est le seul point d'accumulation de A.*

5. $A = \{1, 2\}$ *l'ensemble des points d'accumulation est vide.*
6. $A = \mathbb{N}$ *l'ensemble des points d'accumulation de* A *est vide.*

Il est important de remarquer que les points d'accumulations d'un ensemble n'appartiennent pas nécessairement à cet ensemble, comme on le voit dans les exemples (2) et (3).

Il existe, naturellement, des parties de $\mathbb{R}$ qui ne possèdent aucun point d'accumulation. C'est le cas par exemple des parties finies.

Proposition 2.5 *un point* x *de* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un point d'accumulation d'un sous-ensemble* A*, si et seulement si tout voisinage de* x *rencontre* A *en une infinité de points.*

Preuve 2.5 *La condition nécessaire est évidente.*

Pour la condition suffisante : Soit V *un voisinage de* x*. Nous pouvons poser* $V =]a, b[$ *sans restreindre la généralité. Supposons que* $]a, b[\cap A = \{y_1, y_2, .., y_p\}$ *c-à-d un ensemble fini et posons :* $\acute{a} = \max\limits_{1 \leq i \leq p} \{y_i / y_i < x\}$, $\acute{b} = \min\limits_{1 \leq i \leq p} \{y_i / y_i > x\}$*. Il vient que* $x \in]\acute{a}, \acute{b}[$ *et* $]\acute{a}, \acute{b}[\cap A = \phi$*, ce qui contredit le fait que* x *est un point d'accumulation.*

Attention, une partie infinie peut ne pas avoir de points d'accumulations comme par exemple $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$. La notion de point d'accumulation permet d'avoir la caractérisation importante suivante des fermés dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

Proposition 2.6 *Un sous ensemble* A *de* $\mathbb{R}$ *est fermé, si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulations.*

Preuve 2.6 $\Rightarrow$ *Soit* A *un ensemble fermé et* $x \in C_{\mathbb{R}}^{A}$*. Comme* $C_{\mathbb{R}}^{A}$ *est ouvert, il existe un voisinage de* x *et qui ne rencontre pas* A*. Donc* x *ne peut pas être un point d'accumulation.*

$\Leftarrow$ *Si* A *est qu'aucun point de* $C_{\mathbb{R}}^{A}$ *ne lui est d'accumulation, il existerait, pour chaque point de* $C_{\mathbb{R}}^{A}$ *un voisinage qui ne rencontre pas* A*. Ce voisinage serait inclus dans* $C_{\mathbb{R}}^{A}$*, lequel deviendrait voisinage de tous ses points, donc un ouvert. Il en résulte que* A *est fermé.*

Définition 2.6 *Soit* x *un point de* $A \subset \mathbb{R}$*. On appelle point isolé de* A*, tout point de* A *possédant un voisinage qui ne rencontre* A *qu'en ce point. On écrit :*

$$x \text{ est un point isolé de } A \Leftrightarrow \exists V \in V_{(x)} / V \cap A = \{x\}.$$

Exemple 2.6

1. *Tout point de* $A = \{-1, 0, 1\}$ *est isolé. Il est relativement facile de voir que, d'une manière générale, tout point d'une partie finie de* $\mathbb{R}$ *est isolé.*
2. $A = [0, 4] \cup \{6\}$ *ne possède qu'un seul point isolé* $x_0 = 6$*.*
3. $A = [0, 4]$ *n'a pas de point isolé.*
4. *Tous les points de* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *sont isolés.*

2.6 Théorèmes fondamentaux

Théorème 2.1 (Principe de Cantor) *Supposons qu'a tout entier naturel n, on associe un intervalle fermé $I_n = [a_n, b_n]$ tel que pour tout n : $I_{n+1} \subset I_n$ alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} I_n \neq \phi$.*

Preuve 2.7 *Considérons les deux ensembles suivants : $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ et $B = \{b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$, comme $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on constate que chaque $a_n \in A$ est un minorant de B et chaque $b_n \in B$ est un majorant de A. Il en résulte que :*

$$a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi l'intervalle $[\sup A, \inf B]$ (qui peut se réduire à un point) est contenu dans chaque I_n, donc dans leur intersection.

Remarque 2.5 *Si on remplace les intervalles fermés par des intervalles ouverts ou semi-ouverts, la conclusion du théorème est fausse. Soit $I_n =]1, 1 + \frac{1}{n+1}[$, alors $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, mais $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} I_n = \phi$.*

Le théorème suivant donne le cadre dans lequel l'intersection non vide intervenue dans le principe de Cantor se réduit à un point.

Théorème 2.2 *L'intersection d'une suite S d'intervalles fermés emboîtés est réduite à un seul point si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe dans la suite S un intervalle $[a, b]$ de longueur $b - a < \varepsilon$.*

Preuve Exercice.

Lemme 2.1 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve 2.8 *Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. On a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon,$$

Si l'on fixe $q \geq n_0$, on constate que les valeurs prises par x_n sont $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ et des points de l'intervalle $]x_{n_0} - \varepsilon, x_{n_0} + \varepsilon[$. La suite $(x_n)_n$ est donc bornée.

Théorème 2.3 *Toute suite de Cauchy est convergente dans $(\mathbb{R}, |.|)$.*

Preuve Exercice.

Remarque 2.6 $(\mathbb{R}, |.|)$ *possédant la propriété exprimée dans le théorème précédent est dit espace complet.*

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Théorème 2.4 (de Bolzano-Weirstrass) *Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente.*

Preuve Exercice

Théorème 2.5 *Tout ensemble A de $\mathbb{R}$, infini et borné admet au moins un point d'accumulation.*

Preuve Exercice.

Chapitre 3

Espaces métriques

3.1 Distance et espace métrique

Définition 3.1 *Soit E un ensemble quelconque. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :*
$d_1 : \forall x, y \in E; d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$
$d_2 : \forall x, y \in E; d(x, y) = d(y, x).$
$d_1 : \forall x, y, z \in E; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Définition 3.2 *Un espace métrique (E, d) est un ensemble E muni d'une distance d.*

Corollaire 3.1 *Soit (E, d) un espace métrique, alors*

1. $\forall x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in E \Rightarrow d(x_1, x_{1+n}) \leq \sum_{i=1}^{i=n} d(x_i, x_{i+1}).$
2. $\forall x, y, z \in E : |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$

Exemple 3.1 *Les applications suivantes sont des distances sur l'ensemble cité :*

1. *Sur $\mathbb{R}$, on défint la distance suivante :*
$$d(x, y) = |x - y|$$
2. *La distance discrète sur un ensemble E est définie par :*
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \ si \ x = y \\ 1 \ si \ x \neq y. \end{cases}$$
3. *Sur $\mathbb{C}$, l'application $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ définit une distance.*
4. *Sur $\mathbb{R}^n$ on défint les distances suivantes :*
$$d_1(x, y) = \sum_{i=0}^{i=n} |x_i - y_i|, d_2(x, y) = (\sum_{i=0}^{i=n} (x_i - y_i)^2)^{1/2}, d_\infty(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$
5. *Sur l'ensemble $E = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue}\}$ on définit la distance*
$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

6. *Sur* $E = l_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*; } x_n \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{n} x_k^2 < +\infty\}$, *on définit la distance*

$$d(x,y) = (\sum_{n\geq 0}(x_n - y_n)^2)^{1/2}.$$

7. *Sur* $\mathbb{R}^n$, *on définit la distance suivante :*

$$d_\alpha(x,y) = \left(\sum_{i=0}^{i=n}(|x_i - y_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}, \alpha > 1$$

8. *Les espaces vectoriels normés fournissent des exemples très important d'espaces métriques.*

3.1.1 Espace vectoriel normé

3.1.2 Norme

Définition 3.3 *Soit* E *un espace vectoriel sur le corps de nombres réels ou sur le corps de nombres complexes. On appelle norme sur* E *une application de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *notée* $x \longrightarrow \|x\|$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,
2. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Définition 3.4 *Le nombre réel positif* $\|x\|$ *s'appelle norme du vecteur* x.

Définition 3.5 *L'application* $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \longmapsto \|x - y\|$ *est une distance sur* E.

Remarque 3.1 *La distance associée à une norme possède les deux propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y)$,
2. $\forall x, y, z \in E : d(x + z, y + z) = d(x,y)$.

Exemple 3.2 *Soit* $\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels considéré comme espace vectoriel sur lui même, l'application* $|.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto |x|$ *est une norme.*

De même l'application $|.| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : z \longmapsto |z|$ *est une norme.*

L'application :

$$\|.\| : \mathbb{R}^n(resp.\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/P}$$

tel que $p > 1$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$*(Resp.* $\mathbb{C}^n$*), en particulier :les applications*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \; \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq\leq n} |x_i|$$

sont des normes.

Exemple 3.3 *Soit* $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. *Les applications :*

$$f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$
$$f \longmapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx},$$
$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|\,,$$

sont des normes sur E.

Définition 3.6 *On appelle espace vectoriel normé, un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$) *muni d'une norme.*

La distance associée à cette norme fait de E un espace topologique.

3.1.3 Boule ouverte et boule fermée

Soient (E, d) un espace métrique et c un point de E. Soit r un réel positif.

Définition 3.7 *On appelle boule ouverte de centre* c *et de rayon* r *l'ensemble de* E *défini par :(resp.)*

$$B(c, r) = \{x \in E/d(c, x) < r\}$$

Définition 3.8 *On appelle boule fermée de centre* c *et de rayon* r *l'ensemble de* E *défini par :(resp. fermée)*

$$\bar{B}(c, r) = \{x \in E/d(c, x) \leq r\}$$

Définition 3.9 *L'ensemble* $B(c, r) = \{x \in E/d(c, x) = r\}$ *définit une sphère de centre* c *et de rayon* r.

Ensemble ouvert et ensemble fermé

Définition 3.10 *Soit*(E, d) *un espace métrique et* A *une partie de* E . *On dit que* A *est un ouverte de* (E, d) *si pour tout* $a \in A$ *il existe* $r > 0$ *tel que* $B(a, r) \subset A$. *On dit que* A *est un fermé de* (E, d) *si son complémentaire* C_E^A *est un ouvert de* (E, d). *En particulier* $\emptyset$ *est à la fois un ouvert et un fermé de* (E, d).

Proposition 3.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1. E *est un ouvert.*
2. *Si pour tout* $i \in I$, O_i *est un ouvert, alors* $\cup_{i\in I} O_i$ *est encore un ouvert.*
3. *Si* $O_1,\cdots, O_n$ *sont des ouverts, alors* $\cap_{p=1}^n O_p$*est encore un ouvert.*

Preuve 3.1 *Contentons nous de prouver le cas de l'intersection. Les deux autres cas sont absoluments triviaux. Soit* $n \in IN$. *On considère une famille de* n*ensembles ouverts* (O_i) $i = 1, ..., n$.*Soit* a *un point dans l'intersection de ces* n *ensembles.* a *est donc un point de chacun de ces ouverts. On peut alors trouver, pour tout* $i = 1, .., n$ *un réel* r_i *tel que la boule de centre* a *et de rayon* r_i *soit incluse dans* O_i. *Posons* $r = inf\,\{r_i; i = 1, ..., n\}$. *La boule* $B(a, r)$ *est alors contenue dans chacun des* O_i *et on a ainsi trouvé une boule ouverte centrée en* a *et contenue dans l'intersection des* O_i. *Cette intersection est donc bien ouverte.*

par passage au complémentaire on a

Proposition 3.2 *Soit (E , d) un espa ce métrique.*

1. *E est fermé*
2. *Si pour tout $i \in I$, $F_i$est un fermé, alors $\cap_{i\in I}F_i$ est encore un fermé.*
3. *Si $F_1,\cdots, F_n$ sont des fermés, alors $\cup_{p=1}^{n}F_p$ est encore un fermé.*

Définition 3.11 *Soit (E, d) un espace métrique. L'ensemble O de tous les ouverts de E s'appelle la topologie de (E, d).*

Définition 3.12 *Définition Soit $V \in P(E)$ et $x \in E$. On dira que V est un voisinage de x s'il existe un ouvert O de E tel que x soit élément de O et O soit inclus dans V.*

Notation On notera $V_{(x)}$ l'ensemble de tous les voisinage de x.

Proposition 3.3 *$V \in V_{(x)} \Longleftrightarrow \exists B(x, r) \subset V$.*
Si O est ouvert dans E et si $x \in O$ alors $O \in V_{(x)}$.

Proposition 3.4 *Un sous ensemble O de E est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve 3.2 *S'il est ouvert donc il est voisinage de chacun de ces points. Inversemement supposons qu'il est est voisinage pour chacun de ces points, alors $\exists O_x$ ouvert tel que $x \in O_x \subset O \Longrightarrow O = \cup_{x\in O}O_x$, ce qui achève la démonstration.*

Proposition 3.5 *La boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert (resp. fermé). La sphère est un ensemble fermé.*

Preuve 3.3 *Soit la boule ouverte : $B(x, r) = \{t \in E/d(x, t) < r\}$. Démontrons que c'est un ensemble ouvert. Il suffit qu'il soit voisinage de tous ses points. En effet soit $y \in B(x, r) \Rightarrow d(x, y) < r \Rightarrow r - d(x, y) > 0$.*
On prend $r_y = \frac{r-d(x,y)}{3} \Rightarrow B(y, r_y) \subset B(x, r).V$
$C_E^{\overline{B}(x,y)}$ est ouvert.
On a $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \cap C_E^{B(x,r)}$. Ce qui prouve que la sphère est fermée.

Proposition 3.6 *L'espace métrique est un espace topologique séparé.*

Preuve 3.4 *Soient x, y de points de E distincts $(x \neq y)$ tels que $d(x, y) = 3\varepsilon$.*
On a :$B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \phi$, $B(x, \varepsilon)$ et $B(y, \varepsilon)$ sont ouvertes.

3.1.4 Adhérence, intérieur, frontière

Soit (E,d) un espace métrique. Soit A une partie de E .

Définition 3.13 *On appelle adhérence de A, le sous- ensemble fermé de E formé par l'intersection de tous les fermés de E contenant A.*

On le note $\bar{A}$. C'est aussi le plus petit fermé contenant A (au sens de la relation d'inclusion) : $A \subset F$ et F fermé$\Rightarrow$ $A \subset F$ .On dit qu'un point $a \in E$ est "adhérent à A" si $a \in A$. En particulier A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Définition 3.14 *On dira qu'un élément a de E est adhérent au sous ensemble A (ou est une valeur d'adhérence de A) de E si :*

$$\forall V \in V_{(x)}, V \cap A \neq \emptyset$$

Définition 3.15 *On dit qu'un espace métrique (E,d) est à base dénombrable de voisinage si pout tout point a de E, on a :*

$$\exists \left(V_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset V_{(a)} / \forall V \in V_{(a)} \exists n \in \mathbb{N} \ t.q \ V_n \subset V \ \ et \ \forall i \in \mathbb{N}, V_{i+1} \subset V_i.$$

Proposition 3.7 *Tout espace métrique (E,d) est à base dénombrable.*

Preuve 3.5 *Il suffit de considérer en tout point a de E la famille* $\left(V_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(B(a, \frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.16 *Soit A une partie de E . On appelle intérieur de A, le sous- ensemble ouvert de E formé par la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A.*

On le note $int(A)$ ou $\mathring{A}$. C'est aussi le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de la relation d'inclusion) : $O \subset A$ et O ouvert $\Rightarrow O \subset \mathring{A}$. En particulier A es t ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Définition 3.17 *Soit A une partie de E. On appelle intérieur de A le plus grand ouvert de E contenu dans A. On notera $\mathring{A}$.*

Définition 3.18 *Si $A \subset E$, on appelle frontière de A et on note $Fr(A)$ ou ∂A l'ensemble*

$$Fr(A) = \left\{ x \in E : x \in \bar{A} \cap C_E^{\mathring{A}} \right\}$$

Définition 3.19 *Soit $A \subset E$, on dit que $x \in E$ est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$ la boule $B(x,r) \backslash \{x\} \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 3.20 *Si $A \subset E$, on dit que $a \in A$ est un point isolé de A s'il exite $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \{a\}$.*

Exercise 3.1 *Soient (E,d) un espace topologique métrique, A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que :*

1. $\overline{C_E^A} = C_E^{\mathring{A}}$, $C_E^{\overline{A}} = \overset{o}{C_E^A}$,
2. *Si* $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

3. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cap} B$, $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercise 3.2 *Soit (E, d) un espace topologique métrique . Montrer que pour $A \subset E$ on a :*

1. $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$.
2. $Fr(\overset{\circ}{A}) \subset Fr(A)$.
3. *A est fermé$\Leftrightarrow$ $Fr(A) \subset A$.*
4. *A est ouvert$\Leftrightarrow$ $Fr(A) \cap A = \phi$.*
5. *A est fermé et ouvert$\Leftrightarrow$ $Fr(A) = \phi$.*

3.2 Distances équivalentes

Définition 3.21 *On dit que les distances d_1 et d_2 sur E sont métriquement équivalentes ,s'il existe deux réels positifs α et β tels que*

$$\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1$$

Définition 3.22 *L'ensemble τ des-sous ensembles ouverts de(E, d) s'apelle la topologie associée à (E, d), ou induite par d sur E :*

$$\tau = \{O \subset E | O \text{ est un ouvert de } (E, d)\}.$$

Des distances différentes d_1 et d_2 peuvent induire des topologies identiques : $d_1 \neq d_2$ mais $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Définition 3.23 *On dit que les distances d_1 et d_2 sur E sont topologiquement équivalentes s'ils induissent la même topologie.*

Proposition 3.8 *Deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

Preuve 3.6 *En effet si les deux distances sont équivalentes ce ci se traduit par l'existence de deux réels positifs α et β tels que*

$$\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1$$

ce qui implique que

$$B_{d_1}(a, r/\beta) \subset B_{d_2}(a, r) B_{d_1}(a, r/\alpha)$$

c'est à dire que les topologies sont kifkif.

La réciproque n'est toujours vraie.

Exercise 3.3 *Soit l'application δ définit par $\delta(x, y) = |arctan(x) - arctan(y)|$.*

1. *Montrez que δ est une distance sur $\mathbb{R}$.*

2. *Montrez que la topologie induite par δ est la topologie usuelle (celle induite par la valeur absolue). Montrez que δ et la distance usuelle ne sont pas métriquement équivalentes.*
3. *Montrez que deux distances d_1 et d_2 sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si :*
$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \ t.q \ B_{d_1}(x,r) \subset B_{d_2}(x,\varepsilon)$$
et
$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists r_1 > 0 \ t.q \ B_{d_2}(x,r_1) \subset B_{d_1}(x,\varepsilon)$$

Proposition 3.9 *Si l'application identité $1_E : (E,d_1) \longrightarrow (E,d_2) : x \mapsto x$ est une homéomorphe alors les distances d_1 et d_2 sont équivalentes et réciproquement.*

Exemple 3.4 *Dans $\mathbb{R}^2$ les trois distances classiques sont équivalentes.*
En effet on a :

$$\begin{aligned} d_\infty &\leq d_1 \leq 2d_\infty \\ d_\infty &\leq d_2 \leq \sqrt{2}d_\infty \\ d_2 &\leq d_1 \leq 2d_2 \end{aligned}$$

d'une façon générale, dans Dans $\mathbb{R}^n$ les trois distances classiques sont équivalentes.
En effet on a :

$$\begin{aligned} d_\infty &\leq d_1 \leq nd_\infty \\ d_\infty &\leq d_2 \leq \sqrt{n}d_\infty \\ d_2 &\leq d_1 \leq nd_2 \end{aligned}$$

3.2.1 Sous-espaces métriques

Définition 3.24 *Soient (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On définit : $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x,y) \mapsto d_A(x,y) = d(x,y)$. L'espace topologique (A, d_A) est appelé sous-espace métrique.*

Remarque 3.2 *A munit de la métrique induite à une structure d'espace métrique .*

Remarque 3.3 *Les ouverts de (A,d_A) (où d_A désigne la métrique induite de celle de E sur A) sont les intersections des ouverts de E avec A.*

Exemple 3.5 *$E = l_2$. Soit $A = \{x \in E, x_n = 0, n > p\}$.*
$A \subset l_2$. $d_A(x,y) = (\sum_{n\geq 0}(x_n - y_n)^2)^{1/2}$.

3.2.2 Diamètre d'un ensemble

Définition 3.25 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d). On appelle diamètre de A noté $\delta(A)$ le nombre positif :$\delta(A) = \{\sup d(x,y), x \in A, \ y \in A\}$.*

Définition 3.26 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E. A est dite bornée si $\delta(A) < +\infty$.*

Propriétés

1. $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{x\}$.
2. $A \subset B \Rightarrow \delta(A) < \delta(B)$.

Définition 3.27 *Soit $f : E \longrightarrow (E, d)$ une application, soit $f(E)$ l'image directe de E par f. Le nombre $\delta(f(E))$ est appelé oscillation de f.*

Exemple 3.6 *Soient $(\mathbb{R}^2, d_2)$ un espace métrique et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (0, 0)) \leq 1\}$, alors $\delta(A) = 2$.*

3.2.3 Distance entre parties d'un espace métrique

Définition 3.28 *Soient (E, d) un espace métrique et A et B deux parties de E. La distance entre A et B est définie par $d(A, B) = \{\inf d(x, y),\ x \in A,\ y \in B\}$.*

Remarque 3.4 *Soient $A, B \subset E$, on a :*

1. $d(A, B) = 0 \not\Rightarrow A \cap B \neq \phi$,
2. $A \cap B \neq \phi \Rightarrow d(A, B) = 0$.

Exemple 3.7 *Soit (E, d) un espace métrique tel que d est définit par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

alors

$$d(A, B) = \begin{cases} 0, & A \cap B \neq \phi, \\ 1, & A \cap B = \phi. \end{cases}$$

3.2.4 Image d'une distance par une application bijective

Définition 3.29 *Soient (E, d) un espace métrique et F un ensemble quelconque telle que : $f : E \longrightarrow F$ soit bijective. L'application*

$$\delta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \delta(f(x), f(y))$$

est une distance sur E. On dit que la distance δ est transmise à F par f partant de la distance d.

Exemple 3.8 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \longmapsto |\log(x) - \log(y)|$.

3.2.5 Caractérisation d'un sous-espace métrique

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Soient O_d une topologie sur E et $O_{d/A}$ la topologie induite sur A, alors $O_{d/A} \equiv O_A = B(x, r) \cap A$.

3.3 Produit direct d'espaces métriques

3.3.1 Distances sur un ensemble produit

Soient $(E_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ n espaces métriques. Soit $E = \Pi_{i=1}^n E_i$, donc $x \in E \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in E_i, i = \overline{1, n}$.

Les applications suivantes définissent des distances :

$$D_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$
$$D_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)^2)^{1/2},$$
$$D_\infty(x, y) = \sup_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i).$$

Elles vérifient la relation

$$D_\infty \leq D_2 \leq D_1 \leq \sqrt{n} D_2 \leq n D_\infty$$

donc elles sont métriquement équivalentes et par conséquent topologiquement équivalentes.

Proposition 3.10 *Soit $r > 0$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$. Soit $B(x, r)$ la boule de E de rayon r et de centre x relative à la métrique D_∞. Notons, pour, $i = 1..n, B(x_i, r)$ la boule de centre x_i et de rayon r relative à la métrique d_i. Alors, $B(x, r) = B(x_1, r) \times B(x_2, r) \times .. \times B(x_n, r)$.*

Preuve 3.7 *Soit $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in B(x, r)$, alors pour tout $i = 1..n$, on a $d_i(x_i, y_i) < r$ et donc $y_i \in B(x_i, r)$.*

Réciproquement, si pour, tout $i = 1..n, y_i$ vérifie $d_i(x_i, y_i) < r$ alors $D_\infty(x, y) < r$ et $y \in B(x, r)$.

Remarque 3.5 *Une topologie n'est pas obligatoirement définie par une distance.*

Exemple 3.9 *Soit E un ensemble quelconque et soit $O = \{\phi, E\}$. Il n'y a aucune distance telle que $O_d = O$.*

Définition 3.30 *Pour tout $i = 1..n$, on appelle projecteur de E sur E_i,l'application*

$$P_i : E \longrightarrow E_i$$
$$x \mapsto x_i$$

Proposition 3.11 *Les applications P_i sont $1-$Lipschitienne.et sont donc continues.*

Preuve 3.8 *Très facile.*

Théorème 3.1 *Tout produit direct dénombrable d'espaces métriques est un espace métrique. Si les distances d_i,définies sur E_i pour $i \geq 1$ et vérifient $d_i < 1$, alors la topologie du produit peut être définie par*

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i).$$

3.4 Espace complet

3.4.1 Suite de Cauchy dans un espace métrique

Définition 3.31 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall p, q > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.12 *Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x dans (E, d) est une suite de Cauchy.*

Preuve 3.9 *Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans (E, d)*
ceci est équivalent à

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall p, q > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exemple 3.10 *Une suite peut être une suite de Cauchy sans être convergente.*
$E =]0, 1[, d(x, y) = |x - y|$, $x_n = \frac{1}{n}, n > 0$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de Cauchy car :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon = 2([\frac{1}{\varepsilon}] + 1) \in \mathbb{N} : \forall p, q > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \varepsilon.$$

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers x dans E. Donc

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - x\right| \leq \varepsilon,$$

d'une part. D'autre part on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > M_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

On a :

$$|x| = \left|x - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right| \leq \left|x - \frac{1}{n}\right| + \frac{1}{n} \leq 2\varepsilon$$

Soit $N = \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$ tel que

$$\forall\varepsilon > 0 : |x| \leq 2\varepsilon \Leftrightarrow x = 0$$

mais 0 n'appartient pas à E.

Proposition 3.13 *Une suite de Cauchy est une suite bornée.*

Preuve 3.10 *On a : $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall p, q > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$. Soit $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Si $\delta(A) < +\infty \Leftrightarrow A$ est bornée.*
$\delta(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$. *Posons* $\alpha = \sup\limits_{p,q\leq N_\varepsilon} d(x_p, x_q) \Rightarrow \delta(A) \leq \varepsilon + \alpha$.

Proposition 3.14 *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est suite de Cauchy et supposons qu'elle admet une valeur d'adhérence* x *alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x.

Preuve 3.11 *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall p,q>N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p,x_q)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.
x *est une valeur d'adhérence de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N} : \exists m>N \Rightarrow d(x_m,x)\leq\varepsilon\\ &\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} : \exists m>N_\varepsilon \Rightarrow d(x_m,x)\leq\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy, donc* $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall p,q>N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p,x_q)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.
En effet on a :

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n>N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x)\leq d(x_n,x_m)+d(x_m,x)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

3.4.2 Sous-suites ou suites extraires

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E espace métrique alors :

Définition 3.32 *On appelle sous suite ou suite extraite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $((x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}})$.

Remarque 3.6 *La suite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est exhibée de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en choisissant une partie de l'ensemble éléments de la suite.*

Exemple 3.11 *La suite* $u_n=1$ *et obtenue à partir de la suite* $u_n=\sin(n\frac{\pi}{2})$ *on choisissant* $\varphi(n)=2n+1$.

Proposition 3.15 *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est suite de Cauchy et* $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ *une sous-suite convergente vers* x*, alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x.

Preuve 3.12 *Utiliser la proposition précédente.*

Proposition 3.16 *Soit* x *une valeur d'adhérence d'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *alors il existe une suite extraite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* x.

Preuve 3.13 *Soit* x *une valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *alors* $\forall\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}$ $B(x,\varepsilon)\cap A_n\neq\phi$, *où* $A_n=\{x_k, k\geq n\}$, *soit* $\varepsilon=1$ *alors* $B(x,1)\cap A_n\neq\phi$ *appelons* $\varphi(1)$ *le premier petit entier tel que* $x_{\varphi(1)}\in B(x,1)$. *Poursuivos l'opération en donnant successivement à* ε *les valeurs* $\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{n};...$ *et désignons par* $\varphi(n)$ *le plus petit entier différent de* $\varphi(n-1)$ *tel que* $x_{\varphi(n)}\in B(x,\frac{1}{n})\cap A_n$, *il implique immédiatement que* $\varphi(n)>\varphi(n-1)$. *La suite* $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est extraite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et vérifie*

$$\forall n\in\mathbb{N} : d(x,x_n)\leq\frac{1}{n}\Longrightarrow\lim_{n\longrightarrow+\infty}x_{\varphi(n)}=x$$

3.5 Suite-adhérence

Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Définition 3.33 *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ (muni de la topologie induite par d) si et seulement si $d(x_n, x)$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

D'une manière générale on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall B(x, \varepsilon), \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : x_n \in B(x, \varepsilon).$$

Proposition 3.17 *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$a \in \overline{A}$.*
2. *$d(a, A) = 0$.*
3. *$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in A : x_n \longrightarrow a$.*

Preuve 3.14 $1 \Rightarrow 3$
$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in V_{(x)} : V \cap A \neq \phi \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : A \cap B(a, \frac{1}{n}) \neq \phi$
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, d(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$
$3 \Rightarrow 2$
$d(a, A) = \inf\limits_{x\in A} d(x, a) \leq \inf\limits_{x_n} d(x_n, a) = 0$
$2 \Rightarrow 1$
$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow d(a, A) = 0.$
$\forall V \in V_{(a)} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset V$
$\Rightarrow \exists x \in A, d(x, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow a \in B(x, \varepsilon) : A \cap V \neq \phi.$

Exemple 3.12 *Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que :*
$\{x\}$ est fermé.
$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ est fermé.

3.5.1 Valeurs d'adhérences d'une suite

Rappel

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. La valeur x de E est une valeur d'adhérence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall V \in V_{(x)}, \forall n \geq 0, \exists p \geq n : x_p \in V \\ &\quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 0, \exists p \geq n : d(x_p, x) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposition 3.18 *Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La valeur x de E est une valeur d'adhérence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Il existe une sous-suite de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x.*

Preuve 3.15 *1) implique 2) : est vrai dans des espaces topologiques quelconques.*

2) implique 1) : est vrai uniquement dans les espaces topologiques métriques.

En effet :

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0,\forall n\geq 0,\exists p\geq n: d(x_p,x)\leq\varepsilon,\\
&\varepsilon=1,n=1,\exists n_1>1: d(x_{n_1},x)\leq 1,\\
&\varepsilon=\tfrac{1}{2},n=n_1,\exists n_2>n_1: d(x_{n_2},x)\leq\tfrac{1}{2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varepsilon=\tfrac{1}{k},n=n_{k-1},\exists n_k>n_{k-1}: d(x_{n_k},x)\leq\tfrac{1}{k}.
\end{aligned}$$

3.5.2 Espace complet

Définition 3.34 *On dit qu'un espace métrique E est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge de E.*

Exemple 3.13 *La droite numérique munie de la distance $(x,y)\mapsto|x-y|$ est un espace métrique complet.*

Exercise 3.4 *Soit $E=C([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies continues sur $[a,b]$ muni de la distance $d(f,g)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$, où $f,g\in E$.*

Montrer que E est complet.

Solution 3.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E :*

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall p,q>N_\varepsilon\Longrightarrow d(f_p,f_q)=\sup_{x\in[a,b]}|f_p(x)-f_q(x)|\leq\varepsilon$$

alors $\forall x\in[a,b]$, la suite $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy de $\mathbb{R}$, elle y converge donc posons $f(x)=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}f(x)_n$, nous définissons aussi une application $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, montrons que $f\in E=C([a,b],\mathbb{R})$ et que $f=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}f_n$.

Soit $x_0\in[a,b]$ et $h\in\mathbb{R}$ tel que $x_0+h\in[a,b]$: alors

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-f_n(x_0+h)+(x_0+h)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)$$

or $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_p(x)-f_q(x)|$ pour $p,q\geq N_\varepsilon$ sinon on fait tendre q vers $+\infty$ et en maintenant $p\geq N_\epsilon$, il vient $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_p(x)-f(x)|\leq\varepsilon$.

Pour $p\geq N_\epsilon$,il en résulte que

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+h)-f(x_0)|\\
&\leq|f(x_0+h)-f_n(x_0+h)|+|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

si $|h|\leq\alpha$ compte-tenu de la continuité de l'application f_n alors $f\in E=C([a,b],\mathbb{R})$ et comme $d(f_p,f)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_p(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\forall p\geq N_\varepsilon\Longrightarrow f(x)=\lim\limits_{p\longrightarrow\infty}f(x)_p\Longrightarrow E$ est complet.

Exemple 3.14 *La droite rationnelle munie de la restriction de cette distance n'est pas un métrique complet, la suite des rationnels* $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{u_n})$ *tel que* a *est un réel strictement posit converge vers* $\sqrt{a}$.

Exemple 3.15 *Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet. En particulier* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ *sont complets.*

Exercise 3.5 *Soit* $E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 0} x_n < +\infty\}$, *on définit sur* E *la distance* $d(y,x) = (\sum_{n\geq 0}(y_n - x_n)^2)^{1/2}$. *L'espace métrique* (E,d) *est.complet.*

Soient E et F deux métriques, on définit sur le produit cartésien $E \times F$ une distance à partir des distances définies sur E et F réspectivement en posant : $d[(x,y),(x',y')] = d_E(x,x') + d_F(y,y')$.

Théorème 3.2 $E \times F$ *est un espace métrique complet si et seulement* E *et* F *sont des espaces métriques complets.*

Preuve 3.16 *Voir TD.*

Soit E un espace métrique et $A \subset E$.

Définition 3.35 *On dit que* A *est une partie complète de* E *si le sous espace métrique* A *est complet.*

Proposition 3.19 *Dans un espace métrique complet* E, *il y a identité entre parties complètes et parties fermées.*

Preuve 3.17 *Supposons que* A *est complète. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* A *qui converge vers* x. *Montrons que* x *est de* A. *En effet la suite car elle est convergente et comme* A *est complète donc* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* A *vers* x.

Supposons que A *est fermée. Montrons que* A *est complète. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy de* A, *alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* E *complet alors la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x *qui est forcément dans* A.

Corollaire 3.2 *Dans un espace métrique* E, *toute partie complète est fermée.*

3.5.3 Téorème de Baire

Lemme 3.1 *Soient* E *un espace métrique complet et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de fermées non vides telle que le diamètre de* A_n *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$, *alors* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x\}$.

Preuve 3.18 *On a par hypothèse* $A_n \neq \phi$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A_n$, *mais la suite* A_n *est décroissante donc* $x_{n+p} \in A_n, \forall p \in \mathbb{N}$.

Par hypothèse on a $\delta(A_n) \leq \varepsilon, \forall n \geq N_0$. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy de* E, *car si* $p,q \geq N_0, x_p, x_q \in A_{N_0}$ *et* $d(x_p,x_q) \leq \delta(A_{N_0}) \leq \varepsilon$. *Ce qui entraîne que* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x$ *puisque* E *est complet, d'où* $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} x_{n+p} = x \in A_n$ $(\overline{A_n} = A_n), \forall n \in \mathbb{N}$ *ce qui implique que* $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Soient y *un autre élément différent de* x *et appartenant à* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *alors on obtient* $0 < d(x,y) \leq \delta(A_n)$ *ce qui contredit* $\underset{n\to+\infty}{\delta(A_n)} \longrightarrow 0$

donc forcément $x = y$.

Théorème 3.3 (Baire) *Soient E un espace métrique complet et $(F_n)_n$ une suite de fermés d'intérieur vide alors $F = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide.*

Preuve 3.19 *Nous allons montrer que $F = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ ne contient aucun ouvert non vide, on démontre que pour un ouvert quelconque non vide de E, nous pourrons trouver $x \in O$ et $x \notin F$.*

Soit O un ouvert non vide de E et soit F_1 le premier élément de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $O \cap C_E^{F_1} \neq \phi$, sinon $O \subset F_1$ et $\mathring{F}_1 \neq \phi$ Soit $x_0 \in O \cap C_E^{F_1}$ alors il existe un réel $\rho > 0$ tel que

$$\overline{B}(x_1, \frac{\rho_0}{2}) \subset B_1(x_1, \rho_1) \subset O \cap C_E^{F_1}$$

pour les mêmes raisons que précédemment, l'ensemble ouvert $B(x_1, \frac{\rho_0}{2}) \cap C_E^{F_2}$ contient une boule ouverte non vide $B(x_2, \frac{\rho_0}{2^2})$ telle que

$$\overline{B}(x_2, \frac{\rho_0}{2^3}) \subset B(x_2, \frac{\rho_0}{2^2}) \subset B(x_1, \frac{\rho_0}{2}) \cap C_E^{F_2}$$

Ainsi on construit de proche en proche une suite décroissante de boules fermées

$$\left(\overline{B}\left(x_n, \frac{\rho}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

satisfaisant à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{B}\left(x_n, \frac{\rho}{2^n}\right) \subset B(x_{n-1}, \frac{\rho_0}{2^{n-1}}) \cap C_E^{F_n}$$

la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy par ce que :

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \frac{\rho}{2^n} + ... + \frac{\rho}{2^{n+p-1}} \leq \frac{\rho}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

et $\frac{\rho}{2^{n-1}} \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$ .convenablement choisi.

La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E espace métrique complet, elle y converge vers un élément x.Comme

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{N}, x_{n+p} \in \ \overline{B}\left(x_n, \frac{\rho}{2^n}\right) \\ &\Longrightarrow \lim_{p\longrightarrow+\infty} x_{n+p} = x \in \overline{B}\left(x_n, \frac{\rho}{2^n}\right), \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow x \notin F_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow x \notin F = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n \text{ et } x \in O. \end{aligned}$$

3.6 Fonctions Continues

Définition 3.36 *Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application. On dit que f est continue en x de E si et seulement $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 : d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.*

Théorème 3.4 *Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *f est continue en x.*
2. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n \underset{(E,d)}{\longrightarrow} x \Rightarrow . \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) \underset{(F,\delta)}{\longrightarrow} f(x)$

Remarque 3.7 *1) implique 2) : est vrai dans des espaces topologiques quelconques.*
2) implique 1) : est vrai uniquement dans les espaces topologiques métriques.

Preuve 3.20 1) $\Longrightarrow$ 2) *Supposons que f est continue en x_0 et $(x_n)_n$ une suite de points de E qui converge vers x_0, alors*

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N_{\varepsilon'} / \forall n \geq N_{\varepsilon'} \Longrightarrow d(x_n, x_0) \leq \varepsilon'.$$

f continue en $x \Longrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0 / \forall x \in E : d(x, x_0) \leq \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Il suffit de choisir $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon'$ pour que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) \underset{(F,\delta)}{\longrightarrow} f(x)$

2) $\Longrightarrow$ 1) *Par Absurde*
Supposons que f n'est pas continue en x_0 alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x_\alpha : d(x_\alpha, x_0) \leq \alpha \text{ et } \delta(f(x_\alpha), f(x_0)) > \varepsilon.$$

Posons $\alpha = \frac{1}{n}$ alors il existe une suite $(x_n)_n$ de E telle que $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$. c'est à dire

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n \underset{(E,d)}{\longrightarrow} x \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) \neq f(x)$$

contradiction.

D'une manière générale on a
On suppose que 2 est vérifiée mais pas 1, alors
$\exists V \in V_{f(x)} : \forall W \in V_{(x)}, f(W) \nsubseteq V.$
$\Rightarrow \exists V \in V_{f(x)} : \forall n \in \mathbb{N}^*, f(B_d(x, \frac{1}{n})) \nsubseteq V.$
$\Rightarrow \exists V \in V_{f(x)} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E, d(x_n, x) < \frac{1}{n}.$
$\Rightarrow \exists V \in V_{f(x)} : \exists x_n \in E, x_n \underset{n \to \infty}{\to} x / f(x_n) \nsubseteq V.$
c-à-d $f(x_n) \nrightarrow f(x)$. Contradiction.

3.6.1 Continuité uniforme

Définition 3.37 *Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application. On dit que f est uniformément continue sur E si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) \leq \alpha_\alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Exemple 3.16 *Soit $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) : x \mapsto x^2$. C'est une application continue mais non uniformément continue.*

3.7 Théorème du point fixe

Soient E un espace métrique et f une fonction de E dans E.

Définition 3.38 *La fonction $f : E \longrightarrow E$ est dite de type Lipschitz s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que :*

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in E.$$

Définition 3.39 *La fonction $f : E \longrightarrow E$ de type Lipschitz est appelée fonction contractante si $0 \leq K < 1$.*

Exemple 3.17 *La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{2}\sin x$ est contractante.définie sur E de constante K alors f admet un point fixe unique.*

En effet il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis.

Définition 3.40 *Soit $f : E \longrightarrow E$, on dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

Théorème 3.5 *Soit E un espace métrique complet, f une application contractante définie sur E de constante K alors f admet un point fixe unique.*

Preuve 3.21 ***L'unicité***

Soient x_1 et x_2 deux points fixe de f alors $f(x_1) = x_1, f(x_2) = x_2$ et $d(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2)$

$\Rightarrow d(x_1, x_2) \leq Kd(x_1, x_2)$

$\Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

L'existence

Soit $x_0 \in E$, déffinissons par réccurence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ et montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet E, d'ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in E$ et comme f est continue il viendra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) \Rightarrow x = f(x)$.

(x_n) est une suite de Cauchy de E.

En effet, soient p, q deux entiers tels que $q > p$ alors :

$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q)$.

Sachant que :

$d(x_p, x_{p+1}) = d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \leq Kd(x_{p-1}, x_p) \leq K^2 d(x_{p-2}, x_{p-1}) \leq ... \leq K^p d(x_0, x_1)$

d'ou

$d(x_p, x_q) \leq (K^p + K^{p+1} + ... + K^{q-1})d(x_0, x_1)$

$\leq K^p d(x_0, x_1) \sum_{p=0}^{p=+\infty} K^p \leq \dfrac{K^p d(x_0, x_1)}{1-K}$.

Si $d(x_0, x_1) = 0$ alors $x_1 = x_0 = f(x_0)$ et x_0 est le point fixe sinon $d(x_0, x_1) > 0$ et $\dfrac{K^p d(x_0, x_1)}{1-K} \leq \varepsilon$ si $p \geq n_0$ entier convenablement choisi.

Ce qui achève la preuve.

Remarque 3.8 *L'existence d'une constante K positive strictement inférieure à 1 est nécessaire, car si f dininue strictement les distances, cela ne suffit pas pour qu'il ait un point fixe.*

Exemple 3.18 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$
$f(x) - f(y) = \frac{C}{\sqrt{C^2+1}}(x-y)$ où $C \in]x, y[$.

Or $\left|\frac{C}{\sqrt{C^2+1}}\right| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |(x-y)|$. Pourtant f n'admet pas de point fixe, car l'equation $\sqrt{x^2+1} = x$ n'admet pas de solution.

3.8 Espaces métriques compacts

3.8.1 Introduction

La compacité est une notion qui, tout comme la complètude, nous permettra de nous assurer de l'existence de certains objets mathématiques. Elle permettra ainsi de prédire l' existence de la limite pour certaines suites ou l' existence des extremums pour une fonction numérique. Elle servira, d'autre part, a se ramener, partant d'une situation présentant "un caractère infini" à une situation "finie" et exploitable. Les espaces compacts sont une généralisation, dans le cadre des espaces topologiques, de la notion d'intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

3.8.2 Notations et definitions

On par (E, d) un espace métrique. Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 3.41 *On dit qu'une famille $(O_i)_{i\in I} \subset P(E)$ constitue "un recouvrement de A si $A \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$. On dira que $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert si $\forall i \in I$, O_i est un ouvert. Si I l'ensemble des incides est fini, on dit que le recouvrement est fini sinon il est quelconque.*

Remarque 3.9 *Dans le cas où $A = E$, on a $E = \underset{i\in I}{\cup} O_i$.*

Définition 3.42 *On dit que (E, d) est un espace métrique compact s'il vérifie : De tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit, si $E = \underset{i\in I}{\cup} O_i$, alors il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini et tel que $E = \underset{i\in I_0}{\cup} O_i = O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_n}$.*

Définition 3.43 *Soit $A \subset E$ on dit que A est un compact de (E, d) si l'espace métrique induit (A, d) est compact. C-à-d de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit, si $A \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$, alors il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini et tel que $A \subset \underset{i\in I_0}{\cup} O_i = O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_n}$.*

Proposition 3.20 *(E, d) est un espace métrique compact s'il vérifie : De tout famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermées d'intersection vide, on peut extraire une sou-famille d'intersection vide. Autrement dit si $\underset{i\in I}{\cap} F_i = \phi$, alors il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini et tel que $\underset{i\in I_0}{\cap} F_i = F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} = \phi$.*

Preuve 3.22 *Soient $(F_i)_{i\in I}$ de fermés d'intersection vide, alors $C_E^{\underset{i\in I}{\cap} F_i} =$, mais $(C_E^{F_i})_{i\in I}$ est recouvrement ouvert de E, on peut donc extraire un recouvrement fini. $\underset{i\in I_0}{\cup} C_E^{F_i} = E$, par passage un e deuxième fois au complémentaire on obtient le resultat escompté.*

Corollaire 3.3 *Si* $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de fermés non vides de* E *compact alors* $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} F \neq \phi$*.*

Preuve 3.23 *Il suffit de prendre la contraposée de la proposition précédente et de l'adapter au cas* $I = \mathbb{N}$*.*

Exemple 3.19 *Les fermés bornés de*$\mathbb{R}$ *sont des espaces compacts pour la topologie définie par la valeur absolue.*

Chapitre 4

Espaces topologiques

Soient E un ensemble quelconque et $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E. Les parties ϕ et E appartiennent à $P(E)$.

$$\forall X \subset E, X \in P(E).$$

Soit O un sous-ensemble de $P(E)$.

Définition 4.1 *Le couple (E, O) est appelé espace topologique si et seulement si les trois axiomes suivants sont satisfaits :*

1. *ϕ et E appartiennent à O.*
2. *Toute intersection finie d'éléments de O est un élément de O.*
3. *Toute réunion d'éléments de O est un élément de O.*

Définition 4.2 *Soit $\tau = (E, O)$ un espace topologique. On appelle ouvert chaque élément de O.*

Exemple 4.1 *Soit E un ensemble quelconque*

1. *Si $O = P(E)$, l'espace topologique est appelé espace topologique discret (topologie discrète).*
2. *Si $O = \{E, \phi\}$, l'espace topologique est appelé espace topologique grossier ou trivial (topologie grossière).*
3. *Soit $E = \{a, b\}$. On définit O comme suit : $O = \{E, \phi, \{b\}\}$. Vérifier que (E, O) est un espace topologique.*

4.1 Ensembles fermés

Définition 4.3 *Soient (E, O) un espace topologique et A un sous-ensemble de E. On dit que A est fermé par rapport à O si C_E^A est ouvert.*

Remarque 4.1 1. *E et ϕ sont fermés.*

Définition 4.4 1. *Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

2. *Toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

4.2 Comparaison des topologies

Définition 4.5 *Soient E un ensemble quelconque, O_1 et O_2 deux topologies définies sur E. On dit que O_1 est plus fine que O_2 ou que O_2 est moins fine que la topologie O_1 si $O_2 \subset O_1$.*

Exemple 4.2 *La topologie discrète est la topologie la plus fine et la topologie grossière est la moins fine.*

Remarque 4.2 *Soit E un ensemble. On note par T la famille de toutes les topologies définies sur E.*

Alors on peut définir une relation d'ordre partielle sur T :

$$O_2 < O_1 \Leftrightarrow O_2 \subset O_1$$

$O_m = \{E, \phi\}$ topologie minimale, $O_M = \{P(E)\}$ topologie maximale
$\forall O \in T : O_m \subset O \subset O$.

Proposition 4.1 *Toute intersection fini ou infini de topologies définies sur E est une topologie sur E (c'est la moins fine),*

$$\underset{\beta\in B}{\cap} O_\beta = O.$$

Preuve 4.1 $\forall \beta \in B, O_\beta \in T \overset{?}{\Rightarrow} \underset{\beta\in B}{\cap} O_\beta = O \in T.$

1. *ϕ et E appartiennent à O_β $\forall \beta \in B \Rightarrow \phi$ et E appartiennent à O.*
2. *Soit I fini ou infini, on prend des sous-ensembles de O : $A_\alpha \in O, \forall \alpha \in I$ $/O = \underset{\beta\in B}{\cap} O_\beta$*
   c-à-d
   $\forall \alpha \in I, A_\alpha \in O_\beta, \forall \beta \in B \Rightarrow \underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha \in O_\beta, \forall \beta \in B \Rightarrow \underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha \in \underset{\beta\in B}{\cap} O_\beta = O$
3. *Soit I fini*
   $\forall \alpha \in I, A_\alpha \in O_\beta, \forall \beta \in B \Rightarrow \underset{\alpha\in I}{\cap} A_\alpha \in O_\beta, \forall \beta \in B \Rightarrow \underset{\alpha\in I}{\cap} A_\alpha \in \underset{\beta\in B}{\cap} O_\beta = O.$

Proposition 4.2 *Soient E un ensemble quelconque et B un sous-ensemble de $P(E)$.*

Alors il existe sur E une topologie qui contient B qu'on note par $O(B)$.

Preuve 4.2 *On a $B \subset P(E)$. On pose $O(B) = \underset{\alpha\in I}{\cap} O_\alpha$ tel que $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ désigne la famille de toutes les topologies qui contiennent B. D'après la proposition précédente $O(B)$ est une topologie sur E. La topologie $O(B)$ s'appelle la topologie engendrée par B.*

4.3 Base topologique

Définition 4.6 *Soient (E, O) un espace topologique et $\{O_j\}$ une famille d'ouverts de O. On dit que $\{O_j\}$ est une base pour la topologie O, si chacun de ses ouverts s'écrit sous forme d'une réunion d'éléments de O_j.*

Proposition 4.3 *Soient (E, O) un espace topologique et $\{O_j\}$ une base de O, alors la topologie $O(O_j)$ (engendrée par O_j) est égale à O.*

Preuve 4.3 *On démontre que $O(O_j) = O$*

1. $O(O_j) \subset O$ *est évident, on a* $O(O_j) \subset O(O)$ *car* $O_j \subset O$.
2. $O \subset O(O_j)$?
   Soit $A = \underset{i\in I}{\cup} G_i / G_i \in O_j$, *alors* $G_i \in O_j \in O \Rightarrow \underset{i\in I}{\cup} G_i = A \in O(Oj)$.

Remarque 4.3 *Chaque base d'un espace topologique* (E, O) *vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in E, \exists G \in O_j$ *tel que* $x \in G$.
2. *Soit* E *un ensemble.*
   $\forall x \in E$, *tel que* $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists G_3 / x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Preuve 4.4

1. E *est ouvert* $\Rightarrow E \subset O$ *i.e* $E = \underset{i\in I}{\cup} G_i$.
2. G_1 *et* $G_2 \in O_j \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in O$,
   alors $G_1 \cap G_2$ *s'écrit comme réunion d'ensembles de* O_j.
   C-à-d :
   $G_1 \cap G_2 = \underset{i\in I}{\cup} G_i / G_i \in O_j$,
   $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists G_3$ *tel que* $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Proposition 4.4 (cas réciproque) *Soit* O_j, *une famille de parties de* E.
O_j forme une base pour la topologie sur E si et seulement si O_j vérifie les deux propriétés :

1. $\forall x \in E, \exists G \in O_j$ *tel que* $x \in G$.
2. $\forall x \in E$, *tel que* $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \exists G_3 / x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Preuve 4.5 *Soit $\tau(O_j)$ la famille des ensembles qui s'écrivent comme réunion (fini ou infini) d'ensembles de O_j.*

ϕ *et* E *appartiennent à* $\tau(O_j)$:
$\phi \in O_j \subset \tau(O_j)$, $\forall x \in E, \exists G_x \in O_j \ / \ x \in G_x$. $E = \underset{x\in E}{\cup} G_x \in \tau(O_j)$.
Soit $A_{i\in I} \in \tau(O_j)$ *tel que* $A_i = \underset{j\in J}{\cup} G_{i,j}$ *d'ou* $\underset{i\in I}{\cup} A_i = \underset{i\in I}{\cup}(\underset{j\in J}{\cup} G_{i,j}) \in \tau(O_j)$.
Soit J *fini et soit* $A_{i\in I} \in \tau(O_j) \overset{?}{\Rightarrow} \underset{i\in I}{\cap} A_i \in \tau(O_j)$:
A *et* B *appartiennent à* $\tau(O_j) \overset{?}{\Rightarrow} A \cap B \in \tau(O_j)$
$A = \underset{i\in I}{\cup} A_i / A_i \in O_j, B = \underset{j\in J}{\cup} B_j / B_j \in O_j \Rightarrow A \cap B = (\underset{i\in I}{\cup} A_i) \cap (\underset{j\in J}{\cup} B_j) = \underset{i\times j\in I\times J}{\cup} (A_i \cap B_j)$.
On étudie : $A_i \cap B_j \overset{?}{\in} \tau(O_j)$
$x \in A_i \cap B_j \Rightarrow \exists G_x \in O_j \ / \ x \in G_x \subset A_i \cap B_j$ *d'après la propriété* (2)
$x \in G_x \subset A_i \cap B_j \Rightarrow \forall x : x \in A_i \cap B_j$
et par conséquence :

$$A_i \cap B_j = \cup G_x \in \tau(O_j)$$

Remarque 4.4 *1. Soient (E, O) un espace topologique et (O_j) une famille d'ensembles ouverts $(O_j \subset O)$ tels que (O_j) vérifie (1) et (2)*
alors (O_j) forme une base pour la topologie $\tau(O_j)$ et on sait que la topologie $\tau(O_j)$ est engendrée par O_j, d'ou $O(O_j) = \tau(O_j)$ mais d'après la proposition 3.3 : O_j est une base de $O \Rightarrow O = O(O_j)$.

2. La topologie O peut ne pas être égale à $\tau(O_j)$ $(O(O_j) = \tau(O_j))$.

Théorème 4.1 *Soient (E, O) un espace topologique et (O_j) une famille d'ensembles ouverts. Pour que (O_j) forme une base pour O il faut et il suffit qu'elle vérifiée la propriété suivante :*
$\forall G \in O$ et $\forall x \in G \Rightarrow \exists G_x \in O_j \ / \ x \in G_x \subset G$.

Preuve 4.6 $\Rightarrow$
$G \in O$, mais O_j est une base de O, donc $G = \underset{i \in I}{\cup} G_i$ tels que $G_i \in O_j$
comme $x \in G \Rightarrow \exists G_x : G_x \in O_j$
donc $x \in G_x \subset G = \underset{i \in I}{\cup} G_i$.
$\Leftarrow$
$A \subset O$, $A \overset{?}{=} \underset{i \in I}{\cup} G_i$. et $G_i \subset O_j$
$A \subset O$ alors $\forall x \in A$, $\exists G_x : G_x \in O_j$ et $x \in G_x \subset A$
Donc $A = \underset{i \in I}{\cup} G_i$.

4.4 Base dénombrable

Définition 4.7 *On dit que E est un ensemble dénombrable s'il existe une application bijective φ entre E et $\mathbb{N}$.*

Exemple 4.3 $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$.

Définition 4.8 *On dit que (E, O) est un espace à base dénombrable s'il existe au moins une base O_j pour O dénombrable.*

Exemple 4.4 *Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. On pose*

$$O_j = \{]q - \frac{1}{n+1}, q - \frac{1}{n+1}[, q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

mais $]q - \frac{1}{n+1}, q - \frac{1}{n+1}[$ ouvert.

$$O_j = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \{]q - \frac{1}{n+1}, q - \frac{1}{n+1}[, q \in \mathbb{Q}\}.$$

O_j est dénombrable car :
$\{]q - \frac{1}{n+1}, q - \frac{1}{n+1}[, q \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable par ce que $\mathbb{Q}$ l'est.
On vérifie que O_j forme une base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$: pour cela

$$G \subset O \overset{?}{\Leftrightarrow} \forall x \in G, \exists G_x \in O_j / x \in O_j \subset G$$

Autrement dit :

$$G \subset O \Leftrightarrow \forall x \in G, \exists \alpha_x > 0 /]x - \alpha_x, x + \alpha_x[\subset G.$$

Car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on utilise aussi l'axiome d'Archimède.

4.5 Sous-espace topologique

Soient E un espace topologique et $A \subset E$.
Si l'on considère l'ensemble

$$O_A = \{A \cap B, B \in O\}$$

il est aisé de verifier que l'ensemble O_A satisfait aux trois axiomes de la topologie, à savoir :

1. $A, \phi \in O_A$.
2. O_A est stable par réunion quelconque.
3. O_A est stable par intersection fine.

Définition 4.9 *Le couple (A, O_A) est appelé sous-espace topologique de l'espace topologique (E, O).*

Remarque 4.5 *Si $X \subset A$ est ouvert pour le sous espace A, alors X n'est pas nécessairement ouvert pour E cependant :*

Proposition 4.5 *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ouvert du sous-espace A soit ouvert dans l'espace E est que A soit ouvert dans E.*

Preuve 4.7 *Supposons A ouvert dans E et soit $X \subset A$ ouvert dans A alors $X = A \cap B$ (B ouvert dans E)*

Réciproquement si tout ouvert de A est un ouvert de E, il en résulte trivialement que A est un ouvert de E car A est ouvert de A.

4.6 Voisinages

Définition 4.10 (Voisinage d'un point) *Soient (E, O) un espace topologique et x un point de E. On appelle voisinage de x tout ensemble $V(V \subset E)$qui contient un ensemble ouvert $A(A \subset O)$ et A contient x.*

$$V \text{ voisinage de } x \Leftrightarrow (\forall x \in V, \exists A \in O / x \in O \subset V.$$

On note par $V_{(x)}$ l'ensemble de tous les voisinages de x.

Définition 4.11 (Voisinage d'un ensemble) *Soit $B \subset E$. On dit que V est un voisinage de B si V contient un ensemble ouvert A $(A \subset V)$ contenant B. Autrement dit :*

$$V \text{ est un voisinage de } B \Leftrightarrow (\exists A \in O, B \subset A \subset V).$$

Exemple 4.5 *Soit (E, O) un espace topologique, alors $\forall x \in E \Rightarrow V_{(x)} \neq \phi$.*

Exemple 4.6 *Soit $(\mathbb{R}, |.|)$ ($\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle).*
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, x \in B(x, \alpha)$, *c-à-d* $]x - \alpha, x + \alpha[\in V_{(x)}, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$.
$[x - \alpha, x + \alpha] \in V_{(x)}$.

Exemple 4.7 *Soit $(E, P(E))$ un espace topologique et soit $\{x\} \in V_{(x)}$, on a :*

$$A \subset E \text{ et } x \in A \Rightarrow A \in V_{(x)}.$$

4.6.1 Propriétés du voisinage

1. $\forall V \in V_{(x)} \Rightarrow x \in V$
2. $\forall V_1 \in V_{(x)}, \forall V_2 \in V_{(x)} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in V_{(x)}$.
3. Si $V \in V_{(x)}$ et $V \subset W \Rightarrow W \in V_{(x)}$.

Preuve (exercice).

Proposition 4.6 *Soit (E, O) un espace topologique*
$A \subset E$ est un sous-ensemble ouvert si et seulement si A est voisinage à tous ses points :

$$A \text{ est ouvert} \Leftrightarrow \forall x \in A, A \in V_{(x)}.$$

Preuve 4.8 $\Rightarrow$
$A \in O$ et $x \in A$.
$x \in A \subseteq A \Rightarrow A \in V_{(x)}$.
$\Leftarrow$
Soit $A \subset E$, alors $\forall x \in A, \exists G_x / G_x \in O$ et $x \in G_x \subset A \Rightarrow A = \underset{x \in A}{\cup} G_x \in O$
Alors A est ouvert.

4.6.2 Systèmes fondamentaux de voisinages

Définition 4.12 *Soient (E, O) un espace topologique et x un point de E. On dit qu'une sous-famille $B(x)$ de voisinages de x est un système fondamental de voisinages de x, si pour tout voisinage V de $V_{(x)}$, il existe un voisinage W de $B(x)$ de sorte que $W \subset V$.*

Exemple 4.8 *Si on prend $(E, O) = (\mathbb{R}, |.|)$ et $B_{(x)} = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[_{n \in \mathbb{N}^*}\}$ alors $B_{(x)}$ constitue un système fondamental dénombrable de voisinages de x.*

4.7 Adhérence, intérieur et frontière

4.7.1 Adhérence

Point adhérent

Définition 4.13 *Soient (E, O) un espace topologique et $M \subset E$. On dit que point x de E est un point adhérent à M si tout voisinage de x rencontre M. On note par $\overline{M}$ l'ensemble des points adhérents à M et on écrit :*

$$x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall V \in V_{(x)}; V \cap M \neq \phi.$$

Remarque 4.6 *On peut remarquer que $M \subset \bar{M}$. C'est à dire que tout point de M en est adhérent.*

Exemple 4.9 *Si on prend $(E, O) = (\mathbb{R}, |.|)$ et $M =]a, b[$ alors $\bar{M} = [a, b]$.*

Preuve 4.9 *$\Rightarrow \overline{]a,b[} \subset [a,b]$ (exercice)*

$\Leftarrow [a,b] \subset \overline{]a,b[}$. On montre que :

si $x \notin [a,b]$ alors x n'est pas un point adhérent. On a $[a,b]$ est fermé alors $C_{\mathbb{R}}^{[a,b]}$ est ouvert. Si on suppose que $x \notin [a,b]$ alors $x \in C_{\mathbb{R}}^{[a,b]}$ et par conséquent $C_{\mathbb{R}}^{[a,b]} \in V_{(x)}$ et $]a,b[\cap C_{\mathbb{R}}^{[a,b]} = \phi$, il reste à démontrer que a et b sont deux points adhérents à M. En effet si $V \in V_{(a)}$ alors il va exister un $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$, on peut voir clairement que $V \cap]a,b[\neq \phi$. même chose pour b.

Exemple 4.10 *Soit $E = \mathbb{R}$ et $M = \mathbb{Z}$ alors $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.*

Preuve 4.10 *$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \exists V \in V_{(x)}/V \cap \mathbb{Z} = \phi$.*

4.7.2 Points intérieurs et l'intérieur d'un ensemble

Définition 4.14 *Soient (E,O) un espace topologique et M un sous-ensemble de E. On dit qu'un point x de M est intérieur à M si M est un voisinage de x.*

On note par $\mathring{M}$ l'ensemble des points intérieurs de M et on écrit : $x \in \mathring{M} \Leftrightarrow M \in V_{(x)}$.

Remarque 4.7 *On a toujours $\mathring{M} \subset M$.*

1. Soient $(E,O) = (\mathbb{R}, |.|)$ et $M = \mathbb{Z}$ alors $\mathring{M} = \phi$.
2. Soient $E = \{a,b,c,d,e\}$ et $O = \{\phi, E, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$. Vérifier que (E,O) est un espace topologique. Soit $M = \{a,b,c\}$ alors $\mathring{M} = \{a,b\}$.

Proposition 4.7 *Soient (E,O) un ensemble topologique et M,N deux sous-ensembles de E, alors*

$$C_E^{\mathring{N}} = \overline{C_E^N}, C_E^{\overline{M}} = \mathring{C}_E^M$$

Preuve : Voir T.D.

4.7.3 Points d'accumulations et points isolés

Définition 4.15 *Soient (E,O) un espace topologique et M une partie de E. On dit que le point x de E est un point d'accumulation de M s'il vérifie :*

$$\forall V \in V_{(x)}; V\backslash\{x\} \cap M \neq \phi.$$

Exemple 4.11 *Soient $E = \{a,b,c,d,e\}$, $O = \{\phi, E, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ et $M = \{a,b,c\}$. le point b est un point d'accumulation de M car $V_{(b)} = \{E, \{b,c,d,e\}\}$ et on a $E\backslash\{b\} \cap M = \{a,c\} \neq \phi$, $\{b,c,d,e\}\backslash\{b\} \cap M = \{c\} \neq \phi$. De la même manière on montre que e et b sont deux points d'accumulations de M. On montre aussi que le point a n'est pas un point d'accumulation de M, car $\{a\} \subset V_{(a)}$ et $\{a\}\backslash\{a\} \cap M = \phi$. Le point c n'est pas un point d'accumulation de M.*

Soit l'espace topologique usuel et considérons l'ensemble $M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Le point 0 est le seul point d'accumulation de M, car la suite converge vers 0. $\forall V \in V_{(0)}$, on a $V\backslash\{0\} \cap M \neq \phi$, en effet $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset V$ et $\exists N_\varepsilon > 0$ tel que $n > N_\epsilon$ alors $\frac{1}{n} \in V$. On a $\frac{1}{n} \neq 0$ et $\frac{1}{n} \in V\backslash\{0\}$.

4.7.4 Ensemble dérivé

Définition 4.16 *Soient (E,O) un espace topologique et M une partie de E. L'ensemble des points d'accumulations de M est appelé ensemble dérivé de M, il est noté par $M^{'}$.*

$$x \in M^{'} \Leftrightarrow (\forall V \in V_{(x)}, V\backslash\{x\} \cap M \neq \phi.$$

Proposition 4.8 *Soient (E,O) un espace topologique et M une partie de E, alors : $\overline{M} = M \cup M^{'}$.*

Preuve 4.11 *On a $M \subset \overline{M}$ et $M^{'} \subset \overline{M}$ donc $M \cup M^{'} \subset \overline{M}$. Car par définition le point d'accumulation est un adhérent.*

Réciproquement soit $x \in \overline{M}$ et $x \notin M$ est ce que $x \in M^{'}$?

En effet soit $V \in V_{(x)} \Rightarrow V \cap M \neq \phi$ (car $x \in \overline{M}$), mais $x \notin M$ donc $V\backslash\{x\} \cap M \neq \phi$, ceci prouve que $x \in M^{'}$.

Propriétés de l'ensemble dérivé

Soit (E,O) un espace topologique et soient M_1 et M_2 deux sous-ensembles de E. On a les propriétés suivantes :

1. $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^{'} \subset M_2^{'}$.
2. $(M_1 \cup M_2)^{'} = M_1^{'} \cup M_2^{'}$.

Preuve 4.12 *$M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^{'} \subset M_2^{'}$ est une conséquence immédiate de la définition.*

Pour la deuxième propriété on a :

$$\begin{aligned} M_1 \subset M_1 \cup M_2 \Rightarrow M_1^{'} \subset (M_1 \cup M_2)^{'} \\ M_2 \subset M_1 \cup M_2 \Rightarrow M_2^{'} \subset (M_1 \cup M_2)^{'} \end{aligned}$$

donc $M_1^{'} \cup M_2^{'} \subset (M_1 \cup M_2)^{'}$ d'une part.

D'autre part, on a : $(M_1 \cup M_2)^{'} \subset M_1^{'} \cup M_2^{'}$.

Soit $x \notin M_1^{'} \cup M_2^{'}$ est ce que ceci implique que $x \notin (M_1 \cup M_2)^{'}$.

$x \notin M_1^{'} \Rightarrow \exists V_1 \in V_{(x)}/V_1\backslash\{x\} \cap M_1 = \phi$ et $x \notin M_2^{'} \Rightarrow \exists V_2 \in V_{(x)}/V_2\backslash\{x\} \cap M_2 = \phi$. Mais $V = V_1 \cap V_2 \in V_{(x)}$ et $V \subset V_1, V \subset V_2$. Plus encore on a

$V\backslash\{x\} \cap M_1 = \phi$ et $V\backslash\{x\} \cap M_2 = \phi$ ce qui donne $V\backslash\{x\} \cap (M_1 \cup M_2) = \phi$.

Point isolé

Définition 4.17 *Soient (E,O) un espace topologique et M une partie de E. Soit $x \in M$. On dit que x est un point isolé s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap M = \{x\}$. i.e*

$$(x \text{ est un point isolé de } M) \Leftrightarrow (\exists V \in V_{(x)} \text{ tel que } V \cap M = \{x\})$$

Exemple 4.12 *Soit $(\mathbb{R}, |.|)$ et considérons $M = \mathbb{N}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est un point isolé.*

Points extérieurs

Définition 4.18 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* M *une partie de* E*. Soit* $x \in M$*. On dit que* x *est un point extérieur à* M *s'il est intérieur à* C_E^M*.*

Remarque 4.8 *le point* x *est un point extérieur à* $M \Leftrightarrow (C_E^M \in V_{(x)}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{C}{}_E^M \Leftrightarrow (\exists A \in O, x \in A$ *et* $M \cap A = \phi)$*.*

Propriété de l'extérieur :

On note par $e(M)$ l'ensemble extérieur de M. On a les propriétés suivantes :

1. $e(M) \subset C_E^M$ (car $e(M) = \overset{\circ}{C}{}_E^M$).
2. $e(M) = e(C_E^{e(M)}$.
3. $e(M_1 \cap M_2) = e(M_1) \cap e(M_2)$.

Preuve : Exercice.

4.7.5 Frontière d'un ensemble

Définition 4.19 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* M *une partie de* E*. On appelle frontière de* M *noté* $F(M)$ *l'ensemble* $\overline{M} \cap \overline{C_E^M}$*. Il en résulte que* $F(M)$ *est un ensemble fermé.*

Exemple 4.13 *Soit* $M =]-1, 4[\Rightarrow F(M) = \{-1, 4\}$*.*
Soit $M = [-1, 4] \Rightarrow F(M) = \{-1, 4\}$*.*
Soit $M = \mathbb{Q} \Rightarrow F(M) = \mathbb{R}$*.*

4.8 Séparabilité et densité

4.8.1 Densité

Définition 4.20 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* M *une partie de* E*.*
On dit que M *est partout dense dans* E *si* $\overline{M} = E$*.*
On dit que M *est dense dans* E *si* $\overset{\circ}{\overline{M}} \neq \phi$*.*
On dit que M *n'est pas dense dans* E *si* $\overset{\circ}{\overline{M}} = \phi$*.*

Définition 4.21 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* M *et* N *deux parties de* E *telles que* $M \subset N \subset E$*. On dit que* M *est dense dans* N *si* $N \subset \overline{M}$*.*

Proposition 4.9 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* M *une partie de* E*.*

1. M *est partout dense dans* E *si et seulement si* M *rencontre tous les ensembles non vides :*
$$\overline{M} = E \Leftrightarrow (\forall U \in O, U \neq \phi : U \cap M \neq \phi).$$
2. M *n'est dense dans* E *si et seulement si* $C_E^{\overline{M}}$ *est partout dense dans* E*.*

Preuve 4.13 1) $\Rightarrow$

Soient $x \in E$ *et* $V \in V_{(x)}$

$V \in V_{(x)} \Rightarrow \exists U \in O/x \in U \subset V$. *Mais* $U \neq \phi \Rightarrow U \cap M \neq \phi \Rightarrow V \cap M \neq \phi \Rightarrow x \in \overline{M}$.

$\Leftarrow$

Soit $U \in O/U \neq \phi$.

$x \in U \Rightarrow x \in E \Rightarrow x \in \overline{M}$.

$x \in U \Rightarrow U \in V_{(x)} \Rightarrow U \cap M \neq \phi$.

2) *Grâce à la dualité* $\overline{C_E^M} = C_E^{\overset{\circ}{M}}$.

Exemple 4.14 $\mathbb{Q}$ *est partout dense dans* $\mathbb{R}$.

En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon.$$

$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ *est partout dense dans* $\mathbb{R}$.

4.8.2 Dénombrabilité et séparabilité

Définition 4.22 *Soit* (E, O) *un espace topologique. On dit que* (E, O) *vérifie le premier axiome de dénombrabilité si tout point* x *de* E *admet un système fondamental de voisinages au plus dénombrable.*

$$\forall V \in V_{(x)}, \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset V$$

où $B(x)$ *est un système fondamental de voisinages de* x *au plus dénombrable.*

On dit que (E, O) *vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité s'il existe une base* $\mathcal{B}$ *au plus dénombrable pour la topologie* (E, O).

$$\mathcal{B} \text{ base de } O \Leftrightarrow \forall U \in O, \exists B \in \mathcal{B} : B \subset U.$$

Exemple 4.15 *L'espace topologique* $(\mathbb{R}, |.|)$ *vérifie le premier axiome de dénombrabilité. En effet*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathcal{B}(x) = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[_{n \in \mathbb{N}^*}\}$$

constitue un système fondamental dénombrable de voisinages de x.

L'espace topologique $(\mathbb{R}, |.|)$ *vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité. En effet*

$$\mathcal{B} = \{]q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}[_{n \in \mathbb{N}^*}, q \in \mathbb{Q}\}$$

constitue une base dénombrable pour la topologie $(\mathbb{R}, |.|)$.

Soient E *un ensemble infini et* $O = \mathcal{P}(E)$. *Alors*

$$\forall A \subset E, A \text{ est ouvert et fermé.}$$

$(E, \mathcal{P}(E))$ *vérifie le premier axiome de dénombrabilité.*

Est ce qu'il existe une base $\mathcal{B}(x)$ *telle que* $\mathcal{B}(x)$ *est base de* $V_{(x)}$.

On a $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \Rightarrow \{x\} \subset V_{(x)}$, *Alors :*

$\forall V \in V_{(x)}, x \in V \Rightarrow \{x\} \subset V$. *Il suffit de prendre* $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$. *Qui est une base finie pour* $V_{(x)}$.

$(E, \mathcal{P}(E))$ *ne vérifie pas le deuxième axiome de dénombrabilité. On suppose que* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{P}(E)$, *alors :*$\forall x \in E; \{x\} \in \mathcal{B}$. *On conclut que* $\mathcal{B}$ *n'est pas dénombrable car* E *ne l'est pas. (Bijection entre* $\mathcal{B}$ *et* E*).*

Proposition 4.10 *Tout espace topologique qui vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité vérifie nécessairement le premier. La réciproque est fausse.*

Preuve 4.14 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* $\mathcal{B}$ *une base dénombrable.*

$\forall x \in E$, $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B},\ x \in B\}$, *donc* $\mathcal{B}(x) \subset V_{(x)}$, *alors* $\mathcal{B}(x)$ *est dénombrable car* $\mathcal{B}$ *l'est.*

Premier axiome :

$\forall V \in V_{(x)}, \exists B \in \mathcal{B}(x) \overset{?}{\Rightarrow} B \subset V$

$V \in V_{(x)} \Rightarrow \exists U \in O/x \in U \subset V$, *mais comme* $\mathcal{B}$ *est une base de* O *ceci implique l'existence* $B \subset \mathcal{B}$ *tel que* $B \subset U$.

On a $U \in O$ *et* $x \in U \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in B \subset U$ *et d'après la définition de* $\mathcal{B}(x)$:

$\exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset V$.

Séparabilité

Définition 4.23 *On dit que l'espace topologique* (E, O) *est séparable s'il existe un sous-ensemble de E partout dense dans E et dénombrable. Autrement dit :* $\exists A \subset E/\overline{A} = E$ *et A est dénombrable.*

Exemple 4.16 $(\mathbb{R}, |.|)$ *est séparable car* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Soit E un ensemble infini. L'espace topologique $(E, \mathcal{P}(E))$ *n'est pas séparable car :* $\forall A \subset \mathcal{P}(E); \overline{A} = A$ *et* $\overline{E} = E$ *mais E n'est pas dénombrable par hypothèse.*

Proposition 4.11 *Tout espace topologique vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est séparable. La réciproque est fausse.*

Preuve 4.15 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* $\mathcal{B} = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *une base de* O.

Est ce qu'il existe A dénombrable tel que $\overline{A} = E$ *?*

Soit $a_n \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *donc* $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est dénombrable.*

A est-t-il dense dans E ?

$\forall x \in E \overset{?}{\Rightarrow} x \in \overline{A}$

$\forall x \notin A \Rightarrow x$ *est un point d'accumulation de A ?*

x *est un point d'accumulation de* $A \Rightarrow x \in \overline{A}$.

$V \in V_{(x)} \Rightarrow \exists B_{n_0} \in \mathcal{B}$ *tel que* $B_{n_0} \subset V$ *(*$\mathcal{B}$ *est une base). Mais* $a_{n_0} \in B_{n_0} \subset V \Rightarrow x \neq a_{n_0}$ *(car* $\notin A) \Rightarrow V \backslash \{x\} \cap A \neq \phi$.

Ce qui prouve que x est un point d'accumulation et ceci implique que $x \in \overline{A}$.

4.9 Topologie induite,Topologie produit

4.9.1 Topologie induite par une famille d'applications

Soient $(E_i, O_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On définit une fonction $f_i : X \longrightarrow E_i$, tel que X est un ensemble non vide. On cherche une topologie sur X qui rend f_i continue et ceci quelque soit i dans I.

f_i continue$\Longleftrightarrow f_i^{-1}(u_i)$ est ouvert quelque soit i dans I.

Posons $S = \bigcup\limits_{i \in I} \left\{ f_i^{-1}(u_i), u_i \in O_i \right\}$ et on prend O la topologie engendrée par S sur X.

Définition 4.24 *La topologie O est appelée topologie induite par f_i.*

Théorème 4.2 *Les applications $(f_i)_{i\in I}$ sont continues sur (X, O).*
O est l'intersection de toutes les topologies définies sur X qui rendent f_i continue.
O est la topologie la moins fine définie sur X et qui rend f_i continue.

4.9.2 Topologie produit

Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques, on va définir une topologie sur l'ensemble $E = E_1 \times E_2$.

Définition 4.25 *On appelle ouvert élémentaire de $E = E_1 \times E_2$, tout ensemble de E de la forme $O = O_1 \times O_2$ où O_1 est un ouvert de E_1 et O_2 est un ouvert de E_2.*

Définition 4.26 *On appelle ouvert de $E = E_1 \times E_2$, toute réunion d'ouverts élémentaires.*

Proposition 4.12 *l'ensemble $E = E_1 \times E_2$, munit des ouverts réunions d'ouverts élémentaires définie une topologie.*

Preuve 4.16 *Si on désigne par τ l'ensemble des ouverts définis précédemment on a :*

1. *E et ϕ appartiennent à τ. En effet $E = E_1 \times E_2$ et $\phi = \phi \times \phi$ qui sont deux ouverts élémentaires.*
2. *Soient U, V deux élément de τ alors $U = \underset{i\in I}{\cup} O_i, V = \underset{j\in J}{\cup} O'_j$ où O_i et O_j sont deux ouverts élémentaires, il s'en suit que $U \cup V = \underset{(i,j)\in I\times J}{\cup} O_i \times O'_j$ où $O_i \times O'_j$ est un ouvert élémentaire, donc $U \cup V \in \tau$.*
3. *Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de τ alors $U_i = \underset{k\in K}{\cup} O_{i,k}$ où $O_{i,k}$ est un ouvert élémentaire, il s'en suit que $\underset{i\in I}{U_i} = \underset{(i,k)\in I\times K}{\cup} O_{i,k}$ est réunion d'ouverts élémentaires qui appartient à τ.*
   Il en résulte que (E, τ) est un espace topologique.

Voisinages dans un espace produit

Soient l'espace topologique produit $E = E_1 \times E_2$ et $\in E_1 \times E_2$, alors.

Définition 4.27 *On appelle voisinage de (x_1, x_2), l'ensemble $V_1 \times V_2$ où $V_1 \in V_{(x_1)}$ et $V_2 \in V_{(x_2)}$.*

Espace topologique séparé

Définition 4.28 *Soient $E = E_1 \times E_2$ un espace topologique produit et (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux éléments de E distincts. E est séparé s'il existe deux voisinages W_1 et W_2 de (x_1, x_2) et (y_1, y_2) tels que $W_1 \cap W_2 = \phi$.*

Proposition 4.13 *Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques alors si E_1 et E_2 sont séparés alors $E = E_1 \times E_2$ l'est aussi et réciproquement.*

Preuve 4.17 *Soient* (x_1, x_2) *et* $(y_1, y_2) \in E = E_1 \times E_2$ *avec* $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ *ce qui entraîne soit* $x_1 \neq y_1$ *soit* $x_2 \neq y_2$*. Supposons* $x_1 \neq y_1$ *et soient* $V_1 \in V_{(x_1)}$ *et* $V_1' \in V_{(y_2)}$*.deux voisinages disjoints de* x_1 *et* y_1*(ce qui est possible puisque* E_1 *est séparé) alors* $W_1 = V_1 \times E_2$ *et* $W_2 = V_1' \times E_2$ *sont deux voisinages disjoints de* (x_1, x_2) *et* (y_1, y_2)*. Réciproquement supposons* $E = E_1 \times E_2$ *séparé et montrons que* E_1 *et* E_2 *sont séparés.*

Soient $x_1, y_1 \in E_1$ *et* $x_1 \neq y_1$ *alors* $\forall x_2 \in E_2, (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ *il existe* $W_1 \in V_{(x_1,x_2)}$ *et* $W_1' \in V_{(y_1,y_2)}$ *tels que* $W_1 \cap W_1' = \phi$*. Or* $W_1 = V_1 \times V_2$ *où* $V_1 \in V_{(x_1)}$ *et* $V_2 \in V_{(x_2)}$ *et* $W_1' = V_1' \times V_2'$ *où* $V_1' \in V_{(x_1)}, V_2' \in V_{(x_2)}$ *et* $W_1 \cap W_1' = \phi \Longrightarrow V_1 \cap V_1' = \phi \Longrightarrow E_1$ *est un espace topologique et séparé, on démontrerait de la même façon que* E_2 *est séparé.*

Diagonale de l'espace produit E

Définition 4.29 E *étant un espace topologique, on appelle diagonale* Δ *de l'espace topologique produit* $E \times E$ *l'ensemble définit par*

$$\Delta_{E\times E} = \{(x, x) : x \in E\}$$

Proposition 4.14 *La diagonale de* $E \times E$ *est fermée si et seulement si* E *est séparé.*

Preuve 4.18 *Soit* E *un espace topologique séparé, alors l'espace produit* $E \times E$ *est séparé, soit* $(x, y) \notin \Delta$ *alors* $x \neq y$ *et il existe alors* $V_1' \in V_{(x)}$ *et* $V_2' \in V_{(y)}$ *tels que* $V_1 \cap V_2 = \phi$*, or* $W = V_1 \times V_2 \in V_{(x,y)}$ *et* $W \cap \Delta = \phi$ *car si* $W \cap \Delta \neq \phi \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \neq \phi$*, ce qui implique que* $C_{E\times E}^{\Delta}$ *est voisinage de chacun de ses points donc ouvert et* Δ *est fermée dans* $E \times E$*.*

Réciproquement supposons que Δ *est fermée dans* $E \times E$ *et soient* $x, y \in E$ *avec* $x \neq y$ *alors* $(x, y) \notin \Delta$ *et comme* $C_{E\times E}^{\Delta}$ *est un ouvert donc il est voisinage de chacun de ses points :*$\exists W = V_1 \times V_2$ *où* $V_1 \in V_{(x)}$ *et* $V_2 \in V_{(y)}$ *tel que* $W \cap \Delta = \phi \Longrightarrow E$ *est séparé.*

Chapitre 5

Continuité et convergence

5.1 Continuité

5.1.1 Rappel

Définition 5.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est continue en x_0 si :*$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Définition 5.2 *Soit $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ une fonction d'un espace topologique dans un autre. On dit que f est continue en x_0 si et seulement si :*

$$\forall W \in V_{f_{(x_0)}} \Rightarrow \exists V \in V_{(x_0)}; f(V) \subset W.$$

Exemple 5.1 *f :(E,O_E)$\longrightarrow$(F,O_F): $x \mapsto f(x) = a$ (constance).*

$w \in V_{(a)}; \exists V \in V_{(x)} : f(V) \subset W$.

f est constante $\Rightarrow f(E) \subset \{a\} \subset W$. Il suffit de prendre $V = E$ et ceci $\forall x \in E$.

Exemple 5.2 *$f : (E, \mathcal{P}(E)) \longrightarrow (F, O_F)$ est continue en tout $x \in E$.*

$x \in E$, soit $W \in V_{f(x)}$ quelconque et $V = \{x\} \in V_{(x)}$ alors : $f(V) = \{f(x)\} \subset W$.

Exemple 5.3 *Soit $E = \{a, b, c, d\}$, $O = \{E, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, O est une topologie sur E. On définit l'application suivante :$f : (E, O) \longrightarrow (E, O)$ par : $f(a) = b, f(b) = d, f(c) = b, f(d) = c$.*

f est continue en d.

f n'est pas continue en $c : c = f(d)$ et $b = f(c)$.

$V_{(c)} = \{E, \{b, c, d\}\}, V_{(d)} = \{E, \{b, c, d\}\}$, $V_{(b)} = \{E, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, a$

$W \in V_{f(d)}$, soit $W = E$ donc il suffit de prendre $V = E$ $(F(V) \subset W = E$. Soit $W = \{b, c, d\}$ il suffit de prendre $V = \{b, c, d\}$ $f(V) = W$.

$W \in V_{f(c)} \overset{?}{\Rightarrow} \exists V \in V_{(c)}$ tel que $f(V) \subset W$. $W = \{a, b\} \in V_{f(c)}$. $V \in V_{(c)} \Rightarrow (V = E \Rightarrow f(V) \nsubseteq W)$ ou $(v = \{a, b, d\} \Rightarrow f(V) \nsubseteq W)$.

Proposition 5.1 *Soient $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ et $f : (F, O_F) \longrightarrow (G, O_G)$ telles que : f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors : gof est continue en x_0.*

Preuve 5.1 $f(x_0) = y_0$ *et* $(gof)(x_0) = g(y_0) = z_0$.
$\forall W \in V_{(z_0)} \overset{?}{\Rightarrow} \exists V \in V_{(x_0)}$ *tel que* $(gof)(V) \subset W$.
$W \in V_{(z_0)} \Rightarrow \exists U \in V_{(y_0)}$ *tel que* $g(U) \subset W$.
$U \in V_{(y_0)} \Rightarrow \exists V \in V_{(x_0)}$ *tel que* $f(V) \subset U$.
$\Rightarrow (gof)(V) = g(f(V)) \subset g(U) \subset W$.

Remarque 5.1 *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*

Proposition 5.2 *Soit* $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ *une fonction d'un espace topologique dans un autre. On dit que* f *est continue en* x_0 *si et seulement si :*

$$\forall W \in V_{f_{(x_0)}} \Rightarrow f^{-1}(W) \in V_{(x_0)}.$$

telle que

$$f^{-1}(W) = \{x \in E : f(x) \in W\}.$$

Preuve 5.2 *C.N*
$\forall W \in V_{f_{(x_0)}} \Rightarrow \exists V \in V_{(x_0)}$ *tel que* $f(V) \subset W \Rightarrow V \in f^{-1}(W) \Rightarrow f^{-1}(W) \in V_{(x_0)}$.
C.S
$W \in V_{f(x_0)}$ *tel que* $f^{-1}(W) \in V_{(x_0)}$. *Il suffit de prendre* $f^{-1}(W) = V$
$\Rightarrow f(V) \in W$.

Exemple 5.4 *Soient* $(E = \{a, b, c, d\},\ O_E = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\})$ *et* $(F = \{x, y, z, t\}, \{\phi, F, \{x\}\{x, y\}, \{x, y, z\}\})$.
On définit deux applications f *et* g *comme suit :*
$f(a) = f(b) = x, f(c) = y, f(d) = t;\ g(x) = b, g(y) = c, g(z) = a, g(t) = d$.

1. *Monter que* g *n'est pas continue en* $t = f(d)$.
2. *Monter que* (gof) *est continue en* d.

5.1.2 Continuité sur un ensemble

Définition 5.3 *Soient* $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ *une fonction d'un espace topologique dans un autre et* A *une partie de* E. *On dit que* f *est continue sur* A *si elle est continue en tout point de* A.

Exemple 5.5 *Soit* $f : (\mathbb{N}, O_\mathbb{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, O_\mathbb{R})$ *telles que* $O_\mathbb{N} = \{\phi, \mathbb{N}, \{0, 1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}\}$, $O_\mathbb{R}$ *est la topologie engendée par* $B_\mathbb{R} = \{\phi, \mathbb{R}, [0, x], x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que f *est continue.*

Solution 5.1 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. f *est-elle continue en* n.
Soit $W \in V_{f(n)} \overset{?}{\Rightarrow} \exists V \in V_{(n)}\ /\ f(V) \subset W$.
$W \in V_{f(n)} \Rightarrow \exists [0, x]\ / f(n) \in [0, x] \subset W \Rightarrow \exists [0, x]\ / n + 1 \in [0, x] \subset W$.
On peut prendre $V = [0, n]$, *car* $f(V) \subset [0, x] \subset W$. $(f(V) = \{[0, n]\} = \{1, 2, 3, ..., n + 1\}$.

Exemple 5.6 $f : (\mathbb{N}, O'_\mathbb{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, O_\mathbb{R})$ *telle que* $O'_\mathbb{N} = \{\phi, \mathbb{N}, \{0, 1, ..., n\}, n \geq 1\}$.
$O'_\mathbb{N}$ *définit une topologie sur* $\mathbb{N}$ *moins fine que* $O_\mathbb{N}$.
f *n'est pas continue sur* $\mathbb{N}$ *muni de* $O'_\mathbb{N}$ *car* f *n'est pas continue en point* 0.
En effet , on remarque que $[0, 0] = \{0\}$ *n'appartient pas à* $O'_\mathbb{N}$ *et par conséquent il existe un ouvert* $\{0\}$ *tel que* f *n'est ps définie sur cet ouvert ce qui implique que* f *n'est pas continue.*

Théorème 5.1 *Soit* $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ *une fonction. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue.*
2. $\forall W \in O_F \Rightarrow f^{-1}(W) \in O_E$.
3. $\forall B \subset F, C_F^B \in O_F \Rightarrow C_E^{f(B)} \in O_E$.

Preuve 5.3 *On montre que* $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$

$W \in O_F \Leftrightarrow W \in V_{(y)}, \forall y \in W$.

Soit $x \in f^{-1}(W) \Rightarrow f(x) \in W$ *et* $W \in V_{f(x)}$.

f *continue*$\Rightarrow f^{-1}(W) \in V_{(x)} \Rightarrow f^{-1}(W) \in O_E$.

$(2) \Rightarrow (3)$

On a $C_E^{f^{-1}(B)} = f(C_F^B)$

En effet :

1. $x \in C_E^{f^{-1}(B)} \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \notin B \Rightarrow f(x) \in C_F^B \Rightarrow x \in f^{-1}(C_F^B)$.
2. $x \in f^{-1}(C_F^B) \Rightarrow f(x) \in C_F^B \Rightarrow f(x) \notin B \Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow x \in C_E^{f^{-1}(B)}$.

Soit $B \subset F, C_F^B \in O_F \Rightarrow f^{-1}(C_F^B) \in O_F$?

$f^{-1}(C_F^B) = C_E^{f^{-1}(B)} \in O_E \Rightarrow f^{-1}(B)$ *est fermé.*

$(3) \Rightarrow (1)$

Soit $x \in E \Rightarrow f(x) \in F$.

Soit $W \in V_{f(x)} \Rightarrow \exists U$ *ouvert de* O_F *tel que* $f(x) \in U \subset W$.

En effet C_F^U *est fermé*$\Rightarrow f^{-1}(C_F^U) = C_F^{f^{-1}(U)}$ *est fermé*$\Rightarrow f^{-1}(U)$ *est ouvert.*

Mais $U \subset W \Rightarrow f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$ *tel que* $x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(W) \in V_{(x)}$.

Alors f *est continue.*

Remarque 5.2 *Soit* $f : (E, O_E) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$.

Montrer que si f *est continue alors* $f^{-1}(\{0)\}$ *est fermé.(*$\{0\}$ *est fermé).*

Théorème 5.2 *Soient* $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ *et* $g : (F, O_F) \longrightarrow (G, O_G)$.

Si f *et* g *sont continues alors* fog *est continue.*

5.2 Homéomorphisme

Définition 5.4 *Soient* (E, O_E) *et* $(F; O_F)$ *deux espaces topologiques et* f *une application de* (E, O_E) *dans* (F, O_F). *On dit que* f *est un homéomorphisme si :*

1. f *est bijective.*
2. f *est continue.*
3. f^{-1} *est continue.*

Exemple 5.7 $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) : x \mapsto x^3, \quad g : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) : x \mapsto \alpha x + \beta$.

Remarque 5.3 *La continuité de* f^{-1} *est une condition nécessaire dans la définition d'un homéomorphisme.*

f *est bijective.*

Exemple 5.8 $f : (E, \mathcal{P}(E)) \longrightarrow (E, O) : x \mapsto f(x) = x$

Remarque 5.4 *f est continue* $\Leftrightarrow \forall W \in O : f^{-1}(W) = W \subset \mathcal{P}(E)$.
Si $O \subsetneq \mathcal{P}(E)$, *alors* f^{-1} *n'est pas continue.*
$f^{-1} : (E, O) \longrightarrow (E, \mathcal{P}(E)) : x \mapsto f^{-1}(x) = x$
Car il existe $W \in \mathcal{P}(E)$ *tel que* $W \notin O$.

Proposition 5.3 *Soient E et F deux espaces topologiques et f une bijection continue de E dans F alors :*
f est un homéomorphisme si et seulement si l'image directe de tout ouvert dans E est un ouvert dans F.
ou si et seulement si l'image directe de tout fermé dans E est un fermé dans F.

Preuve 5.4 *Si f est un homéomorphisme alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue et par conséquent*
$\forall U$ *ouvert de* $E : (f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ *est ouvert dans* F.
Réciproquement
Soit U un ouvert de E, alors $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est un ouvert de F et par conséquent f^{-1} est continue.

5.3 Séparabilité (espaces de Haussdorf)

Définition 5.5 *On dit que (E, O) est séparé (ou un espace de Haussdorf) si :*

$$\forall x, y \in E : x \neq y \Rightarrow \exists V \in V_{(x)} \text{ et } \exists W \in V_{(y)} : V \cap W = \phi.$$

Exemple 5.9 *L'espace* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace de Haussdorf.*

Exemple 5.10 $(E, \mathcal{P}(E))$ *est séparé.*

Exemple 5.11 *Soit E un ensemble non vide et soit $a \in E$.*
$O_E = \{A \subset E, a \in A\} \cup \{\phi\}$.
(E, O_E) *forme un espace topologique.*
(E, O_E) *n'est pas séparé.*

Proposition 5.4 *Soit (E, O) est un espace topologique séparé, alors :*

$$\forall a \in E : \bigcap_{V \in V_{(a)}} V = \{a\}.$$

Preuve 5.5 $a \in \bigcap\limits_{V \in V_{(a)}} V$ *car* $a \in V, \forall V \in V_{(a)}$.
$a \neq b \Rightarrow y \notin \bigcap\limits_{V \in V_{(a)}} V$.
$y \neq a \Rightarrow \exists V \in V_{(a)}, \exists W \in V_{(y)} : V \cap W = \phi$
$\Rightarrow \exists V \in V_{(a)}$ *et* $y \notin V$.

Exercise 5.1 *Soient* $f, g : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ *deux fonctions continues.*
Montrer que si F est séparé alors $A = \{x \in E / g(x) = f(x)\}$ est fermé.

5.4 L'ensemble des applications qui séparent les points

Définition 5.6 *Soient (E, O_E) et $(F; O_F)$ deux espaces topologiques. Une partie A de l'ensemble des applications de E dans F ($\mathcal{F}(E,F)$) sépare les points de E si, pour tous x, y de E tels que $x \neq y$, il existe une application f de A telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Exemple 5.12 *Soit l'ensemble $A = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \sin x\}$.*
A ne sépare pas les points car : $x = 0$ et $y = \pi$ mais $f(0) = f(\pi)$.

Proposition 5.5 *Soient (E, O_E) un espace topologique et $C(E, \mathbb{R}) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue$\}$.*
Si $C(E, \mathbb{R})$ sépare les points alors l'espace (E, O_E) est séparé.

Preuve 5.6 *Soient a et b deux points de E tels que $a \neq b$. $\exists$ une application f de $C(E, \mathbb{R})$ telle que $f(a) \neq f(b)$.*
$\mathbb{R}$ est un espace séparé et $f(a) \neq f(b) \Longrightarrow \exists V_1 \in V_{f(a)}$ et $\exists W_1 \in V_{f(b)}$ tels que $V_1 \cap W_1 \neq \phi$. Mais l'application f est continue donc $v = f^{-1}(V_1) \in V_{(a)}$, $W = f^{-1}(W_1) \in V_{(b)}$ et $V \cap W = \phi$.

Proposition 5.6 *Soient (E, O_E) et $(F; O_F)$ deux espaces topologiques et f un homéomorphisme de (E, O_E) dans (F, O_F). Alors : (E, O_E) est séparé si et seulement si $(F; O_F)$ est séparé.*

Preuve 5.7 *Supposons que (F, O_F) est séparé et que f est un homéomorphisme$\Rightarrow (E, O_E)$ est séparé ?*
Soient a, b de E tels que $a \neq b \overset{?}{\Rightarrow} v \in V_{(a)}$, $W \in V_{(b)}$ et $V \cap W = \phi$.
En effet si $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ (car f est injective). Mais (F, O_F) est séparé donc $\exists V_1 \in V_{f(a)}$ et $\exists W_1 \in V_{f(b)}$ tels que $V_1 \cap W_1 \neq \phi \Rightarrow v = f^{-1}(V_1) \in V_{(a)}$, $W = f^{-1}(W_1) \in V_{(b)}$ et $V \cap W = \phi$ (f est continue).
Supposons que (E, O_E) est séparé et que f est un homéomorphisme$\Rightarrow (F, O_F)$ est séparé ?
même raisonnement.

5.4.1 Convergence

Définition 5.7 *Soient (E, O_E) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers x de E si et seulement si $\forall V \in V_{(x)}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.*

Exemple 5.13 *Soit E un ensemble infini. On définit la topologie $O_E = \{A \subset E, C_E^A$ fini$\} \cup \{\phi\}$ sur E. On a :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } x \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x.$$

Preuve 5.8 *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x$.*
Soit $B = \{x_n \in E : x_n \neq x\}$. On montre que B est fini. Si B est fini ceci implique que C_E^B est un ouvert.
$x \notin B \Rightarrow x \in C_E^B \Rightarrow C_E^B \in V_{(x)}$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in C_E^B$. C-à-d $x_n \neq x$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x (Par définition).

Théorème 5.3 *Soient (E, O_E) un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E convergente dans E. Alors elle admet une limite est unique.*

Preuve 5.9 *On suppose que $x_n \longrightarrow a$ et $x_n \longrightarrow b$ tels que $a \neq b$.*
$\forall V \in V_{(a)} \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in V$.
$\forall W \in V_{(b)} \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in W$.
Comme $a \neq b$ et (E, O_E) est un espace topologique séparé, alors $\exists V \in V_{(a)}$ et $\exists W \in V_{(b)}$ tels que $V \cap W = \phi$.
Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \in V \cap W = \phi$. Contradiction.

Remarque 5.5 *Si (E, O_E) est un espace topologique non séparé alors une suite peut avoir plusieurs limites.*

Exemple 5.14 *Soit E un ensemble quelconque et soit $O = \{\phi, E\}$ (topologie discète).*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, alors $x_n \longrightarrow x$,$\forall x \in E$. Car $\forall V = E \in V_{(x)} : x_n \in V = E$.

Sous-suites

Définition 5.8 *Soient (E, O_E) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Soit $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$. La suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est appelée sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Théorème 5.4 *Soient (E, O_E) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Soit $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x de E, alors la sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers converge vers x de E. La réciproque est fausse.*

Preuve : exercice

5.4.2 Convergence des suites et applications continues

Proposition 5.7 *Soient $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ une application continue en x, alors :$\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $x_n \longrightarrow x \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$.*

Preuve 5.10 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $x_n \longrightarrow x \overset{?}{\Rightarrow} f(x_n) \longrightarrow f(x)$.*
Soit $W \in V_{f(x)} \overset{f\ continue}{\Rightarrow} V = f^{-1}(W) \in V_{(x)}$.
$x_n \longrightarrow x \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.
$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in f(V) = W$. Ceci implique que $\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$ d'après la définition de la convergence.

Remarque 5.6 *La réciproque est fausse.*

Exemple 5.15 *Soient $(\mathbb{R}, O_1) = (\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathbb{R}, O_2)$ telle que $O_2 = \{A \subset \mathbb{R}, C_{\mathbb{R}}^A$ fini ou dénombrable$\} \cup \{\phi\}$. Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, O_2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, O_1) \\ x & \longrightarrow & x \end{array}$$

1. *f n'est pas continue car O_1 est plus fine que O_2. $]0,1[\in O_1$ mais $]0,1[\notin O_2$*
   $f^{-1}(]0,1[) =]0,1[\notin O_2$, donc f n'est pas continue.
2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(\mathbb{R},O_2)}{\longrightarrow} x \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x$*
   donc $f(x_n) = f(x)$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$ dans $(\mathbb{R}, O_1)$.

5.4.3 Les points adhérents d'une suite

Définition 5.9 *Soient (E, O_E) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que le point a est adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il vérifie la propriété suivante :*

$$\forall V \in V_{(x)}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n : x_p \in V.$$

Remarque 5.7 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, alors $B = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} B_n$ tels que :*

$$B = \{x_n, n \in \mathbb{N}\},\ B_n = \{x_p, p < n\}.$$

Proposition 5.8 *Soit $A_n = \{x_p, p \geq n\}$. Le point a est adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si a est adhérent à $A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

i.e le point a est adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow a \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \overline{A}_n$.

Preuve 5.11 $a \in \overline{A}_n \Leftrightarrow (\forall V \in V_{(a)} : V \cap A_n \neq \phi)$.

$\Leftrightarrow (\forall V \in V_{(a)} : \exists p \geq n : x_p \in V)$.

Exemple 5.16 *Dans $\mathbb{R}$ on considère la suite $x_n = (-1)^n$.*

La suit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \{x_p, p \geq n\} = \{-1, 1\} \Rightarrow \overline{A}_n = \{-1, 1\}$.

Exemple 5.17 *Soient (E, O_E) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $x_n \longrightarrow x$ alors x est un point adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 5.10 *x est un point adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\forall V \in V_{(x)}; \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n : x_p \in V)$.*

x est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\forall V \in V_{(x)}; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : x_n \in V)$.

Exercise 5.2 *Soient (E, O_E) un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $x_n \longrightarrow x$ alors x est l'unique point adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Solution 5.2 *Sinon $x \neq y$ et (y valeur adhérente)*

$\Rightarrow \exists V \in V_{(x)}, \exists W \in V_{(y)} : V \cap W = \phi$.

$x_n \longrightarrow x \Leftrightarrow (\forall V \in V_{(x)}; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p > n_0 : x_p \in V) \Rightarrow \forall p > n_0 : x_p \in W$ *(il suffit de prendre $n = n_0$)*

y est un point adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\forall V \in V_{(y)}; \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n : x_p \in V)$.

Contradiction avec $V \cap W = \phi$.

Remarque 5.8 *La réciproque est fausse. i.e il existe des suites divergentes et admettant une seule valeur adhérente.*

Exemple 5.18 *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par*

$$x_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 3p+1 \\ 2p+1 & si\ n = 3p+2 \\ 2p+2 & si\ n = 3p+3 \end{cases}$$

$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \{1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 6, 7, 1, 8, 9, ...\}$

La valeur 1 est la seule valeur adhérente à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5.19 *Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n = n$.*

La suite est divergente et ne possède aucune valeur adhérente.

Chapitre 6

Espaces compacts

6.1 Généralités sur les espaces compact

6.1.1 Recouvrement

Définition 6.1 *Soient $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'ensembles de E et I un ensemble d'indices quelconque. On dit que $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement de E si $E = \underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha$.*

1. Si I est fini ou dénombrable on dit que le recouvrement est fini ou dénombrable.
2. Soient (E,O) un espace topologique et $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'ensembles de E .
   Si $\forall\alpha \in I : A_\alpha \in O$, on a un recouvrement ouvert.
   Si $\forall\alpha \in I : C_E^{A_\alpha} \in O$, on a un recouvrement fermé.

Exemple 6.1 *Soient E un ensemble et A une partie de E, alors A et C_E^A forment un recouvrement de E : $E = A \cup C_E^A$.*

Exemple 6.2 *Dans l'espace topologique usuel $(\mathbb{R}, |.|)$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $A_n =]-n, n[$ forme un recouvrement ouvert dénombrable.*

6.2 Espace compact

Définition 6.2 *Soit (E,O) un espace topologique. On dit que (E,O) est un espace topologique compact si et seulement si :*

1. *l'espace (E,O) est séparé.*
2. *De tout recouvrement ouvert de E on peut en extraire un recouvrement fini.*

$$E = \underset{\alpha\in I}{\cup} A_\alpha, A_\alpha \in O \Rightarrow \exists J \subset I (J \text{ fini}) \text{ et } E = \underset{\alpha\in J}{\cup} A_\alpha.$$

Exemple 6.3 *L'espace topologique usuel $(\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas compact. Car $\mathbb{R} = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup}]-n, n[$. On suppose qu'on a un recouvrement fini, ceci implique l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\underset{n\leq n_0}{\cup}]-n, n[=]n_0, n_0[\neq \mathbb{R}$.*

Exemple 6.4 *Si E est fini alors $(E, P(E))$ est compact.*

Proposition 6.1 *L'espace topologique (E, O) est compact si et seulement si*

1. *L'espace topologique (E, O) est séparé.*
2. *De toute famille de fermés de E ayant une intersection vide, on peut en extraire une sous famille finie ayant une intersection vide.*

Preuve 6.1 *On a* $\underset{\alpha \in I}{\cap} F_\alpha = \phi \Leftrightarrow E = C_E^{\underset{\alpha \in I}{\cup} A_\alpha} = \underset{\alpha \in I}{\cup} C_E^{A_\alpha}$. *Ce qui achève la démonstration.*

6.3 Les points adhérents dans un espace topologique compact

Remarque 6.1 *Soit (E, O) un espace topologique quelconque. Il peut exister :*

1. *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E sans aucune valeur d'adhérence.*
2. *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E admettant une valeur d'adhérence unique mais qui n'est pas convergente.*

Proposition 6.2 *Soit (E, O) un espace topologique compact.*

1. *Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E admet au moins une valeur d'adhérence.*
2. *Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E admettant une valeur d'adhérence unique est convergente vers cette valeur.*

Proposition 6.3 (Caractérisation des espaces topologiques compacts) *Soit (E, O) un espace topologique compact.*

1. *Soient $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de férmés non vides. On suppose que $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ est totalement ordonée par rapport à l'inclusion alors :* $\underset{\alpha \in I}{\cap} F_\alpha \neq \phi$.
2. *Si on suppose que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante $(F_{n+1} \subset F_n)$ et que F_n est fermé et non vide alors* $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} F_n \neq \phi$.

Preuve 6.2 *1) Posons $A_n = \{x_p ; p \geq n\}$.*

Le point x est une valeur d'adhérence à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\Longleftrightarrow (\forall V \in V_{(x)} : \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n$ *tq* $x_p \in V) \Leftrightarrow x \in \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \overline{A}_n$.

On a par définition de A_n : $\overline{A}_{n+1} \subset \overline{A}_n$ et $\overline{A}_n \neq \phi$.

D'aprés la proposition précédente (2) on a : $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \overline{A}_n \neq \phi$.

2) On suppose que $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \overline{A}_n = \{x\}$.

$$x_n \longrightarrow x \Leftrightarrow \forall V \in V_{(x)} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : x_n \in V)$$

$\exists U \in O : x \in U \subset V$.

On pose :

$$F_n = \overline{A}_n \cap (C_E^U)$$

F_n est fermé et $F_{n+1} \subset F_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} F_n = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} (\overline{A}_n \cap (C_E^U)) = (\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \overline{A}_n) \cap (C_E^U) = \{x\} \cap (\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \overline{A}_n) = \phi$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : F_N = \phi \Leftrightarrow \overline{A}_n \cap C_E^U = \phi \Rightarrow \overline{A}_n \subset U \Rightarrow \forall n > N : x_n \in U \subset V$.

Preuve 6.3 *(2) est un cas particulier de (1). Il suffit de prouver donc (1).*
Soit (E,O) un espace topologique séparé et supposons que $\underset{\alpha\in I}{\cap} F_\alpha = \phi$
$\Rightarrow \exists J$ *fini* $J \subset I$ *tq* $\underset{\alpha\in I}{\cap} F_\alpha = \phi \Rightarrow \exists \alpha_0 \in J : \underset{\alpha\in I}{\cap} F_\alpha = F_{\alpha_0} = \phi$. *Condraction.*

6.4 Point d'accumulation dans un compact

6.4.1 Rappel

Soient (E, O) un espace topologique et A une partie de E $(A \subset E)$.

Soit x de E. On dit que le point x est un point d'accumulation de A si et seulement si $\forall V \in V_{(x)} : V - \{x\} \cap A \neq \phi$

6.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 6.1 *Soit* (E, O) *un espace topologique compact.*

1. *Toute partie infinie A de E admet au moins un point d'accumulation.*
2. *Une partie A de E n'admettant pas un point d'accumulation est une partie finie.*
3. *Dans* $\mathbb{R}$ *toute partie infinie et bornée admet un point d'accumulation.*

Preuve 6.4 ***1)*** *Par absurde :*
Supposins que A soit infinie et n'admettant aucun point d'accumulation alors :

$$\forall x \in E \Rightarrow \exists V_x \in V_{(x)} : V \cap A = \begin{cases} \phi \\ ou \\ \{x\} \end{cases}$$

donc $\{V_x, x \in E\}$ *forme un recouvrement de E ceci implique l'existence d'un ensemble fini J de E tel que* $E = \underset{x\in J}{\cup} V_x$, *d'ou :* $A = A \cap E = A \cap (\underset{x\in J}{\cup} V_x) = \underset{x\in J}{\cup} (A \cap V_x)$, *il s'en suit que A est finie. Contraduction*

(2) est la négation de (1).

3) Soit A une partie infinie et bornée de $\mathbb{R} \Rightarrow A \subset [a, b] (a < b)$, *mais* $[a, b]$ *est compact. On applique (2).*

6.5 Les sous espaces compacts

Soient (E, O) un espace topologique et A une partie de E. Soit O_A la topologie induite sur A.

Définition 6.3 *Soient* (E, O) *un espace topologique et A une partie de E. On dit que A est compact si* (A, O_A) *l'est.*

Exemple 6.5 *Dans l'espace topologique usuel* $(\mathbb{R}, |.|)$ *tout intervalle fermé et borné* $[a, b]$ *est compact.*

Proposition 6.4 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* A *une partie de* E *alors :*

(A, O_A) *est compact* $\Leftrightarrow$ *de tout recouvement ouvert dans* (E, O) *on peut en extraire un sous recouvrement fini.*

Preuve 6.5 $\Rightarrow$) *Soit* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ *un recouvrement de* A ($U_\alpha \in O$)

$A \subset \underset{\alpha\in I}{\cup} U_\alpha$, *mais* $A \cap U_\alpha \in O_A$ *et* $A = \underset{\alpha\in I}{\cup}(A \cap U_\alpha)$, *comme* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ *est un recouvrement de* A, *alors* $\exists J$ *fini de* I *tel que* $A = \underset{\alpha\in J}{\cup}(A \cap U_\alpha) \Rightarrow A \subset \underset{\alpha\in J}{\cup}(A \cap U_\alpha)$.

$\Leftarrow$) *Soit* $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ *un recouvrement de* A.

$V_\alpha \in O_A \Rightarrow \exists U_\alpha \in O : V_\alpha = A \cap V_\alpha$.

$A = \underset{\alpha\in I}{\cup} V_\alpha \Rightarrow A \subset \underset{\alpha\in I}{\cup} U_\alpha \Rightarrow \exists J$ *fini* $\subset I$ *tel que* $A \subset \underset{\alpha\in J}{\cup} U_\alpha \Rightarrow A = \underset{\alpha\in J}{\cup} V_\alpha$.

Corollaire 6.1 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E *convergente vers* x *alors :* $A = \{x, x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$ *est compact.*

Preuve 6.6 *Soit* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}, U_\alpha \in O$ *et* $A \subset \underset{\alpha\in I}{\cup} U_\alpha$.

$x \in A \Rightarrow \exists\beta : x \in U_\beta \in V_{(x)} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow x_n \in U_\beta$.

$\forall p < N : \exists\alpha_p : x_p \in U_{\alpha_p}$

donc $A \subset (\underset{0\leq p\leq N}{\cup} U_{\alpha_p}) \cup U_\beta$.

6.6 Théorèmes fondamentaux

Théorème 6.2 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* A *une partie de* E. *Si* A *est fermé dans* (E, O) *alors* A *est compact.*

Preuve 6.7 *Soient* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles fermés dans* (A, O_A). *On a :* $F_i = A \cap G_i$ *où* G_i *est fermé dans* (E, O).

A *est fermé dans* (E, O), *donc* F_i *est fermé dans* (E, O).

$\underset{i\in I}{\cap} F_i = \phi \Rightarrow \exists J$ *fini* $\subset I$ *tel que* $\underset{i\in j}{\cap} F_i = \phi \Rightarrow A$ *est compact.*

Théorème 6.3 *Soient* (E, O) *un espace topologique séparé et* A *une partie de* E. *Si* A *est compact dans* (E, O) *alors* A *est fermé.*

Preuve 6.8 *On montre que* C_E^A *est ouvert dans* E. *Alors il suffit qu'on montre que* C_E^A *est voisinage de tous ses points. Soit* $a \in \overset{\circ}{C_E^A}$, *comme* (E, O) *est séparé alors* $\forall x \in A \Rightarrow \exists V_x \in V_{(a)}, \exists W_x \in V_{(x)} : V_x \cap W_x = \phi$, *alors* $(\overset{\circ}{W_x})_{x\in A}$ *forme un recouvrement ouvert de* A. *Mais* A *est compact (par hypothèse) donc il existe* $x_0, x_1, ..., x_N \in A$ *tels que* $A \subset \underset{1\leq i\leq N}{\cup} W_i = W$.

On pose $V = \underset{1\leq i\leq N}{\cap} V_{x_i} \in V_{(a)}$.

$W_x \cap V_x = \phi \Rightarrow V \cap W = \phi \Rightarrow a \in V \subset C_E^A$. *Ce qu'il fallait démontré.*

Corollaire 6.2 *Soient* (E, O) *un espace topologique compact, séparé et* $A \subset E$, *alors on a :*

$$A \text{ compact} \Leftrightarrow A \text{ fermé}.$$

Théorème 6.4 *Soit* (E, O) *un espace topologique séparé.*

1. *Toute réunion finie d'ensembles compacts est un ensemble compact.*
2. *L'intersection quelconque d'ensembles compacts est un ensemble compact.*

Preuve 6.9 *Exercice.*

6.6.1 Continuité et compacité

Théorème 6.5 (WEIERSTRASS) *Soit $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ une application continue . Si les deux espaces topologiques sont compacts alors l'image $f(E)$ est compact .*

Preuve 6.10 *Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(E)$ dans F. Si f est continue alors $f^{-1}(V_i) \in O_E$.*

Comme $E = \underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(V_i)$ et E est compact alors il existe J fini de I tel que $E = \underset{i\in J}{\cup} f^{-1}(V_i)$.

Preuve 6.11 *On a $f(f^{-1}(V_i)) \subset V_i$.*

$(V_i)_{i\in J}$ forme un recouvrement ouvert de $f(E)$:

$$f(E) = f(\underset{i\in J}{\cup} f^{-1}(V_i)) = \underset{i\in J}{\cup} f(f^{-1}(V_i)) \subset \underset{i\in J}{\cup} V_i.$$

Corollaire 6.3 *Soit $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ une application continue et bejictive alors*

1. *Si E est compact et F est séparé alors F est compact et f est homéomorphisme.*
2. *$\forall A \subset E, A$ fermét alors $f(A)$ est fermé.*

Preuve 6.12 *Exercice.*

Théorème 6.6 *Soient $f : (E, O) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ une fonction continue et (E, O) espace compact alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve 6.13 *Comme E est compact et f est continue alors $f(E)$ est compact dans $\mathbb{R}$ donc $f(E)$ est borné et fermé, donc ils existent y_1 et y_2 de $\mathbb{R}$ tels que $y_1 \leq f(x) \leq y_2$ et ils existent x_1 et x_2 de E telles que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.*

Exemples et remarques

Remarque 6.2

1. *Soit la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

   comme $(\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas compact alors f est bornée mais n'atteint pas ses bornes.

2. *La fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

   est non bornée.

3. *La fonction*

$$\begin{aligned} f :]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

   est bornée mais n'atteint pas ses bornes.

6.6.2 Produit d'espaces compacts

Théorème 6.7 *Soient* $(E_i, O_i)_{i=1,\dots,n}$ *,n espaces topologiques. Posons* $E = \Pi_{i=1}^{i=n} E_i$ *et* $O = \Pi_{i=1}^{i=n} O_i$ *. la fonction projection* $p_i : E = \Pi_{i=1}^{i=n} E_i \longrightarrow E_i$ *est une fonction continue.*

Preuve 6.14 *Exercice.*

Proposition 6.5 *Soient* $E = \Pi_{i=1}^{i=n} E_i$ *tel que* E_i *est séparé pour tout* i *variant de* 1 *à* n*. Pour toute partie* $K \subset E$ *compacte on a :* $p_i(K)$ *compacte dans* E_i *(*$\forall i = 1, \dots, n$*).*

Théorème 6.8 *Le produit fini d'espaces compacts est un espace compact.*

Remarque 6.3 *(Tykhonov) Le produit infini d'espaces compacts est compact.*

6.6.3 Les compacts dans $\mathbb{R}^n$

Proposition 6.6 *Les ensembles compacts dans* $\mathbb{R}^n$ *sont les fermés bornés. (A compact*$\Leftrightarrow$*At fermé et borné).*

Preuve 6.15 *A compact*$\Rightarrow$ *A fermé et borné ?*
A compact$\Rightarrow p_i(A)$ *compact.*
$p_i(A)$ *compact dans* $\mathbb{R} \Rightarrow p_i(A)$ *est fermé et borné.*
$p_i(A)$ *fermé et borné.*$\Rightarrow p_i(A) \subset [a_i, b_i]$ *tels que* $-\infty < a_i < b_i < +\infty$.
$\Rightarrow A \subset \Pi_{i=1}^{i=n} [a_i, b_i]$.
A fermé et borné.$\Rightarrow$ *A compact ?*
A borné dans $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow A \subset \Pi_{i=1}^{i=n} [a_i, b_i]$.
Comme $[a_i, b_i]$ *est compact donc* $\Pi_{i=1}^{i=n} [a_i, b_i]$*.est compact dans* $\mathbb{R}^n$.
A est fermé dans le compact $\Pi_{i=1}^{i=n} [a_i, b_i]$*, donc A est compact.*

6.6.4 Les ensembles relativement compacts

Définition 6.4 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* A *une partie de* E*. On dit que* A *est relativement compact dans* E *si* $\overline{A}$ *est compact.*

Exemple 6.6 $[a, b[$, $]a, b[$ *sont relativement compacts dans* $\mathbb{R}$.
$]0, 1[$ *est relativement compact dans* $\mathbb{R}$ *mais non relativement compact dans* $]0, +\infty[$.

6.6.5 Propriétés des ensembles relativement compacts

Proposition 6.7 *Soit* (E, O) *un espace topologique. Soit* A *une partie de* E *relativement compact et* $B \subset A$ *alors* B *est relativemnt compact dans* E.

Preuve 6.16 *Si* $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
$\overline{A}$ *compact et* $\overline{B}$ *est fermé donc* $\overline{B}$ *est compact.*

Remarque 6.4 *Si* E *est compact alors* $\forall A \subset E$*,* A *est relativement compact.*
Soient (E, O) *un espace topologique et* $A_i \subset E, \forall i = 1, \dots, n$.
A_i *est relativement compact* $\Rightarrow \underset{1 \le i \le n}{\cup} A_i$ *est relativement compact. Remarquons que* $\overline{\underset{1 \le i \le n}{\cup} A_i} = \underset{1 \le i \le n}{\cup} \overline{A_i}$.
Si A est relativement compact alors toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans E.

6.6.6 Espace localement compact

Définition 6.5 *On dit que E est localement compact si tout point de E possède au moins un voisinage compact.*

Corollaire 6.4 *Dans l'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ tout point admet un voisinage compact.*
Si (E, O) est compact alors il est localement compact.
$(E, P(E))$ est localement compact.
$\mathbb{Q}$ n'est pas compact mais il est loacalement compact.

Proposition 6.8 *Soient (E, O) un espace topologique localement compact et $A \subset E$. Si A est fermé dans E alors A est localement compact.*

Proposition 6.9 *Soient (E, O) un espace topologique localement compact et $A_i \subset E$ ($i = 1, ..., n$). Si A_i est localement compact pour tout i dans $\{1, ..., n\}$ alors $\bigcap\limits_i A_i$ est localement compact.*

Preuve 6.17 *Soient A et B dans E et supposons qu'ils sont localement compacts. Est ce que leurs intersection est localement compact ?*
Soit $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$
$\Rightarrow K \in V_A(x)$, K compact, $L \in V_B(x)$, L compact.
$K = K_1 \cap A$, $K_1 \in V_E(x), L = L_1 \cap B$, $L_1 \in V_E(x)$
$\Rightarrow K \cap L$ est compact.
$K \cap L = (K_1 \cap A) \cap (L_1 \cap B) = (A\cap) \cap (K_1 \cap L_1)$ mais $(K_1 \cap L_1) \in V_E(x)$
$\Rightarrow (K \cap L) \in V_{A\cap B}(x)$.

Proposition 6.10 *Soient $(E_i, O_i)_{1 \leq i \leq n}$ des espaces topologiques localement compacts alors $(\Pi_{i=1}^{i=n} E_i, \Pi_{i=1}^{i=n} O_i)$ est localement compact.*

Preuve 6.18 *$x \in \Pi_{i=1}^{i=n} E_i$, $x = (x_1, ..., x_n)$.*
$x_i \in E_i$ qui est localement compact alors il existe $K_i \in V_{E_i}(x_i)$, K_i compact
$\Rightarrow K = \Pi_{i=1}^{i=n} K_i$ est compact et $K \in V_E(x)$.

Corollaire 6.5 *$\mathbb{R}^n$ est localement compact.*

Exercise 6.1 *Si $(\Pi_{i=1}^{i=n} E_i, \Pi_{i=1}^{i=n} O_i)$ est localement compact est ce que (E_i, O_i) est compact ($i = 1, ..., n$).*

Remarque 6.5 *Soient (E, O) un espace topologique et A, B deux parties de E.*
Si A et B sont localement compacts alors leur reunion n'est pas obligatoirement compact.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction continue.
Si E est localement compact alors l'image $f(E)$ n'est forcément localement compact.

Chapitre 7

Espaces connexes

7.1 Espaces connexes

Un espace topologique (E, O) est dit connexe si et seulement si l'une des trois conditions equivalentes suivantes est verifiée.

1. E n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints.
2. E n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints.
3. E et ϕ sont les seules parties simultanément ouvertes et fermées.

Exemple 7.1 *Soient* $E = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $O = \{\phi, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c, d, e\}\}$

Verifier que (E, O) *est un espace topologique.*

L'espace topologique (E, O) *n'est pas connexe car :*$E = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$ *et*$\{a\} \cap \{b, c, d, e\} = \phi$.

Exemple 7.2 *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *munit de la topologie usuelle est un espace topologique connexe. En effet supposons que* $A \subset \mathbb{R}$ *tel que* $A \neq \phi$ *et* $A \neq \mathbb{R}$ *et que* A *est à la fois ouvert et fermé.*

soit $x \notin A$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $A \cap]-\infty, x] \neq \phi$ *ou* $A \cap [x, +\infty[\neq \phi$.

Sans perte de généralité on suppose que $A \cap [x, +\infty[\neq \phi$.

On a $x \notin A \Rightarrow B = A \cap [x, +\infty[= A \cap]x, +\infty[\Rightarrow B$ *est un ensemble ouvert et fermé.*

supposons que l'ensemble B *est minoré par* b. *Comme* B *est ouvert et* $b \in B \Rightarrow \exists h > 0$ *tq :*

$]b - \frac{h}{2}, h + \frac{h}{2}[\subset B \Rightarrow b - \frac{h}{2} \in B$, *mais* b *est la borne inférieure de* B. *Contradiction donc* $A = \phi$ *ou* $B = \mathbb{R}$.

Exemple 7.3 $(E, P(E))$ *est connexe*$\Leftrightarrow E = \{x\}$.

$(E, P(E))$ *connexe* $\Rightarrow E$ *et* ϕ *sont les seules ouverts et fermés à la fois.* $(\{x\} \in P(E)$ *et* $C_E^{\{x\}} \in P(E)) \Rightarrow E = \{x\}$.

$E = \{x\} \Rightarrow (E; P(E))$ *est connexe.*

7.2 Les sous-ensembles connexes

Définition 7.1 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* M *une partie de* E. *On dit que* M *est connexe si et seulement si l'espace* (M, O_M) *est connexe.*

Proposition 7.1 *Soit* M *une partie de* E. *La partie* M *est non connexe si et seulement si* $(\exists A, B \in O, A \cap M \neq \phi, B \cap M \neq \phi, M \subset A \cup B$ *et* $M \cap (A \cap B) = \phi)$.

M *est non connexe* $\Leftrightarrow (M, O_M)$ *est non connexe*

$\Leftrightarrow (\exists A_1, B_1 \in O_M, A_1 \neq \phi, B_1 \neq \phi, M = A_1 \cup B_1$ *et* $A_1 \cap B_1 = \phi)$

Preuve 7.1 *Appliquer la définition d'un espace connexe.*

Proposition 7.2 *Dans* $(\mathbb{R}; |.|$, *si* A *n'est pas un intervalle alors* A *n'est connexe.*

Preuve 7.2 *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *et supposons que* A *n'est un intervalle alors* A *n'est pas connexe. En effet si* A *n'est un intervalle alors* $\exists a, b \in A$ *tels que* $[a, b] \nsubseteq A$, *ou encore il existe* $c \in [a, b]$ *et* $c \notin A$. *Alors* $\{]-\infty, c[\cap A,]c, +\infty[\cap A\}$ *est une partition de* A *par deux ouverts de* A *et aucun de ces deux ouverts n'est vide car* $a \in]-\infty, c[\cap A$ *et* $b \in]c, +\infty[\cap A$. *Donc* A *n'est pas connexe.*

Remarque 7.1 *On montre que l'intervalle est un ensemble connexe.*

Exemple 7.4 *Dans* $\mathbb{R}^2$, *l'ensemble* $M = \{(x, y) \in\} \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 4\}$ *n'est pas connexe.*

Exemple 7.5 *Soient* $E = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $O = \{\{c\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c\}, E, \phi\}$.

L'ensemble $M = \{a, d, e\ \}$ *n'est pas connexe.*

Exemple 7.6 *Soient* $E = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $O = \{\{b, c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a\}, E, \phi\}$.

Soit $M = \{b, d, e\}$.

(E, O) *n'est pas connexe.*

M *est connexe.*

7.3 Théorèmes fondamentaux

Théorème 7.1 *Soient* (E, O) *un esapce topologique et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles connexes.*

Si l'intersection de $(A_i)_{i\in I}$ *n'est pas vide alors l'union de* $(A_i)_{i\in I}$ *est connexe.*

Preuve 7.3 *Soit* $A = \underset{i\in I}{\cup} A_i$. *On suppose que* A *n'est pas connexe*$\Rightarrow \exists U_1, U_2 \in O : U_1 \cap A \neq \phi, U_2 \cap A \neq \phi, (U_1 \cap U_2) \cap A = \phi$ *et* $A \subset U_1 \cup U_2$.

$\Rightarrow \forall i \in I, A_i \subset U_1 \cup U_2$ *et* $(U_1 \cap U_2) \cap A_i = \phi$. *On a par hypothèse que* A_i *est connexe donc* $A_i \cap U_1 = \phi$ *ou* $A_i \cap U_2 = \phi$. *Mais on a par hypothèse que* $x \in \underset{i\in I}{\cap} A_i \neq \phi$.

$x \in A \subset U_1 \cup U_2$.

Suppososns que $x \in U_1$

$\Rightarrow x \in U_1 \cap A_i, \forall i \in I$

$\Rightarrow A_i \cap U_2 = \phi, \forall i \in I$

$\Rightarrow \underset{i\in I}{\cup} (A_i \cap U_2) = A \cap U_2 = \phi$

Contradiction avec $A \cap U_2 \neq \phi$.

Définition 7.2 *Soit* $A \subset \mathbb{R}^n$. *On dit que* A *est convexe si et seulement si* :$\forall a, b \in A : [a, b] \subset A$ *tq* $[a, b] = \{a + t(b - a), 0 \leq t \leq 1\}$

Exemple 7.7 *Dans $\mathbb{R}^n$, toute partie convexe est connexe.*
$[0,1]$ *est convexe dans* $\mathbb{R}$.

Théorème 7.2 *Soient (E,O) un espace topologique et A,B deux parties de E. Si A est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est connexe.*

Preuve 7.4 *On suppose que B n'est pas connexe, donc*
$\exists U_1, U_2 \in O : U_1 \cap B \neq \phi, U_2 \cap B \neq \phi, (U_1 \cap U_2) \cap B = \phi$ *et* $B \subset U_1 \cup U_2$.
$A \subset B \Rightarrow A \subset U_1 \cup U_2$ *et* $(U_1 \cap U_2) \cap A = \phi$.
A *est connexe* $\Rightarrow A \cap U_1 = \phi$ *ou* $A \cap U_2 = \phi$.
On suppose que $A \cap U_1 = \phi \overset{?}{\Rightarrow} U_1 \cap B = \phi$.
Si $x \in U_1 \cap B \Rightarrow x \in \overline{A}$ *et* $x \in U_1$
$x \in U_1 \in O \Rightarrow U_1 \in V_{(x)}$
$x \in \overline{A} \Rightarrow A \cap U_1 \neq \phi$.
Contradiction.

Corollaire 7.1 *Soient (E,O) un espace topologique et A une partie de E. Si A est connexe alors $\overline{A}$ l'est aussi.*

7.4 Connexité et continuité

Théorème 7.3 *Soit $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ une fonction continue. Si E est connexe alors $f(E)$ l'est aussi.*

Preuve 7.5 *Soient $U, V \in O_F$ tels que* $: f(E) \subset U \cup V, f(E) \cap U \neq \phi, f(E) \cap V \neq \phi$.
$f^{-1}(U) \in O_E, f^{-1}(V) \in O_E$ *(f continue).*
$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
$f(E) \subset U \cup V \Rightarrow E = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
E *est connexe* $\Rightarrow f^{-1}(U) = \phi$ *ou* $f^{-1}(V) = \phi$.
$f^{-1}(U) = \phi \Rightarrow f(E) \cap U = \phi$.
Contradiction avec l'hypothèse donc $f(E)$ est connexe.

Remarque 7.2 *Si f est continue surjective alors $f(E) = F$ est connexe si E l'est.*

Proposition 7.3 *Les intervalles sont des ensembles connexes dans* $\mathbb{R}$.

Preuve 7.6 *Soit A un intervalle* $\overset{?}{\Rightarrow}$ *A est connexe*
Soit $A =]a,b[$.
A est homéomorphe à $\mathbb{R}$ donc il est connexe.
Si n'est pas ouvert alors $\mathring{A}$ l'est. $\mathring{A} =]a,b[$.
Mais $\mathring{A} \subset A \subset \overline{\mathring{A}} (= \overline{A})$. *Ce qui achève la démonstration.*

Corollaire 7.2 *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est un intervalle.*

Théorème 7.4 (Valeurs intermediares) *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et E connexe.*
Si f atteint λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ alors f atteint toutes les valeurs de $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Preuve 7.7 *E connexe et f continue$\Rightarrow f(E)$ connexe$\Rightarrow f(E)$ intervalle$\Rightarrow [\lambda_1, \lambda_2] \subseteq f(E)$.*

Exercise 7.1 *(E, O) connexe$\Leftrightarrow (f : E \longrightarrow \{0, 1\} \Rightarrow f \equiv 0$ ou $f \equiv 1)$.*

Théorème 7.5 *Le produit d'une famille $(E_i, O_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques non vides est connexes si et seulement si (E_i, O_i) esr connexe $\forall i \in I$.*

Preuve 7.8 *Exercice.*

7.5 Composante connexe

Définition 7.3 *On appelle composante connexe (notée $C(x) \equiv C_x$) la reunion de toutes les parties connexes contenant x.*

Théorème 7.6 $C_x = \overline{C_x}$.

Preuve 7.9 $x \in E \Rightarrow C_x \subseteq \overline{C_x}$
C_x connexe$\Longrightarrow \overline{C_x}$ est connexe.
C_x est le plus grand ensemble connexe contenant x donc $\overline{C_x} \subseteq C_x$
$\Longrightarrow \overline{C_x} = C_x$.

7.5.1 Relation d'équivalence

Soit (E, O) un espace topologique. On définit une relation d'équivalence comme suit :

$$x\Re y \Leftrightarrow (\exists A \subset E,\ A \text{ connexe tel que : } x, y \in A).$$

1. On vérifie que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence de x de E notée $\overline{x}$ est égale à C_x. ($\overline{x} = C_x$).

$\overline{x} \subset C_x$?
$*)$ $y \in \overline{x} \Longrightarrow y \in C_x$
$y \in \overline{x} \Leftrightarrow x\Re y \Leftrightarrow (\exists A \subset E,\ A$ connexe tel que : $x, y \in A) \Rightarrow A \subset C_x$.
$y \in A \Longrightarrow y \in C_x$.
$**)$ $C_x \subset \overline{x}$?
$y \in C_x, x \in C_x \Rightarrow x\Re y \Rightarrow y \in \overline{x}$.
$\Re$ forme une partition de E. Les éléments de $\frac{E}{\Re}$ sont les composantes connexes de E.
$\bigcup\limits_{x\in E} C_x = E$ et $C_x \cap C_y = \phi$ si $C_x \neq C_y$.

Définition 7.4 *Soient (E, O) un espace topologique et A une partie de E. Les composantes connexes de A sont les composantes connexes de (A, O_A).*

Exemple 7.8 $E = \{a, b, c, d, e\}$, $O = \{\phi, E, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$
Les composantes connexes de E sont $\{a\}$ et $\{b, c, d, e\}$.
$A = \{b, d, e\}$ est connexe et elle est incluse dans $\{b, c, d, e\}$.

Exemple 7.9 *Soit (E, O) un espace topologique connexe.*
$\forall x \in E \Rightarrow C_x = E$.

7.5.2 La connexité locale

Définition 7.5 *Soit* (E, O) *un espace topologique. On dit que* E *est localement connexe si tous point* x *de* E*. admet un système fondamental de voisinage connexe et ouvert.*

$$\forall x \in E, \forall V \in V_{(x)} \Longrightarrow \exists W \text{ (connexe et ouvert)} : W \subset V$$

Proposition 7.4 *Soit* (E, O) *espace topologique connexe*$\Longleftrightarrow B = \{U \in O, U \text{ connexe}\}$ *est une base de* O.

Preuve 7.10 *On rappelle que :*

$B \subset O, B$ *base* $\Longleftrightarrow (\forall x \in G, \forall G \in O \Longrightarrow \exists U \in B$ *tq :* $x \in U \subset G)$.

Soit (E, O) *un espace topologique connexe*$\Longrightarrow B = \{U \in O, U \text{ connexe}\}$ *est une base de* O *?*

$U \in O$ *et* $x \in U \Longrightarrow U \in V_{(x)} \Longrightarrow \exists W$ *ouvert et connexe tel que :* $x \in W \subset U$.

C-à-d : qu'il existe W *dans* B *tel que* $x \in W \subset V$.

$B = \{U \in O, U \text{ connexe}\}$ *est une base de* $O \Longrightarrow (E, O)$ *est connexe ?*

Soit $x \in E; V \in V_{(x)}, \mathring{V} \in O$.

$x \in \mathring{V} \Longrightarrow \exists U \in B$ *tel que* $x \in U \subset \mathring{V}$*. C-à d :* U *connexe et* $U \in V$.

Exemple 7.10 $\mathbb{R}$ *est localement connexe.*

Exemple 7.11 $(E, P(E))$ *est localement connexe.*

Exercise 7.2 *Soient* (E, O) *un espace topologique et* A *une composante connexe de* E *alors* A *est ouvert.*

Exercise 7.3 *Soient* (E, O_E), (F, O_F) *deux espaces topologiques localements connexes alors* $(E \times F, O_E \times O_F)$ *est localement connexe.*

7.5.3 Connexité par arc

Définition 7.6 *On dit qu'un espace topologique* (E, O) *est connexe par arc si :*$\forall x, y \in E, \exists f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ *continue telle que :*$f(a) = x$ *et* $f(b) = y$.

Exemple 7.12 *Soient* $E = \{a, b, c\}$ *et* $O = \{E, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$

$$a \longleftrightarrow b : f_1(t) = \begin{cases} a & si\ 0 \leq t < 1 \\ b & si\ t = 1 \end{cases}$$

$$a \longleftrightarrow c : f_2(t) = \begin{cases} a & si\ 0 \leq t < 1 \\ c & si\ t = 1 \end{cases}$$

$$b \longleftrightarrow c : f_3(t) = \begin{cases} b & si\ 0 \leq t < 1 \\ c & si\ t = 1 \end{cases}$$

Exemple 7.13 $B = \left\{(x, y), y = O, \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$ *est connexe par arc.*

$A = \left\{(x, y), y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x < 1\right\}$ *est connexe par arc.*

$A \cup B$ *est connexe mais il n'est pas connexe par arc.*

Propriétés

1. Si A est connexe par arc alors il est connexe.
2. Soit $f : (E, O_E) \longrightarrow (F, O_F)$ une fonction continue et E est connexe par arc alors $f(E)$ est connexe par arc
3. Si A est connexe dans $\mathbb{R}^n$ alors A est connexe par arc.

Bibliographie

[1] Espaces topologiques en général et métriques en particulier, M. Hazi, OPU.

[2] Cours de topologie,A. Mostefai, OPU.

[3] Topologie au delà des travaux dérigés tomes 1,2,3, M Hazi, OPU.

[4] 8 problèmes de topologie, R. Goulfier, Bréal éditeur.

[5] Topologie et Analyse, tome 1, G. Flory, Vuibert.

[6] Topolgie et Analyse fonctionnelle, cours de Licence avec 240 exercices et 30 problèmes corrigés, Y. Sonntag.

[7] Le Topologicon J.P. Petit, dessin animé.

[8] Topology course lecture notes A. and B. Mc Cluskey.

[9] Theory and problems of general topology, S. Lipschutz, Schaum's series.

[10] Counterexamples in topology, Lynn A. Steen and J. A. seebach, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[11] Elementary topology A first course, textbook in problems, O.Y. Viro, O.A. Ivanov