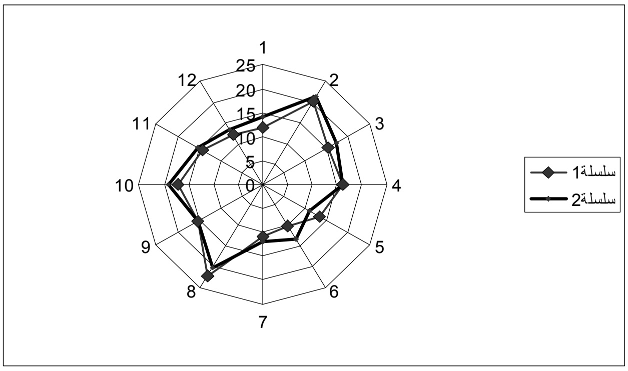
الوسيط في الاحصاء و الاحتمال

تذكير بالدروس مع تمارين محلولة وأخرى للحل

(السنة أولى تكنولوجيا، السنة الأولى علوم تسيير، السنة الأولى علوم اقتصادية، السنة الأولى علوم تجارية، السنة الأولى إعلام آلي للتسيير)



بن بشير معمر
أستاذ محاضر

مقدمة

يسرني كثيرا أن أضع هذا العمل المتواضع بين أيدي القراء من أساتذة و طلبة و كلي أمل في أن يكون نافعا لهم بكثير يحمد أو قليل يذكر.

لا أدعي أن هذا العمل وحيد في نوعه, لكنها محاولة لتدارك بعض النقص في المكتبة الجامعية.

يمكن لكل طالب يدرس جذع مشترك تكنولوجيا, سنة أولى علوم تجارية, سنة أولى علوم اقتصادية سنة أولى علوم تسيير للاقتصاد, سنة أولى علاقات دولية و سنة أولى علوم طبية أن يستفيد من هذا العمل.

أعبر عن عميق شكري إلى كل من أهدى لي عيوب هذا الكتاب، كما أشكر زملائي الذين شجعوني و أخص منهم بالذكر:سليماني عبد القادر, بودي عبد القادر, حادي لخضر, رويسات عبد الناصر, بعالي مبارك, بوعنيني محمد و سلام مبروك.

هذه نسخة جديدة منقحة حسنت فيها بعض المواضيع و عرضتها بشكل أبسط و صففتها بشكل مفتوح حتى لا يشعر الطالب بالاختناق و هو يتصفحها.

بن بشير معمر

mbenbachir2001@gmail.com

الإحصاء الوصفي ذي مدخل

1 الإحصاء الوصفي ذي مدخل

1.1 مقدمة

علم الإحصاء هو مجموعة الطرق العلمية التي بواسطتها نجمع, ننظم, نلخص, نمثل و نشرح المعطيات. بعبارة أخرى هو مجموعة المبادئ و الطرق العلمية التي تعالج البيانات العددية و تصفها في صيغة يسهل معها فهمها.

المجتمع و العينة

عندما نريد دراسة معطيات متعلقة بخاصية ما مثلا وزن الطلبة فانه يكون من الصعب ملاحظة كل المعطيات عندما يكون عددها كبيرا, لهذا فعوض أن ندرس المجموعة كلها و التي تسمى المجتمع, يكفى فقط دراسة عدد محدود و الذي يسمى العينة حتى تكون للدراسة معنى يجب أن تكون العينة مأخوذة بشكل عشوائي.

ملاحظة

مجتمع ما يمكن أن يكون منتهى, كما يمكن أن يكون غير منته مثلا عدد الطلبة في المركز الجامعي بشار في سنة جامعية ما منتهى, بينما وزن الأفراد المحصور بين *10* كلغ و *50* كلغ غير منته.

1.2 وصف عينة

كل عنصر من المجتمع يسمى فردا و كل فرد يمكن أن ندرسه بالنسبة لعدة صفات و كل صفة يمكن أن تعطي عدة ميزات.

تعريف

مجموعة المعطيات العددية الموافقة لصفة من الصفات تسمى سلسلة إحصائية.

ملاحظة:الصفة يمكنها أن تأخذ عدة ميزات مثلا

لون أعين البشر

عدد الزيادات في المواليد

وزن أو طول الطلبة

هذه الأمثلة تبين لنا الإمكانيات الموجودة للصفات و التي نرتبها كما يلي

1.2.1 صفة كمية

نقول عن صفة ما أنها كمية إذا كانت ميزاتها المختلفة قابلة للقياس (وزن, عدد الأطفال ,...) هذا العدد الذي يتغير من ميزة إلى أخرى يسمي المتغيرة الإحصائية.

نقول عن صفة كمية أنها غير مستمرة (متقطعة, نقطية) إذا كانت المتغيرة الإحصائية لا تأخذ سوى قيم معزولة منتمية إلى مجال ما. مثلا النقاط المحصل عليها من طلبة السنوات الأولى.

نقول عن صفة كمية أنها مستمرة إذا لم تكن متقطعة

1.2.2 صفة نوعية

نقول عن صفة أنها نوعية إذا كانت مختلف ميزاتها غير قابلة للقياس, مثل لون الأعين

1.3 السلاسل الإحصائية

السلسلة الإحصائية في حالة صفة كمية متقطعة

نعتبر عينة طولها *N*, أي مكونة من *N* عنصر و لتكن *x* قيمة الصفة التي نقوم بالدراسة عليها فإننا سنحصل على السلسلة التالية $\{x_1, x_2, ...x_N\}$. مدى السلسلة هو الفرق بين أكبر قيمة في السلسلة و أصغرها.

التكرار الكلي للسلسة هو عدد العناصر المكونة لها و هو N. عندما تتكرر الصفة x_i, n_i مرة نقول عن n_i أنه التكرار الجزئي المرفق للصفة x_i أو التكرار المطلق المرفق للصفة x_i الكمية $f_i = \frac{n_i}{N}$ تسمى التكرار النسبي.

مثال

نقاط الإحصاء	10	11	12	13	14	5	16
التكرار المطلق	11	22	45	40	19	11	2
التكرار النسبي	0.07	0.14	0.30	0.26	0.12	0.07	0.01

جدول1

1.3.1 السلسلة الإحصائية في حالة صفة كمية مستمرة

بصفة عامة فان عدد القيم المختلفة التي نحصل عليها غير منتهى, حتى نتجنب الصعوبات التقنية في الحسابات فإننا نقوم بتقسيم مدى السلسلة إلى عدد منتهى من المجالات الجزئية و كل مجال يصبح يشكل فئة. لتحديد فئة نقوم بتعين حديها أو بعبارة أخرى نقوم بتعين مركزها و مداها. كل فئة تشمل كل القيم الأكبر أو مساوية لحدها الأصغر و الأصغر تماما من حدها الأكبر

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي والذي يمثل وزن الأرانب في مزرعة أحد الفلاحين.

الفئات	حدي الفئات	مركز الفئات	التكرار	التكرار النسبي	النسبة المئوية
1	]2,2 ; 2,5]	2.350	5	0.031	3.1
2	]2,5 ; 2,8]	2.650	11	0.068	6.8
3	]2,8 ; 3,1]	2.950	24	0.148	14.8
4	]3,1 ; 3,4]	3.250	40	0.248	24.8
5	]3,4 ; 4,0]	3.550	42	0.259	25.9
6	]3,7 ; 4,0]	3.850	20	0.124	12.4
7	]4,0 ; 4,3]	4.150	13	0.080	8.0
8	]4,3 ; 4,6]	4.450	6	0.037	3.7
المجاميع			161	1	100

جدول2

1.3.2 السلسلة الإحصائية في حالة صفة نوعية

عندما تكون الصفة نوعية يكون الجدول الإحصائي كما يلي

ميزات الصفة	A	B	C	D	E
التكرار الموافق	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5

إذن نجمع النتائج في فئات مساو لعدد مساو الميزات و نرفق لكل فئة عدد تكرارها و كذلك تكراراتها النسبية $f_i = \frac{n_i}{n}$

مثال

جدول يلخص توزيع 100 فرد حسب لون عيونهم

لون العين	التكرار المطلق	التكرار النسبي	النسبة المئوية
اسود	40	0.40	40
بني	43	043	43
اخضر	12	0.12	12
رمادي	5	0.05	5

1.4 التمثيل البياني للسلاسل الإحصائية

1.4.1 صفة كمية متقطعة

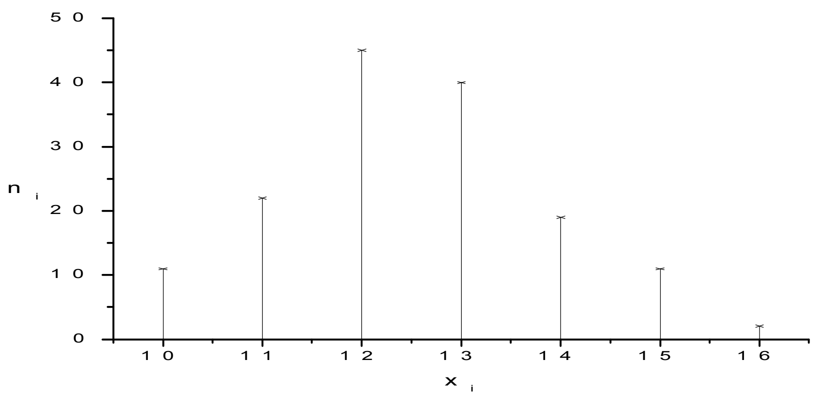
1.4.1.1 الرسم البياني بالقضبان

نحصل عليه بان نضع على محور السينات في معلم متعامد قيم x_i و نرسم من كل نقطة منها قطعة مستقيمة موازية لمحور العينات بحيث مبدأها النقطة $(x_i, 0)$ و حدها الثاني النقطة (x_i, n_i)

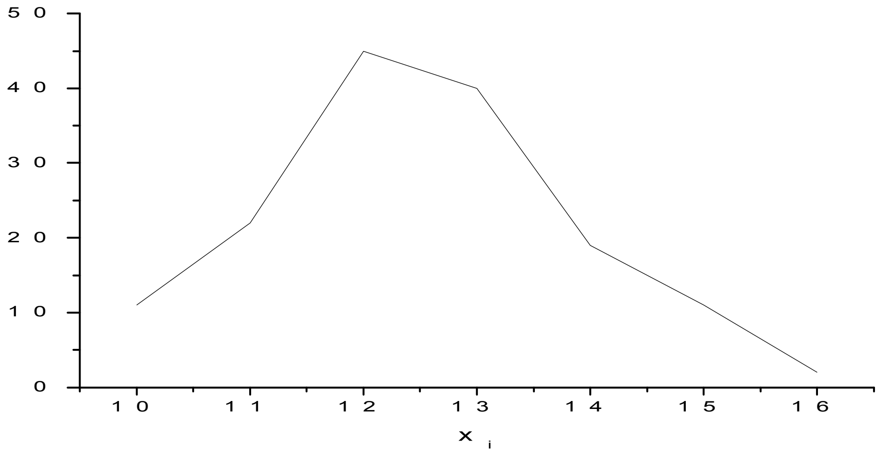
مثال

نستعيد المثال السابق(جدول 1)

نقاط الإحصاء	10	11	12	13	14	15	16
التكرار المطلق	11	22	45	40	19	11	2
التكرار النسبي	0.07	0.14	0.30	0.26	0.12	0.07	0.01



1.4.1.2 مضلع التكرارات



و نحصل عليه بأن نوصل قمم القضبان المتجاورة بخطوط مستقيمة.

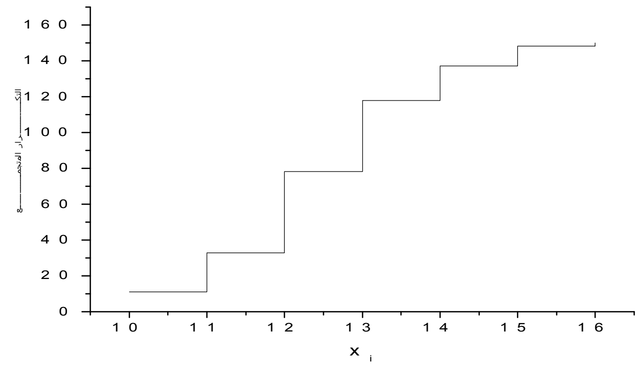
1.4.1.3 المخطط التجميعي

نسمي تكرار تجميعي إلى المرتبة i للقيمة x_i الخاصة بالقيمة المدروسة المجموع $\sum_{k=1}^{i} n_k$ للتكرار المحصل عليه من الـ i قيمة الأولى للصفة .بنفس الفكرة نحصل على التكرار النسبي التجميعي إلى المرتبة i للقيمة x_i الخاصة بالصفة المدروسة المجموع $\sum_{k=1}^{i} f_k$

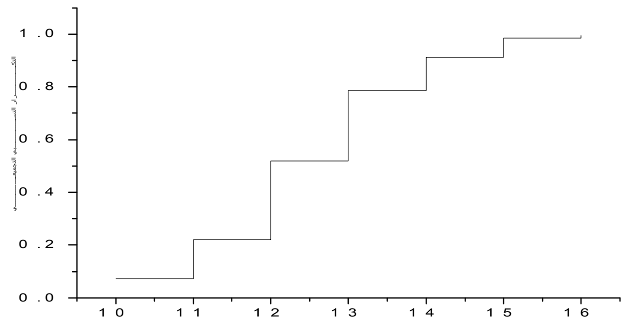
مثال

نستعيد المثال السابق (جدول 1)

النقاط	التكرار المطلق	التكرار التجميعي	التكرار النسبي	التكرار النسبي التجميعي
10	11	11	0.073	0.073
11	22	33	0.146	0.219
12	45	78	0.300	0.519
13	40	118	0.266	0.785
14	19	137	0.126	0.911
15	11	148	0.073	0.984
16	2	150	0.013	0.997



مخطط التكرار التجميعي



مخطط التكرار التجميعي النسبي

1.4.2 صفة كمية مستمرة

1.4.2.1 المخطط النسيجي

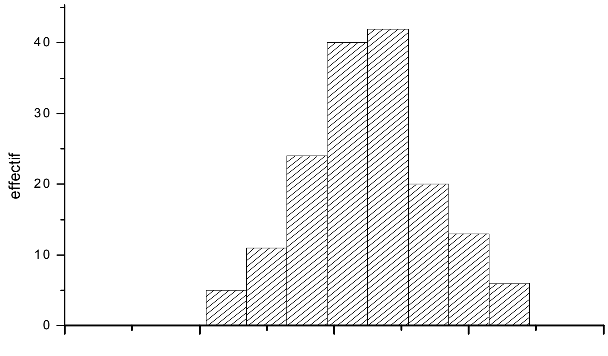
هو مجموعة مستطيلات متجاورة بحيث عرضها يساوي طول الفئة و طولها يساوي التكرار المطلق المرفق لها, ممثلة في معلم متعامد.

مضلع التكرارات

نحصل على مضلع التكرارات (على الترتيب مضلع التكرارات النسبية) بتوصيل أواسط القاعدات العليا لمختلف المستطيلات المتجاورة (على الترتيب في حالة الارتفاع يساوي التكرارات النسبية نحصل على مضلع التكرارات النسبية)

مثال

نستعيد الجدول 2



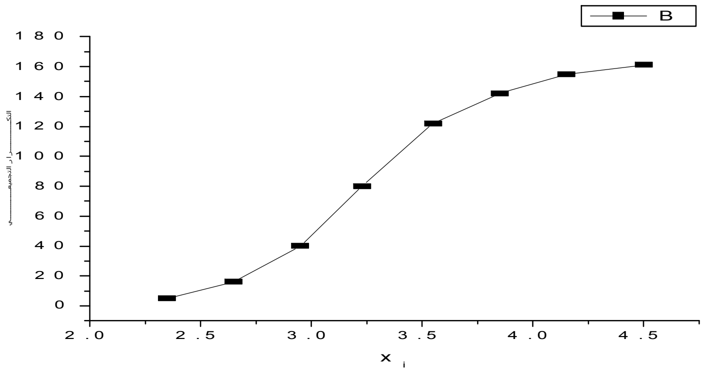
1.4.2.2 مخطط التكرارات التجميعي

نحصل عليه بأن نكتب على يمين كل فئة ممثلة على محور السينات مجموع التكرارات لكل الفئات الدنيا. الخط المنكسر الذي يربط كل هذه النقاط تسمى بمخطط التكرارات التجميعي. بنفس الطريقة نحصل على مخطط التكرارات النسبية و هذا إذا كتبنا على محور الترتيب مجموع التكرارات النسبية.

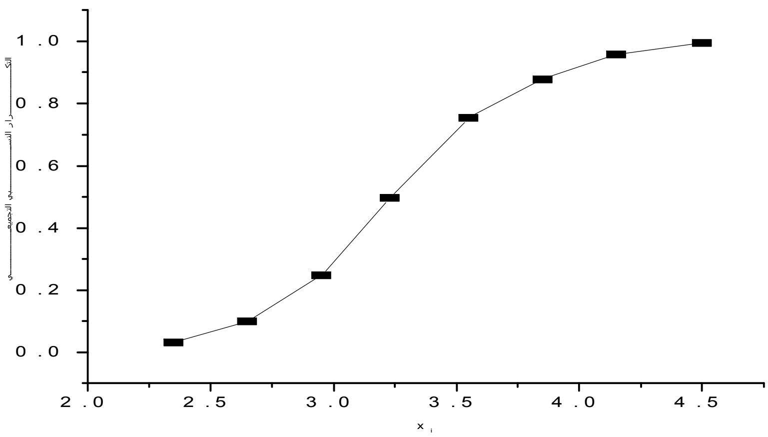
مثال

نستعمل الجدول 2

لفئات	حدي الفئات	مركز الفئات	التكرار	التكرار النسبي	النسبة المئوية
1	]2,5 2,2]	2.350	5	0.031	3.1
2	]2,8 2,5]	2.650	11	0.068	6.8
3	]3,1 2,8]	2.950	24	0.148	14.8
4	]3,4 3,1]	3.230	40	0.248	24.8
5	]4,0 3,4]	3.550	42	0.259	25.9
6	]4,0 3,7]	3.850	20	0.124	12.4
7	]4,3 4,0]	4.150	13	0.080	8.0
8	]4,6 4,3]	4.450	6	0.037	3.7
المجاميع			161	1	100



مخطط التكرار التجميعي



مخطط التكراري التجميعي النسبي

1.4.2.3 مخطط بياني في حالة فئات غير متساوية المدى

في حالة متغيرة إحصائية مستمرة لكن بفئات غير متساوية المدى لا يمكننا أن نقوم بالتمثيل البياني من دون أن نقوم سلفا بإدخال تعديل على التكرار و ذلك بقسمة التكرار المطلق على مدى كل فئة موافقة, لان مساحة أي مستطيل يجب أن تكون متناسبة مع تكرار الفئة الموافقة.

و لتوضيح كيفية التعامل مع هذا النموذج نقترح المثال التالي

مثال

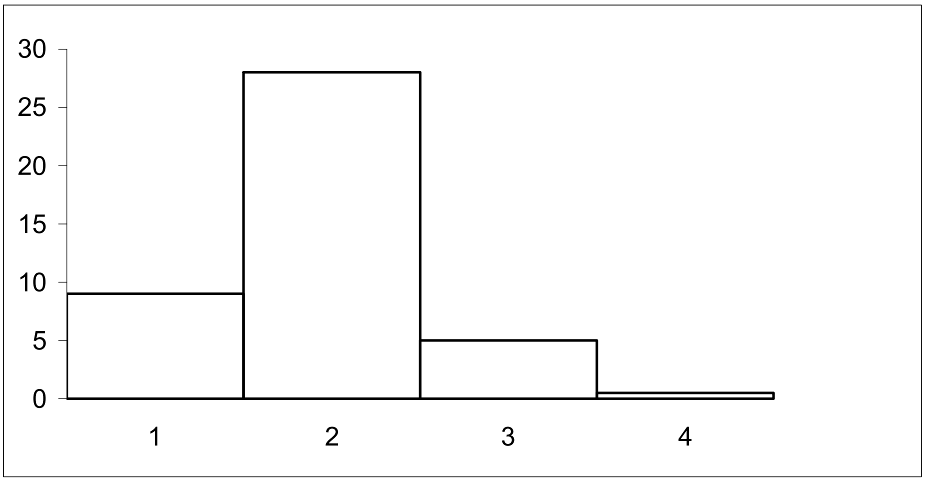
ارسم المخطط النسيجي ل 50 ضيعة فلاحية حسب المساحة المستغلة مقدرة بالهكتار

المساحة	]5 0]	]10 5]	]20 10]	]20 50]
عدد الضيعات	9	28	10	3

نلاحظ ان الفئات غير متساوية و لهذا نقوم بالتعديل الضروري و نجمله في الجدول التالي و الذي يمكن استعماله كذا لك بشكل أساسي في استخراج الفئة المنوالية و منه المنوال عندما نتطرق لهذا المفهوم لاحقا.

المساحة	]5 0]	]10 5]	]20 10]	]50 20]
عدد الضيعات	9	28	10	3
ن = $\frac{n_i}{etendu}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{28}{5}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{3}{30}$
ن[1]X5	9	28	5	0.5

و منه يكون المخطط النسيجي كما يلي



1.4.2.4 المخطط النسيجي المثلثي

هذا النوع من المخططات يسمح لنا بمعاينة و مقارنة الأهمية النسبية لثلاث قيم Z X, Y, بحيث مجموع نسبها تساوى مئة بالمئة و لتوضيح كيفية استعمال هذا النوع من المخططات نأخذ المثال التالي

نعتبر أن اقتصاد الجزائر مقسم إلى ثلاث قطاعات كبيرة:فلاحة, صناعة و خدمات عامة. مجموعها يساوي بالمئة.

تشكيل المخطط البياني

---

[1] يمكن أن نضرب النتائج المحصل عليها في أي عدد بشرط أن يكون أكبر و اصغر عدد ناتج قابل للتمثيل على المعلم .

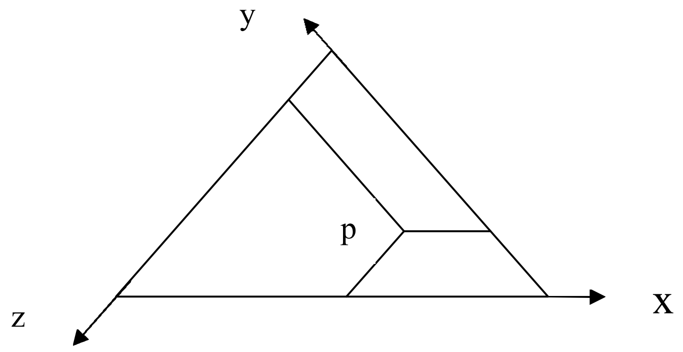
نرمز بالرمز *P* للتقسيم *X %0 ,Y %0 ,Z%0* لرسمه نعتبر مثلث متساوي الأضلاع

بحيث كل ضلع مدرج من *0* الى *100* و موجه فيكون كل ضلع عبارة عن محور

(OX,OY,OZ) ثم نكتب القيم المعطاة على المحاور فنحصل على النقطة P عند تقاطع أضلاع ثانوية

كما نلاحظ في الشكل .

تطبيق عددي



$x=30/,\ y=60/\ ,z=30/$

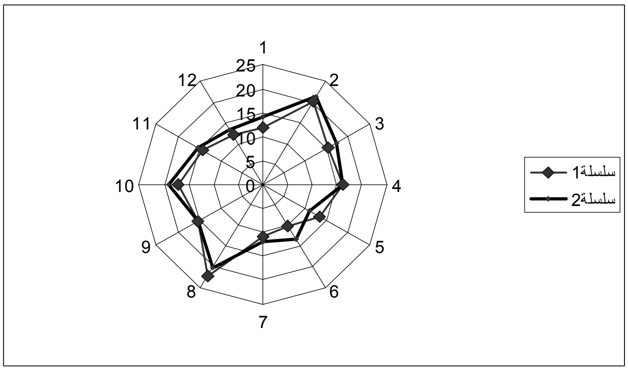
1.4.2.5 المخطط البياني القطبي[2]

نفرض بأن الزمن يدور في اتجاه دوران عقارب الساعة, كل دورة تمثل بمحور يحمل قيم الصفة. الزاوية بين المحاور تتوقف على عدد الدورات.

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي و الذي يمثل درجة الرطوبة في مدينة البليدة خلال سنتين متواليتين[3]

الشهر	ج	ف	م	أ	م	ج	ج	أ	س	أ	ن	د
السنة 1	12	20	15	16	13	10	11	22	15	17	14	12
السنة 2	14	21	17	16	11	13	12	20	15	19	15	13



الشهر هو وحدة قياس الزمن و عليه تكون الزاوية مساوية لـ 30 درجة بين المحاور. ينصح بهذا النوع من المخططات في حالة الرغبة في ملاحظة تغير دوري خاص بصفة ما.

ينصح باستعمال خطوط بأشكال مختلفة للتمثيل

---

2 نقول كذلك مخطط بياني في الإحداثيات القطبية

3 ج يرمز لشهر جانفى و هكذا ...

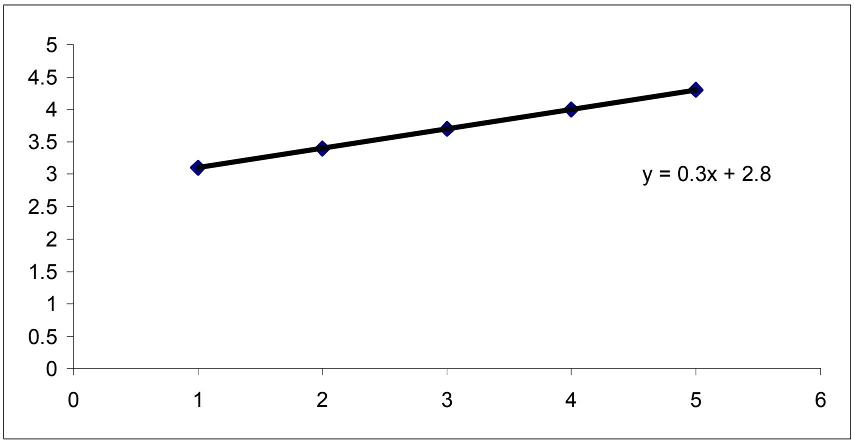
1.4.2.6 مخطط بياني لوغاريتمي

نستعمل هذا النوع من السلم عندما يكون تغير القيم كبير جدا, يمكن استعماله لمحور واحد و نتكلم عن مخطط بياني نصف لوغاريتمي, كما يمكن استعماله لمحورين و نتكلم عن مخطط بياني لوغاريتمي.

مثال

جدول و تمثيل تطور رأس مال شركة سوناطراك (بملارين الدينارات).

السنة	1	2	3	4	5
X	1250	2500	50000	10000	20000
Log x	3.1	3.4	3.7	4.0	4.3



2 مقاييس سلسلة إحصائية

2.1 مقاييس النزعة المركزية

2.1.1 المنوال

المنوال أو الصفة الغالبة[4] و هي القيمة أو الفئة التي لديها اكبر تكرار مطلق موافق[5].

أمثلة

2.1.1.1 الحالة المتقطعة

لتكن لدينا سلسلة النقاط المحصل عليها في الامتحان الأول لمقياس الإحصاء.

النتائج x_i	5	6	8	9	10	12	13	14
التكرار n_i	4	8	9	18	10	26	16	11

المنوال يساوي 12 و هي قيمة المتغيرة الإحصائية التي توافق أكبر قيمة و هي 26

2.1.1.2 الحالة المستمرة

و نميز حالتان

أ) حالة تساوى المدى لمختلف الفئات و تكون الفئة المنوالية موافقة لأكبر تكرار مطلق ونوضح هذا بالمثال التالي

---

[4] الصفة القاهرة

[5] هذا أن كانت الفئات بمدى متساو

ليكن لدينا الجدول الآتي لتوزيع النقاط خلال الفصل الأول

النقاط x_i	[0 5[	[5 10[	[10 15[	[15 20[
التكرار n_i	3	8	18	7

الفئة المنوالية هي [10 15[الموافقة لأكبر قيمة وهي *18* و منه المنوال يساوي منتصف الفئة المنوالية و هي *12.5*.

ب) حالة عدم تساوي المدى و نقوم بتعديل قبل تحديد الفئة المنوالية و تكون تلك الموافقة لأكبر نسبة $\frac{\text{effectif}}{\text{etendu}}$ [6]

مثال

ليكن الجدول التالي و الذي يعطي توزع الطلبة حسب بعد مساكنهم عن الجامعة

x_i	[0 10[	[10 20[	[20 40[	[40 70[	[70 80[	المجموع
n_i	12	13	32	47	15	119

(جدول افتراضي فقط)

الفئة المنوالية ليست الفئة [40 70[و لكنها الفئة [20 40[لأنها توافق النسبة الأكبر $\frac{\text{effectif}}{\text{etendu}}$.

2.1.2 الوسيط[7]

هو قيمة المتغيرة الإحصائية x_i بحيث 50 % من التكرار الكلي تأخذ قيم اكبر من قيمة الوسيط و 50 % المتبقية تأخذ قيمة أصغر من قيمة الوسيط.

مثال

نميز حالتين

الحالة النقطية و المستمرة

الحالة النقطية تكون السلسلة الإحصائية فيها من الشكل $\{x_1, x_2, x_n\}$ مرتبة ترتيبا متزايدا أو متناقصا كما يمكن أن تكون على شكل آخر مكافئ للشكل المذكور.

إذا كان *n* فردي أي انه يكتب على الشكل *n=2p+1* فان الوسيط يساوي $me = x_{p+1}$

إذا كان *n* زوجي أي انه يكتب على الشكل *2p* فان الوسيط يساوي $me = \frac{x_{p+1} + x_p}{2}$

تطبيق عددي

تحصل الطالب احمد خلال الفصل الأول على العلامات التالية $\{10,9,10,12,14,18,13,15,13\}$

نقوم بترتيبها أولا قبل الإجابة عن السؤال فنحصل على السلسلة المرتبة التالية

$\{9,10,10,12,13,,13,14,15,18\}$

---

[6] effectif تعني التكرار و étendu تعني المدى.

[7] عموما يخطأ الطلبة في تحديد قيمة الوسيط معتقدين أنه يمثل القيمة 50 بالمئة من التكرار الكلي.

هنا ***n=9*** و منه الوسيط يكون مساو للقيمة التي تأتى في المرتبة 5, ومنه ***me=13***

تحصل الطالب محمد خلال الفصل الأول على العلامات التالية $\{10,9,10,12,14,18,13,13\}$

نقوم بترتيبها أولا قبل الإجابة عن السؤال فنحصل على السلسلة المرتبة التالية $\{9,10,10,12,13,,13,14,18\}$

هنا *n=8* و منه الوسيط يكون مساو لوسط القيمتين اللتين تأتيان في المرتبة *4* و*5* و منه

$$me = \frac{12+13}{2} = 12.5$$

الحالة المستمرة و التي تكون فيها السلسلة الإحصائية علي شكل جدول مشكل من فئات. فان قيمة الوسيط تعطى عن طريق العلاقة التالية: $me = L_0 + \frac{L_1 - L_0}{n_0}(\frac{N}{2} - F_0)$

حيث L_0, L_1 **هما طرفي الفئة التي ينتمي إليها الوسيط و** n_0 **التكرار المطلق الموافق بينما N/2 يمثل *50* بالمائة من التكرار الكلي و أخيرا لدينا** F_0 **تمثل التكرار التجميعي إلى ما دون الحد** L_0 **مباشرة .**

مثال

ليكن لدينا الجدول الإحصائي التالي الذي يمثل توزيع السكان حسب أعمارهم (عينة مكونة من 100)

الفئات	[0 20[	[20 60[	[60 75[	[75 90[
التكرار	23	51	17	9
التكرار التجميعي	23	74	91	100

الوسيط هو قيمة المتغيرة الإحصائية التي توافق *50* بالمئة من التكرار التجميعي,في هذا المثال توافق التكرار التجميعي *50*و منه $me = 20 + \left(\frac{60-20}{51}\right)(50-23) = 41.17$

لأن 50 تنتمي إلى الفئة [*20* *60*[.

2.1.3 الوسط

2.1.3.1 الوسط الحسابي

إن العبارة $\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ **تمثل الوسط الحسابي المرجح لـ *k* عدد** x_i **مرفق للمعامل** n_i

أمثلة

لتكن لدينا السلسلة التالية $\{1,2,15,4,7,6,21,3,3\}$ **إن وسطها الحسابي يساوى**

$$m = \frac{1}{9}(1+2+15+4+7+6+21+2\times3) = \frac{62}{9}$$

ليكن لدينا الجدول التالي[8]

x_i	1	2	15	4	7	6	21	3
n_i	1	1	1	1	1	1	1	2

[8] كان يستحسن ترتيب السلسلة لكن عند حساب الوسط لا يؤثر لان الجمع تبديلي في حقل الأعداد الحقيقية

إن الوسط الحسابي يساوي $me=\frac{(1+2+15+4+7+6+21+3\times2)}{9}=\frac{62}{9}$

2.1.3.2 الوسط التوافقي

تحت نفس المعطيات التالية فان الوسط التوافقي يعطي كما يلي $\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{1}{x_i}$

و نستعمله عندما تكون المتغيرة الإحصائية معرفة عن طريق نسبة حيث المقام ثابت

مثال

لدينا مصنع يشتغل بثلاث آلات إنتاج فإذا كانت الأولى تنتج *5000* وحدة في الساعة و الثانية تنتج *4000* وحدة في الساعة , بينما الثالثة تنتج *3500* وحدة في الساعة فما هو الإنتاج المتوسط للمصنع في الساعة؟

هنا إذا اعتبرنا الوسط الحسابي[9] لا تكون النتيجة صحيحة, بل الإجابة الصحيحة هي

$\frac{1}{H}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5000}+\frac{1}{4000}+\frac{1}{3500}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{515}{700000}$ و منه *H= 4077.66* أي ما يقارب *4078* وحدة في الساعة

2.1.3.3 الوسط الهندسي

تحت نفس المعطيات التالية فان الوسط الهندسي يعطي كما يلي $G=\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{n}}$

و نستعمله عندما تكون العلاقة بين قيم المتغيرة الإحصائية مرتبطة بعلاقة تناسب

مثال

إن تخرج الطلبة تزايد بنسبة *10* بالمائة خلال سنتين, ثم بنسبة *5* بالمائة خلال *4* سنوات و أخيرا تزايد بنسبة *12* بالمائة خلال *6* سنوات. ما هو معدل التزايد خلال هذه العشرية.إن معدل الزيادة خلال العشرية يساوي $G=\left((1.10)^2(1.05)^4(1.12)^6\right)^{\frac{1}{12}}=1.092$, أي إن نسبة الزيادة كانت بمقدار *9.2* بالمائة.

2.2 مقاييس التشتت

إن الطالبين احمد و محمد حصلا على النتائج السنوية التالية *7,8,11,12,13,13,13* لأحمد بينما *4,7,9,12,13,13,19* تحصل عليها محمد. نلاحظ لهما نفس الوسيط 12 و لديهما نفس الوسط 11 و كذلك نفس المنوال و بالرغم من هذا فالسلسلتان غير متشابهتين: إن السلسلة الإحصائية المرفقة لمحمد أكثر تشتتا من السلسلة المرفقة لأحمد, لهذا سنعرف مقاييس أخرى تسمح لنا مضافة إلى المقاييس السابقة مقارنة كأفضل ما يمكن سلسلتين زمنيتين

2.2.1 المدى

المدى عبارة عن الفرق بين اكبر قيمة و أصغرها في السلسلة الإحصائية , و هو يعطي فكرة تقريبية على انتشار مختلف قيم السلسلة[10].

---

[9] الوسط الحسابي يساوي 4166.66 أي ما يقارب 4167 (فرق معتبر بين الوسطين)

[10] يمكن أن تكون القيمتان الحديتان أو إحداهما حالة شاذة .

مثال

المدى بالنسبة للسلسلة المرفقة لأحمد يساوي *6=7-13* أما بالنسبة لمحمد فيساوي *15=4-19*.

ملاحظة

يمكن حساب المدى بالنسبة لسلسلة حسابية حتى و إن كانت مستمرة.

مثال

ليكن الجدول التالي و الذي يعطي توزع الطلبة حسب بعد مساكنهم عن الجامعة

x_i	[0 10[	[10 20[	[20 40[	[40 70[	[70 80[	المجموع
n_i	12	13	32	47	15	119

مدى الفئة الأولى يساوي *10=0-10* و مدى الفئة الثانية يساوي *10=10-20* بينما مدى الفئة الثالثة يساوي *20=20-40* وهكذا حتى نصل إلى حساب مدى الفئة الأخيرة والذي يساوي *10=70-80*. من جهة أخرى فان مدى السلسلة الإحصائية يساوي *80=0-80*.

2.2.2 الربيعات

هي قيم تأخذها المتغيرة الإحصائية بحيث تقسم التكرار الكلي إلى نسب معينة:

الربيع الأول هو قيمة المتغيرة الإحصائية بحيث *25* بالمائة من التكرار تكون قيمها الإحصائية اقل من قيمة الربيع الأول و *75* بالمائة المتبقية تأخذ قيم اكبر, الربيع الثاني يتطابق مع الوسيط و أما الربيع الثالث فانه القيمة من السلسلة الإحصائية بحيث *75* بالمائة من التكرار الكلي تكون قيمه اصغر من قيمة الربيع الثالث و أما البقية المقدرة ب *25* بالمائة فتكون قيمها اكبر.

مثال

الحالة المتقطعة

الحالة الأولى التكرار الكلي *n* فردي

لتكن لدينا السلسلة التالية *(7,8,11,12,13,13,13)* المشكلة من *7* قيم .إن الوسيط أو الربيع الثاني يوافق القيمة التي تأتي في المرتبة *50* بالمائة وهي *12* بعداها يبقى على يسار القيمة *12* القيم *7* *8* ,*11* و التي تمثل *50* بالمائة و منه القيمة الموافقة لـ *25* بالمائة تساوي *8* و هي قيمة الربيع الأول, بنفس الطريقة نجد أن الربيع الثالث يساوي *13*.

الحالة الأولى التكرار الكلي *n* زوجي

لتكن لدينا السلسلة التالية *(7,8,11,12,13,13)* المشكلة من *6* قيم .إن الوسيط أو الربيع الثاني يوافق القيمة التي تأتي في المرتبة *50* بالمائة وهي *(11+12)/2* بعدها يبقى على يسار القيمة *11.5* القيم *7,8,11* و التي تمثل *50* بالمائة و منه القيمة الموافقة لـ *25* بالمائة تساوي *8* و هي قيمة الربيع الأول, بنفس الطريقة نجد أن الربيع الثالث يساوي *13*.

الطريقة العامة لإيجاد الربيعات في الحالة المتقطعة

لتكن لدينا السلسلة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

الحالة الأولى n زوجي و n/2 زوجي

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) : \ i = \frac{n}{4} \\ Q_2 = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \\ Q_3 = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) : \ i = \frac{3n}{4} \end{cases}$$

الحالة الثانية n زوجي و n/2 فردي

$$\begin{cases} Q_1 = x_{\frac{n+2}{4}} \\ Q_2 = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \\ Q_3 = x_{\frac{3n+2}{4}} \end{cases}$$

الحالة الثالثة n فردي و (n-1)/2 زوجي

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) : \ i = \frac{n-1}{4} \\ Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}} \\ Q_3 = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) : \ i = \frac{3n+1}{4} \end{cases}$$

الحالة الرابعة n فردي و (n-1)/2 فردي

$$\begin{cases} Q_1 = x_{\frac{n+1}{4}} \\ Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}} \\ Q_3 = x_{\frac{3(n+1)}{4}} \end{cases}$$

الحالة المستمرة

عندما تكون السلسلة الإحصائية ذات متغيرة مستمرة فإننا نستعمل القانون التالي و لكن دون التعرض لبرهانه: $Q_i = L_0 + \frac{L_1 - L_0}{n_0}(\frac{iN}{4} - F_0) \ , i = 1,2,3$ **حيث** L_0, L_1 **هي حدي الفئة التي ينتمي إليها** Q_i **من اجل** i **يساوي *1* نجد الربيع الأول و من اجل** i **يساوي *2* نحصل على الربيع الثاني بينما من اجل** i **يساوي *3* نجد الربيع الثالث.**

مثال

ليكن لدينا توزع عينة من سكان مدينة البليدة حسب فئات السن:

الفئات	التكرار	التكرار التجميعي
[0 20[	14432	14432
[20 60[	31965	46397
[60 75[	7590	53987
[75 90[	4464	58451

لحساب أحد الربيعات نستعمل تقريبا نفس العلاقة التي حسبنا بواسطتها الوسيط

$$Q_i = L_0 + \frac{L_1 - L_0}{n_0}(\frac{iN}{4} - F_0) \ i = 1,2,3$$

وعليه يكون الربيع الأول و الذي يمثل قيمة المتغيرة الإحصائية التي توافق *25* بالمائة من التكرار الكلي.لحساب Q_1 نبحث عن *25* بالمائة لـ *58451* فنجد *14612.75* و هي محصورة بين *14432* و *46397* أي أن Q_1 ينتمي إلى المجال $]20 \quad 60[$ و عليه يكون مساويا لـ

$$Q_1 = L_0 + \frac{L_1 - L_0}{n_0}(\frac{N}{4} - F_0) = 20 + \frac{(60-20)}{31965}\left(\frac{1 \times 58451}{4} - 14432\right) = 20.22 \ \text{ans}$$

و بنفس الكيفية نحسب الربع الثاني[11] و الربيع الثالث.

$$Q_3 = L_0 + \frac{L_1 - L_0}{n_0}(\frac{3N}{4} - F_0) = 20 + \frac{(60-20)}{31965}\left(\frac{3 \times 58451}{4} - 14432\right) = 56.80 \,\text{ans}$$

ملاحظة

في حالة متغيرة إحصائية مستمرة, فانه يمكننا أن نحدد بيانيا قيمة الربيعات من مخطط التكرار التجميعي.

Q_1 هي إحداثية النقطة ذات الترتيبة $\frac{n}{4}$،

Q_2 هي إحداثية النقطة ذات الترتيبة $\frac{n}{2}$

Q_3 هي إحداثية النقطة ذات الترتيبة $\frac{3n}{4}$

2.2.3 الانحراف المتوسط

نسمي انحراف للنقطة x_i عن القيمة المتوسطة $\bar{x}$ العدد الحقيقي $|x_i - \bar{x}|$

بالمعاملات λ_i أي $e_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i |x_i - \bar{x}|$

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي و الذي يمثل النقاط التي تحصل عليها الطالبين أحمد و محمد خلال 10 امتحانات.

نقاط احمد	10	3	13	8	10	13	8	13	16	8
نقاط محمد	11	10	11	7	12	10	10	12	10	7

نلاحظ إن معدل كل واحد منهما يساوي *10*, و لكن نقاط محمد اقل تشتتا من نقاط احمد حول الوسط *10*. حساب الانحراف المتوسط يبين ذلك

الانحراف المتوسط لنقاط احمد:

x_i	η_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \eta_i$
3	1	7	7
6	1	4	4

[11] الربع الثاني يتطابق تماما مع الوسيط.

8	2	2	4
10	2	0	0
13	3	3	9
16	1	6	6

$\bar{x} = 10 \ , e_{ahmed} = 3$

الانحراف المتوسط لنقاط محمد:

x_i	η_i	$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$	$\left\|x_i - \bar{x}\right\| \eta_i$
7	2	3	6
10	4	0	0
11	2	1	2
12	2	2	4

$\bar{x} = 10 \ , e_{mohamed} = 1.2$

2.2.4 التباين و الانحراف المعياري

تعريف

نسمي تباين, الوسط الحسابي المرجح للانحرافات المربعة $\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ المرفقة بالمعاملات λ_i .أي

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}\lambda_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

تعريف

الجذر التربيعي الموجب للتباين يسمي الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{V}$

ملاحظة

عمليا نستعمل الشكل المبسط التالي لحساب التباين $V = \frac{1}{n}\sum_i n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$.

2.3 مقاييس الشكل

تعريف

نقول عن توزيع ما بأنه متناظر إذا كانت مختلف قيمه موزعة بشكل متساو على يمين قيمته المركزية و شمالها. و إذا لم يكن متناظر فهو ملتو.

تعريف

نقول عن توزيع ما بأنه أكثر تفرطحا (على الترتيب اقل تفرطحا) عندما تكون نسبة القيم التي يقابلها انحراف عن القيمة المركزية كبيرة (على الترتيب صغيرة)

2.3.1 الالتواء

في توزيع متناظر ,تنطبق القيم الثلاث: المنوال , الوسيط و الوسط بالإضافة إلى ابتعاد الربيع الأول و الثالث و العشير الأول و التاسع عن القيمة المركزية بنفس المسافة . فإذا لم يكن متناظر فهو ملتو.

معاملات بيرسون (PEARSON).

نعرف معامل بيرسون كما يلي $s=\frac{\bar{x}-M}{\sigma}$

حيث $\bar{X}$ تمثل الوسط، M المنوال و σ الانحراف المعياري.

معاملات يول (YULLE)[12]

يعرف كما يلي $s=\frac{(Q_3-me)-(me-Q_1)}{(Q_3-me)+(me-Q_1)}$

حيث Q_1 و Q_3 يمثلان الربيع الأول و الثالث على التوالي بينما *me* يمثل الوسيط.

ملاحظة

إذا كان *s* قريب جدا من 0 يكون التوزيع تقريبا متناظرا.

إذا كان *s* موجب يكون التوزيع ملتو نحو اليسار.

إذا كان *s* سالب يكون التوزيع ملتو نحو اليمين.

إذا كان *s* معدوم يكون التوزيع متناظر تماما.

2.3.2 التفرطح

التفرطح بكل بساطة هو قياس درجة علو قمة توزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي[13]

هناك طرق متعددة لقياس التفرطح نقتصر على واحدة: $G=\frac{1}{2}\times\frac{Q_3-Q_1}{D_9-D_1}$

عمليا نحسب قيمة *G* من أجل التوزيع و نقارن باقي التوزيعات بحساب *G* الخاص بكل توزيع نود معرفة تحدبه من تفرطحه.

2.3.3 دليل التمركز

تعريف الوسيط النوعي)

الوسيط النوعي هو قيمة المتغيرة x_i بحيث *50* بالمائة من كتلة الصفة تكون لديها قيمة أكبر من قيمة الوسيط النوعي و *50* بالمائة المتبقية تكون لديها قيمة أصغر.

تعريف

كتلة الصفة هي جداء المتغير *x* بالتكرار الموافق.

لتحديد التمركز لدينا طريقتان:تحليلية و بيانية.

الطريقة التحليلية

نحسب الوسيط النوعي M_1 و الوسيط *me* و نختبر الفرق بينهما $\Delta M=M_1-me$

إذا كان كبير بالنسبة إلى مدى تغير الصفة فالتمركز قوي.

إذا كان صغير بالنسبة إلى مدى تغير الصفة فالتمركز ضعيف.

إذا كان معدوم فنقول أننا في حالة مساواة.

لتوضيح ما سبق و كيفية تحديد التمركز بيانيا نأخذ المثال التالي

---

[12] يمكن استبدال الربيع الأول و الثالث بالعشير الأول و التاسع.

[13] التوزيع الطبيعي يعرف بدالة توزيع $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

مثال

حدد تمركز الأجور لشركة صغيرة تتكون من 43 عامل.

اجر بالآلاف	عدد العمال	مركز الفئات	$n_i x_i$	$\sum n_i$	$\sum n_i x_i$
]2 4]	5	3	15	5	15
]4 6]	8	5	40	13	55
]6 8]	12	7	84	25	139
]8 10]	10	9	90	35	229
]10 12]	8	11	88	43	317

نحسب أولا *me* علما أن *50* بالمائة من التكرار الكلى تساوي $21.5 = 50 \times \frac{43}{50}$

و منه: $\mathrm{me} = 6 + \frac{(8-6)}{12}\left(21.5 - 13\right) = 7.146$

ثم نحسب M_1 علما أن *50* بالمائة من التكرار الكلى لكتلة الصفة يساوي $158.5 = 50 \times \frac{317}{50}$

و منه $\mathrm{M}_1 = 8 + \frac{(10-8)}{90}\left(158.5 - 139\right) = 8.43$

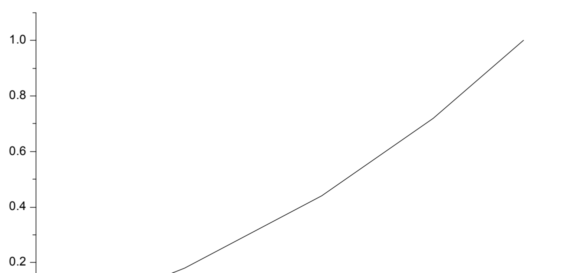
و أخيرا نقارن $\Delta \mathrm{M} = \mathrm{M}_1 - \mathrm{me}$ ***=8.43-7.41=1.02*** **نسبة إلى مدى السلسلة الإحصائية الذي يساوي *12-10=2* و منه نسبة *1.02* إلى *10* تمثل تقريبا *10* بالمائة.**

بعد الحسابات يبقي تقدير التمركز من عدمه للمستخدم و حسب نوع المواضيع المدروسة.

الطريقة البيانية

نشكل الجدول التالي

الفئات	التكرار	التكرار النسبي	التكرار النسبي التجميعي	مركز الفئة	كتلة الصفة	كتلة الصفة النسبي	كتلة الصفة النسبي التجميعي
]2 4]	5	0.12	0.12	3	15	0.05	0.05
]4 6]	8	0.185	0.305	5	40	0.13	0.18
]6 8]	12	0.28	0.585	7	84	0.26	0.44
]8 10]	10	0.23	0.815	9	90	0.28	0.72
]10 12]	8	0.185	1.00	11	88	0.28	1
المجموع	43	1				1	



و نقدر نسبة المساحة بين المنصف الأول و المستقيم المنكسر إلى مساحة المربع

السلاسل الإحصائية ذات بعدين

3 السلاسل الإحصائية ذات بعدين

إن المشاهدات المتعلقة بمتغيرين لـ n فرد تتمثل كأبسط ما يكون على شكل سلسلة مزدوجة (x_i, y_i) مرتبة حسب إحدى مركبتيها.

مثال

الجدول التالي يلخص نتائج قياس طول ووزن 6 طلبة

150	150	148	148	146	145	الطول x_i
45	55	58	47	51	56	الوزن y_i

3.1 تمثيل توزيع التكرارات في حالة متغيرين

تمثل عموما في شكل جداول ذات مدخلين كما يلي:

	y_1	y_2	.....	.....	y_q	مجموع
x_1	n_{11}				n_{1q}	n_1
x_2						
.						
x_p	n_{p1}				n_{pq}	n_p
مجموع	n_{*1}				n_{*q}	n

نعطي المثال التالي و الذي يمثل وزن الجذور و وزن الأوراق ل 1000 نبتة

	]4 8]	]8 12]	]12 16]	]16 20]	]20 24]	]24 28]	]28 32]	]32 36]	جمع
[0 8[	2	0	0	0	0	0	0	0	2
[8 16[	49	40	5	2	0	0	0	0	102
[16 24[	86	137	40	11	0	0	0	0	280
[24 32[	27	153	89	25	7	0	0	0	301
[32 40[	5	45	91	40	6	0	0	0	187
[40 48[	0	10	33	21	16	1	1	0	82
[48 56[	0	1	4	11	10	3	0	0	29
[56 64[	0	0	2	1	2	4	0	1	10
[64 72[	0	0	0	1	0	3	2	0	6
[72 80[	0	0	0	0	1	0	0	0	1
جمع	169	392	270	112	42	11	3	1	1000

3.1.1 التوزيعات الهامشية

تعريف

سواء أكانت المتغيرات مستمرة أو غير مستمرة فإننا نحسب المجاميع الخاصة بسطر من السطور أو عمود من الأعمدة فسنحصل على التكرارات الهامشية $n_{i.}, n_{.j}$

المعرفين كما يلي $n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$ و $n_{.j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$

و هي مرتبطة فيما بينها بالعلاقة التالية $\sum_{i=1}^{p} n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{.j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} = n$

عندما نرفق التكرارات الهامشية على الترتيب لكل قيمة موافقة من قيم x_i و y_j فإننا نشكل سلسلتين وحيدتي البعد تسمى بالتوزيع الهامشي, كما هو موضح فيما يلي

التوزيع الهامشي لـ x.

x_i	x_1	x_2	....	....	....	x_p
التكرار	$n_{1.}$	$n_{2.}$	....	....	....	$n_{p.}$

التوزيع الهامشي لـ y.

y_i	y_1	y_2	....	....	....	y_q
التكرار	$n_{.1}$	$n_{.2}$	....	....	....	$n_{.q}$

3.1.2 التوزيعات الشرطية

إن التكرارات النسبية تعرف كما يلي $n'_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}$ $n'_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}$ حيث $n'_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$ tq $n'_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n'_{ij}$

تعريف

عندما نعتبر سطر خاص من الجدول ذا مدخلين فإننا نعرف بمجموعة النقاط y_j و التكرارات الموافقة n_{ij} توزيع وحيد البعد يسمى بالتوزيع الشرطي أو المرتبط بـ y حسب $x = x_i$

عدد التوزيعات الشرطية يساوي $p+q$.

ملاحظة

نحسب التكرارات النسبية تماما كما تحسب في حالة متغيرة إحصائية وحيدة البعد.

3.2 التمثيل البياني

على شكل جدول

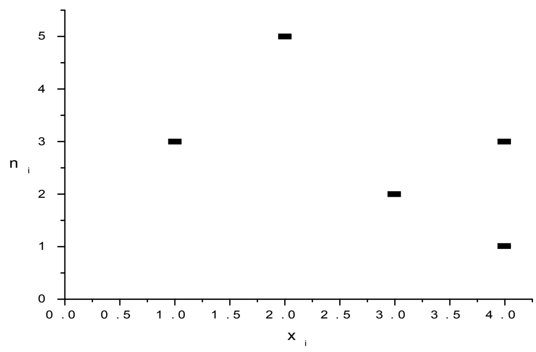
	y_1	y_2	.....	.....	y_q	مجموع
x_1	n_{11}				n_{1q}	$n_{1.}$
x_2						
.						
x_p	n_{p1}				n_{pq}	$n_{p.}$
مجموع	$n_{.1}$				$n_{.q}$	N

3.2.1 على شكل سحابة

إذا زودنا المستوى بمعلم متعامد فانه يمكننا أن نرفق لكل زوج (x_i, y_i) من السلسلة الإحصائية النقطة M_i ذات الإحداثيات x_i, y_i

مثال

x_I	1	2	3	4	4
y_I	3	5	2	3	1



3.3 التعديل الخطي

التعديل الخطي يتمثل في تمرير مستقيم في وسط مجموعة من النقاط أو بالأحرى سحابة. يفترض في المستقيم عكس التطور المتوسط للمتغيرة الإحصائية المدروسة

3.3.1 الطرق البيانية للتعديل

3.3.1.1 طريقة النقطة المتوسطة

و تتمثل هذه الطريقة في البحث عن وسط التراتيب لكل نقطتين متتاليتين, ثم نمرر مستقيم يمر كأفضل ما يمكن قريبا من النقاط الناتجة.

3.3.1.2 طريقة المنحنى المتوسط

بربط نقاط السحابة فيما بينهم نحدد بمنحنيين أعلى و أسفل رواق فيه نرسم منحنى وسط.

3.3.2 الطرق الميكانيكية للتعديل

3.3.2.1 طريقة المتوسط المتدرج[14]

هي طريقة بسيطة تتمثل في جعل عدد المشاهدات الإحصائية تنقص إلى مشاهدتين, ثلاث مشاهدات أو أربع بأن نحسب لكل مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي.

مثال

لتكن السلسلة التالية

X_i	1	2	3	4	5	6
Y_i	10	20	30	20	30	40

فتتحول إلى السلسلة التالية في حالة أخذ المجموعات مشكلة من ثلاث نقاط

x_I	2	5
y_I	20	30

3.3.2.2 طريقة المتوسط المتحرك

هي طريقة مستعملة كثيرا لكونها تستخدم فكرة تقلل من الأخطاء الموضوعية المتعلقة بالسلاسل الإحصائية أثناء جمعها و تتلخص هذه الطريقة في حساب الوسط بشكل دوري متحرك منتقل من قيمة إلى أخري مع الإشارة إلى كون الدور يكون محدد مسبقا.

مثال

---

[14] بالفرنسية نقول échelonnée

نستعيد نفس معطيات المثال السابق مباشرة و نأخذ الدور مساويا لـ*3*, عندئذ نحصل على السلسلة الجديدة التالية

X	3	4	5	6
Y	20.00	23.33	26.66	30.00

3.3.2.3 طريق ماير (Mayer)

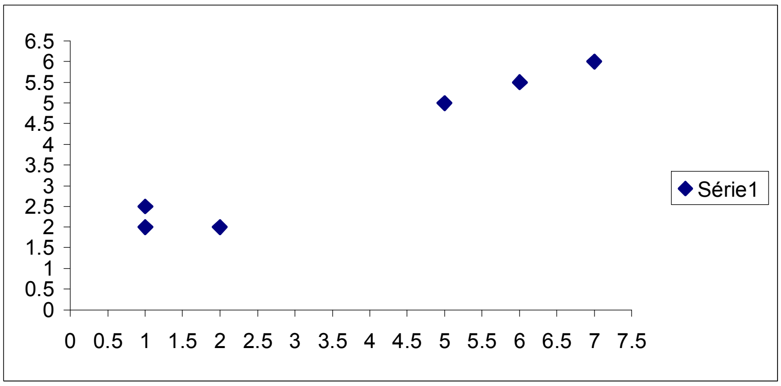
و نستعملها عندما تكون السحابة على شكل سحابتين فنحسب متوسط السحابة الآولى و متوسط السحابة الثانية و نمرر مستقيم من النقطتين فنحصل على مستقيم ماير.

مثال

جد مستقيم ماير للسلسة التالية

x_i	1	1	2	5	6	7
y_i	2	2.5	2	5	5.5	6

مستقيم التعديل



معادلة المستقيم من الشكل $y = 0.6441x + 1.13133$

3.3.2.4 طريقة النقاط الحدية

يتعلق الأمر هنا بتمرير مستقيم في وسط سحابة من النقاط حيث تمر من النقطتين الحديتين الأكبر و الأصغر إطلاقا .هده الطريقة غير صالحة للتطبيق بصفة عامة إلا إذا كانت تقريبا منتظمة التغير و خطية

مثال

في شركة ما نبحث عن إيجاد العلاقة بين رأس المال و ما ينفق للإشهار , لدينا المعطيات الإحصائية التالية:

X	3350	3340	6800	6000	3400	4000	4500	4120	5000	6850	4400	5230
Y	4892	4865	5215	5192	4920	4942	5001	4957	5060	5275	4985	5087

إن التزايد منتظم و منه يمكننا تطبيق طريقة النقاط الحدية حيث معادلتها العامة من الشكل $y = ax + b$

و هي عبارة عن مستقيم يمر من النقطتين الحديتين

(*x=6850* , *y=5275*) و (*x=3340* , *y=4865*)

و بحل الجملة الخطية التالية. $\begin{cases} 3340 \times a + b = 4865 \\ 6850 \times a + b = 5275 \end{cases}$

نجد *a=0.01168* و *b=44748.57* و هو ما يسمح لنا بتحديد المعادلة $y = 0.01168x + 44748.57$

3.3.2.5 طريقة المربعات الصغرى

و يتعلق الأمر بأحسن طريقة تحليلية, الأكثر استعمالا على الإطلاق. إنطلاقا من عينة إحصائية نبحث عن تحديد مستقيم التعديل $y = ax + b$

حيث $a = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum x_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{\sum (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$ **و** $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

وصف الطريقة

مبدأ المربعات الصغرى يتمثل في جعل الفروق المربعة بين تراتيب نقاط السحابة و تراتيب مستقيم التعديل أصغر ما يمكن.أي إذا اعتبرنا $s(a,b) = \sum (y - y_i)^2 = \sum (ax_i + b - y_i)^2$

فان مربع الفرق يكون أصغر ما يمكن إذا تحقق الشرط

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = \sum 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} = \sum 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

$\sum 2(ax^2{}_i + bx_i - x_i y_i) = 0$ **و من ناحية أخرى** $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

و بتعويض b نجد $a = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum x_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{\sum (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$

مثال

ليكن لدينا الجدول التالي و الذي يعطينا نتاج القمح بملايين الأطنان

السنة	1985	1986	1987	1988	1989	1990
الإنتاج	689	827	964	1081	1186	1229

نحاول أن ندرس تطور الإنتاج خلال الفترة الممتدة بين سنتي *1985* و *1990* و التعبير عن هذا التطور بواسطة مستقيم. دائما و لغاية التبسيط نأخذ[15] *1* عوض *1985* و *2* عوض *1986* و *15* عوض *2000* و هذا بالتوافق مع معطيات كل حالة.

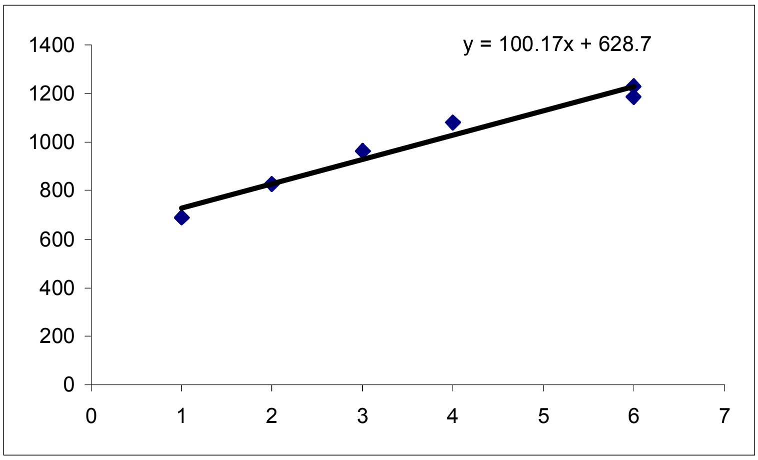
لإيجاد المعادلة نشكل الجدول التالي لأنه يسهل الحسابات

x_i	y_i	$(x_i - \overline{x})$	$(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	689	-2.5	-307	767.5	6.25
2	827	- 1.5	-169	253.5	2.25
3	964	- 0.5	-32	16.0	0.25
4	1081	0.5	85	42.5	0.25
5	1186	1.5	190	285	2.25
6	1229	2.5	233	582.5	6.25
21	5976	0	0	1947	17.5

و هذا ما يسمح بكتابة مستقيم التعديل

---

[15] نقرأ السنة الأولى لبداية الإنتاج وهكذا ...



توقعات تحليلية

انطلاقا من مستقيم التعديل يمكننا تقدير توقعات مستقبلية في حالة استقرار تطور المتغيرة x.

مثال

ما هو حجم إنتاج القمح سنة 2020 إذا بقي الإنتاج على نفس الوتيرة.

هناك طريقتان للإجابة

طريقة تحليلية

ويكفي أن نعوض بـ *x=35* الموافقة لسنة *2020* انطلاقا من سنة *1985* فنجد

$$y = 111.257 \times 35 + 606.6 = 4500.595$$

طريقة بيانية

و يكفي أن نمدد مستقيم (الشكل السابق) من x=35 موازيا لمحور العينات و عند تقاطعه مع مستقيم التعديل نقوم من جديد بتمديد مستقيم مواز لمحور السينات و عند تقاطعه مع محور العينات نقرأ القيمة التقديرية المطلوبة

ملاحظة

الطريقة التحليلية أكثر دقة من البيانية

مستقيم الانحدار[16]

إذا أردنا تقدير قيمة المتغيرة x بالنسبة للمتغيرة y فانه يكون لزاما أن نجد مستقيم الانحدار من الشكل: $x = a'y + b'$ **حيث** $a' = \dfrac{\sum (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum (y_i - \overline{\overline{Y}})^2} = \dfrac{\sum x_i y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum x_i^2 - n\overline{Y}^2}$ **و** $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$

ملاحظة مهمة

لا يمكننا بأي حال أن نعتبر $y = ax + b \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a} = a'y + b'$ **صحيحة إحصائيا و إن كانت رياضيا (في موضوع التحليل) من أبسط ما يعرفه الدارس, لأننا هنا بصدد دراسة تقريبية**

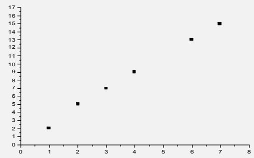
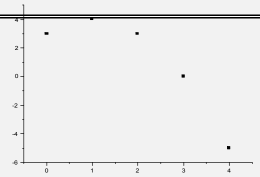
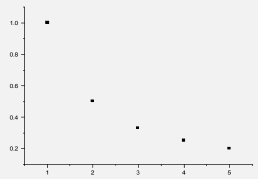
---

[16] كثير من الرياضين لا يفرقون بين مستقيم التعديل و مستقيم الانحدار , بل يقولون y بدلالة x و x بدلالة Y.

3.3.2.6 تعديل من شكل الآخر[17]

حسب معطيات السلسلة الإحصائية و مباشرة بعد تشكيل السحابة ووفق شكلها نستعمل التعديل بمستقيم أو معادلة قطع مكافئ, قطع زائد, تابع أسي أو تابع قوة و هذا دوما باستعمال مبدأ المربعات الصغرى و باختصار لدينا

إن أكثر الدوال المستعملة في التعديل تتلخص كما يلي:

الدالة	شكل السحابة
التعديل الخطي $Y=ax+b$	
التعديل بقطع ناقص $Y=ax^2+bx+c$	
التعديل بقطع مكافئ $Y=1/(ax+b)$	
التعديل بتابع قوة $Y=a\,x^{b}$	عندما $\log y=\log a+b\log x$
التعديل بتابع أسي $Y=a\,b^{x}$	عندما $\log y=\log a+x\log b$

3.3.3 معامل الارتباط

تعريف

نسمي تباين مشترك أو تغاير للمشاهدتين x و y العبارة التالية

$$\mathrm{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij}(x_i-\overline{x})(y_j-\overline{y})$$ حيث $$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_{i\bullet}x_i$$ و $$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}n_{\bullet j}y_j$$

تعريف

الانحراف المعياري للمتغير الإحصائي الهامشي x و y يعرف كما يلي.

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\eta_{i\bullet}(x_i-\overline{X})^2}$$ و $$\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\eta_{\bullet j}(x_j-\overline{X})^2}$$

تعريف

[17] يمكننا تطبيق مبدأ المربعات الصغرى في كل هذه التعديلات.

إن معامل الارتباط الخطي يعرف بالعلاقة: $r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

ملاحظات

يمكن البرهان على أن $r=\sqrt{aa'}$.

$r=1$ يتحقق عندما تكون السحابة موجودة على خط مستقيم ذا ميل موجب

$r\cong 1$ يتحقق عندما تكون السحابة موجودة تقريبا على خط مستقيم ذا ميل موجب

$r=0$ يتحقق عندما تكون السحابة موازية لأحد المحاور أو لديها شكل دائري

$r=-1$ يتحقق عندما تكون السحابة موجودة على خط مستقيم ذا ميل سالب.

تحقق بان معاملات مستقيم التعديل في طريقة المربعات الصغرى تساوي

$$a=\frac{\sum(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sum(x_i-\overline{X})^2}=\frac{\sum x_i y_i-n\overline{X}\overline{Y}}{\sum x_i^2-n\overline{X}^2} \quad \text{و} \quad b=\overline{Y}-a\overline{X}$$

3.4 السلاسل الزمنية

تعريف

السلسلة الزمنية هي سلسلة إحصائية مكونة من متتالية قيم لمتغيرة إحصائية على فترات زمنية منتظمة (أسبوع, شهر, سنة...)

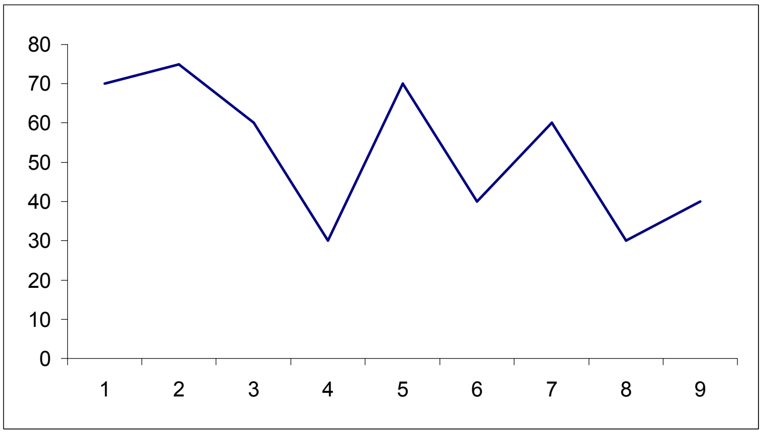
التمثيل البياني للسلاسل الزمنية

إن ابسط تمثيل بياني يتلخص في وضع الزمن على محور السينات و قيم المتغيرة على محور العينات.

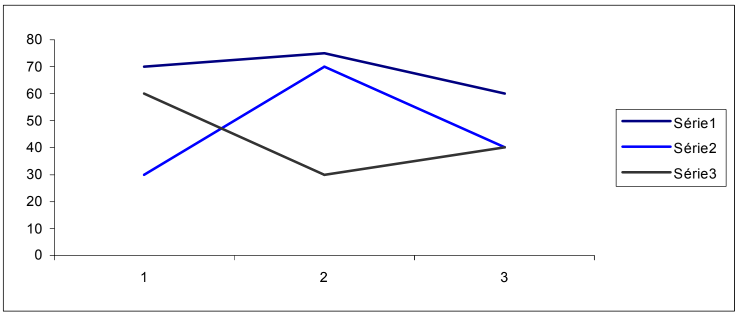
مثال

ليكن لدينا الجدول التالي و الذي يعطي عدد الطلبة الناجحين خلال سنوات 97, 98 و 99 في مقرر الإحصاء.

x/y	1	2	3
1997	70	75	60
1998	30	70	40
1999	60	30	40



تمثيل 1



تمثيل 2

ملاحظة

إن التمثيل الثاني أحسن من الأول لأنه يسمح بمقارنة مباشرة بين السنوات و الفصول

3.4.1 مكونات سلسلة زمنية

تتكون السلسلة الزمنية عموما من 3 مركبات

1) مركبة طويلة الأمد و تهتم بتطور قيمة المتغيرة الإحصائية على المدى المتوسط أي لفترات من الزمن متوسطة, عموما خمس سنوات و أكثر و يرمز لها بالرمز T_t.

2) مركبة دورية و هي مميزة بالتغيرات أو الذبذبات على فترات طويلة حول منحنى توجه. هذه التغيرات تكون تقريبا دورية مثل مركبة إنتاج القمح الجزائري المميز بزيادة كل خمس سنوات و يرمز لها بالرمز C_t.

3) المركبة الفصلية تهتم بتطور الوسط خلال كل سنة, إنها الحركة الموسمية و يرمز لها بالرمز S_t.

4) يضاف لما سبق حركة طارئة و يرمز لها بالرمز ε_t و لا يمكن لأحد توقعها لأنها حركة عشوائية كالجفاف, الزلازل باختصار لدينا $y_t = T_t * C_t * S_t * \varepsilon_t$

3.4.2 تحديد الاتجاه العام.

نستعمل عموما كل الطرق السابقة للتعديل و أفضلهم طريقة المربعات الصغرى.

السلاسل الزمنية و التأثير الموسمي

عندما ندرس تطور كمية أو تقهقرها في لسلة زمنية ما فإنها تتأثر بثلاث مظاهر:

1) تطور دائم أو عام.

2) تسارع حادثي.

3) تأثير التغيرات الموسمية.

إن الظاهرة الأولى يملك ملاحظتها على فترات طويلة باستعمال طريقة المربعات الصغرى و أخواتها الظاهرة الثانية مستحيلة التنبؤ.

أما الظاهرة الثالثة فسنتعرض لها في الفقرة الموالية لمعرفة تأثير التغيرات الموسمية على المتغيرات المدروسة

3.4.3 المعاملات الموسمية

مثال

ليكن لدينا تطور النقاط لقسم خلال 5 سنوات

السنة /الفصل	الأول	الثاني	الثالث
سنة 1	10.5	12	11
سنة 2	10	12.5	13
سنة 3	9	10.5	10
سنة 4	11	13	13.5
سنة 5	11.5	12.5	12.5

نحول الجدول السابق إلى الجدول التالي

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Y	10.5	12	11	12.5	13	9	10.5	10	11	13	13.5	11.5	12.5	12.5	12.5

نستعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد مستقيم التعديل $y = at + b = 0.0114t + 10.5857$ **.**

ليكن الجدول التالي العام لمستقيم التعديل

الفصل السنة	الأول	الثاني	الثالث
سنة 1	10.70	10.81	10.93
سنة 2	11.04	11.16	11.27
سنة 3	11.38	11.50	11.61
سنة 4	11.73	11.84	11.96
سنة 5	12.07	12.19	12.30

و قد حصلنا عليه بتعويض $1,2,.........,15$ **في المعادلة** $y = 0.0114t + 10.5857$

نحسب المعاملات الموسمية كما يلي $\frac{10.5}{10..70} = 0.98$ **معامل موسمي للسنة الأولى الفصل الأول**

$\frac{12}{10..81} = 1.11$ **معامل موسمي للسنة الأولى الفصل الثاني و بصفة عامة تحسب المعاملات الموسمية**

كما يلي: ***معامل موسمي*** $=$ $\dfrac{\textit{التجاه الحقيقي}}{\textit{التجاه العام لمستقيم التعديل}}$

نحصل على الجدول التالي

السنة	معامل الفصل الأول	معامل الفصل الثاني	معامل الفصل الثالث
الأولى	**0.98**	**1.11**	**1.01**
الثانية	**0.91**	**1.12**	**1.15**
الثالثة	**0.79**	**0.91**	**0.86**
الرابعة	**0.94**	**1.10**	**1.13**
الخامسة	**0.95**	**1.03**	**1.02**
وسط حسابي	**0.91**	**1.05**	**1.03**

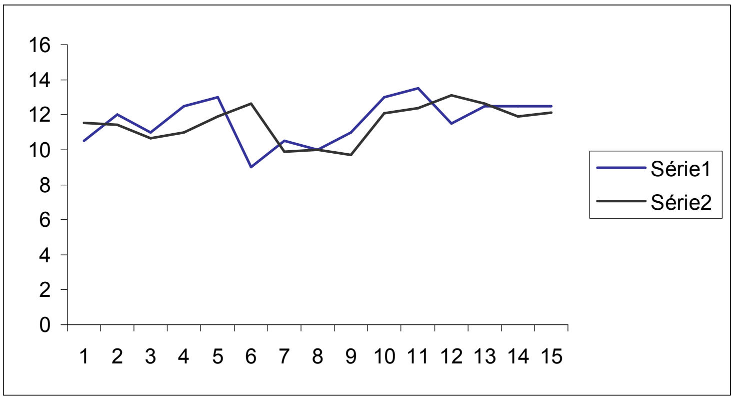
و لإزالة التأثير الموسمي نقوم بالعملية التالية

$$\text{رقم بدون تاثير موسمي} = \frac{\text{اتجاه الحقيقي}}{\text{الوسط الحسابي لمعاملات الموسمية}}$$

و بعد نزع التأثير الموسمي لكل عدد من الجدول نحصل على

السنة /الفصل	الأول	الثاني	الثالث
سنة 1	11.53	11.43	10.68
سنة 2	10.99	11.90	12.62
سنة 3	9.89	10	9.71
سنة 4	12.09	12.38	13.11
سنة 5	12.64	11.90	12.14

و بعد نزع التأثير الموسمي نقوم بتمثيل السلسلة بيانيا



حساب الاحتمالات

4 حساب الاحتمالات

4.1 التحليل التلفيقي

مقدمة

موضوع التحليل التلفيقي هو تحديد أصلي جزء من مجموعة E ما معرف عن طريق خاصية على عناصره.

تذكير حول الأصليات

لتكن *A* و*B* مجموعتين جزئيتين من *E* مجوعة كيفية فان النتائج التالية صحيحة

1) إذا كان $A\cap B=\phi$ فان $|A\cup B|=|A|+|B|$

2) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

3) ليكن $(A_k)_{k\in IN}$ متتالية أجزاء من *E* بحيث $|A_k|\prec+\infty$ فان $\left|\prod_{k=1}^{n}A_k\right|=\prod_{k=1}^{n}|A_k|$

4.1.1 المبدأ الأساسي في التحليل التلفيقي

إذا أمكن إجراء عملية رقم *1* بـ n_1 طريقة مختلفة و أمكن إجراء عملية رقم 2 بـ n_2 طريقة مختلفة فان عدد مختلف الإمكانيات لإجراء العمليات *1,2* ،.........*k* على التوالي هو $\prod_{i=1}^{k}n_i$

أمثلة

1) نقوم بتصنيف سكان مدينة ما حسب المعايير التالية الجنس, الحالة المدنية و الوظيفة.

إذا وجدت *n* وظيفة في هذه المدينة فان عدد أصناف سكان هذه المدينة حسب المعايير الثلاث هو $2\times2\times n$

2) لدينا *r* كرية و *n* صندوق.

إن عدد كل الإمكانيات لتوزيع الكريات يساوي $n\times n\times \quad \times n=n^r$

4.1.2 العينة

لتكن مجموعة $E=\{a_1,.......,a_n\}$. كل ترتيب لـ r عنصر $(a_{j_1},....,a_{j_r})$ من E يسمى عينة طولها *r* مسحوبة من *E*.

ملاحظة

العينة يمكن أن تسحب من المجموعة حسب طريقتين:

1) قبل سحب أي عنصر نعيد العنصر المسحوب و تسمي سحب بالإرجاع.

2) كل عنصر سحب لا يعاد إرجاعه إلى المجموعة و يسمي سحب بدون إرجاع.

نظرية

من مجموعة تحتوي على n عنصر يمكن تشكيل n^r عينة مختلفة بالإرجاع و $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$.

برهان

1) سحب بالإرجاع

لسحب العنصر الأول لدينا n إمكانية اختيار.

لسحب العنصر الثاني لدينا n إمكانية اختيار.

....

لسحب العنصر رقم r لدينا n إمكانية اختيار.

و منه فعدد الإمكانيات لاختيار عينة طولها r هو n^r

2) سحب بدون الإرجاع

لسحب العنصر الأول لدينا n إمكانية اختيار.

لسحب العنصر الثاني لدينا $n-1$ إمكانية اختيار.

....

لسحب العنصر رقم r لدينا $n-r+1$ إمكانية اختيار.

و منه فعدد الإمكانيات لاختيار عينة طولها r هو $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

4.1.3 الترتيبة

نسمي ترتيب k عنصر مأخوذة من مجموعة E تحتوي على n عنصر كل متتالية طولها k و حدودها عناصر مختلفة من E . عدد هذه الترتيبات هو $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$

ملاحظة

كل عينة بدون إرجاع هي ترتيبة و العكس صحيح.

4.1.4 التبديلة

نسمي تبديلة كل عينة طولها n, أخذت بدون إرجاع من مجموعة تشمل n عنصر.

4.1.5 التوفيقة

نسمي توفيقة ذات r عنصر كل جزء من E يشمل على r عنصر.

نظرية

عدد التوفيقات ذات r عنصر المأخوذة من مجموعة ذات n عنصر هو $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ و نرمز له بالرمز C_n^r

البرهان

نفرض أن n_0 هو عدد المجموعات A_r ذات الأصلي المساوي لـ r, لدينا $r!$ تبديلة في كل مجموعة A_r و لكن عدد الترتيبات ذات r عنصر المأخوذة من E هو $A_n^r = n_0 r!$

و منه نستنتج أن $n_0 = \frac{A_n^r}{r!} = C_n^r$

نتائج

1) $\forall n, p \in IN; C_n^1 = C_n^{n-1} = n, C_n^0 = 1, C_n^p = 0 \, si \, p \succ n$

2) $C_n^p = C_n^{p-n}$ **.**

3) $C_n^p = C_n^p + C_n^{p-1}$ **و** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

4) $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ **(علاقة ستيرلينغ (Stirling))**

4.2 التجربة العشوائية و الفضاء الاحتمالي

مقدمة

موضوع الاحتمالات هو دراسة الظواهر العشوائية بوضع نموذج لها و تحديد قوانينها و نعني بالظاهرة العشوائية كل ظاهرة لا يمكن التنبؤ بنتيجة وقوعها و عكس العشوائي هو الحتمي.

أمثلة

1) **تردد حوادث المرور في يوم ما من الأسبوع**

2) **عدد الخطوط الهاتفية المشغولة في لحظة زمنية ما اليوم بمركز القنادسة.**

3) **عدد الولادات في مستشفي بوضياف بدبداية.**

4.2.1 التجربة العشوائية

تعريف

نعني بالتجربة العشوائية كل ظاهرة مدروسة يتعذر علينا التنبؤ بنتيجتها و لكن يمكننا أن تعطي كل النتائج المحتمل وقوعها عند القيام بالتجربة.

مثال

رمي زهرة نرد و قراءة الرقم الذي يحمله الوجه العلوي للزهرة, عندما نقوم بهذه التجربة لدينا ستة نتائج مختلفة ممكنة الوقوع.

تعريف

مجموعة كل النتائج المحتمل وقوعها عند القيام بتجربة عشوائية تسمي الفضاء الشامل و يرمز له بالرمز. Ω

أمثلة

1) **رمي قطعة نقدية واحدة و الاهتمام بظهور إحدى الجهتين:** $\Omega = \{f, p\}$ **حيث** ***p*** **ترمز للظهر و** ***f*** **ترمز للوجه.**

2) **عند القيام برمي قطعة نقدية عدة مرات و نهتم بعدد الرميات قبل الحصول لأول مرة على الوجه يكون عندئذ** $\Omega = IN$ **.**

3) لدينا أسطوانة قطرها R موجب تماما . نقوم برميها بسهم و نهتم بإحداثيات نقطة وقوع السهم على الأسطوانة يكون عندئذ: $\Omega=\left\{(x,y)\in IR^2 / x^2+y^2\leq R^2\right\}$

4.2.2 الحوادث

تعريف

نسمي حادثة كل حدث يمكن أن يقع كما يمكن أن لا يقع عند القيام بتجربة عشوائية ما.

ملاحظات و تعاريف

1) المجموعة Ω تمثل الحادثة التي تتحقق عند كل وقوع للتجربة و تسمي بالحادثة الأكيدة و نسمي الحادثة المستحيلة, الحادثة التي لا تتحقق أبدا و نرمز لها

بالرمز ϕ و تمثلها المجموعة الخالية.

2) نرمز بالرمز A لمجموعة حوادث تجربة ما ذات فضاء شامل Ω و *P(Ω)* مجموعة أجزاء Ω, لدينا دوما العلاقة التالية $A\in P(\Omega)$.

3) كل حادثة هي جزء من Ω. الحادثة الممثلة بعنصر من Ω تسمي الحادثة البسيطة أو الأولية و الحادثة الممثلة بأكثر من عنصر تسمي الحادثة المركبة.

4.2.3 عمليات على الحوادث

نقوم برمي زهرة نرد بحيث كل وجه من وجوهها يحمل رقم من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$. نعتبر أن النتيجة المحتملة لهذه التجربة هي ظهور الوجوه الستة $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. لتكن الحوادث A, B, C المعرفة كما يلي:

الحادثة A الحصول على العددين 2 أو 4.

الحادثة B الحصول على عدد زوجي.

الحادثة C الحصول على عدد أكبر أو يساوي 3.

بعبارة أخري فان: $A=\{2,4\}, B=\{2,4,6\}, C=\{3,4,5,6\}$.

الاستلزام

إذا كانت كل نتيجة تحقق A تحقق حتما B نقول أن الحادثة A تستلزم الحادثة B و نكتب $A\subset B$

التقاطع

الحادثتين البسيطتين $\{4\}$و$\{6\}$ تحققان *B* و*C* و ليس غيرهما. نقول أن الحادثة $\{4,6\}$ هي تقاطع *B* و *C* و نرمز لها بالرمز $B\cap C$.

الاتحاد

تتحقق إحدى الحادثتين *A* و*C* إذا تحققت إحدى النتائج التي تحقق إحدى الحادثتين *A* أو*C*.

المتمم أو العكس

إذا قلنا إن الحادثة *A* لم تتحقق هذا معناه أن إحدى النتائج التالية *6,5,3,1* قد وقعت, و هي نتائج متممة *A* بالنسبة Ω و تسمي الحادثة العكسية للحادثة *A* و نرمز لها بالرمز $\overline{A}$ و C_{Ω}^{A} .

رموز و مصطلحات

الرمز	المصطلح في المجموعات	المصطلح في الاحتمالات
Ω	المجموعة المرجع	الفضاء الشامل
X	عنصر أو نقطة	نتيجة
A	جزء	حادثة
$\overline{A}$ أو C_{Ω}^{A}	متممة	الحادثة العكسية
ϕ	المجموعة الخالية	الحادثة المستحيلة
$\{x\}$	مجموعة وحيدة العنصر	الحادثة البسيطة
$A \subset B$	A محتواة في B	الحادثة A تستلزم B
$A \cap B$	A تقاطع B	تتحقق A و B معا
$A \cap B = \phi$	المجموعتان منفصلتان	الحادثتان متمانعتان
$A \cup B$	اتحاد إباحي (inclusif)	إحدى الحادثتين A أو B تتحقق
$A \Delta B$	الفرق التناظري	إحدى الحادثتين A أو B تتحقق فقط

أمثلة

1) رمي قطعة نقدية تعتبر تجربة . الحصول على الوجه تعتبر حادثة.

2) رمي زهرة نرد تعتبر تجربة. الحصول على رقم *6* تعتبر حادثة, نرمز له بالرمز D_6 .

الحصول على غير *6* تعتبر حادثة هي الحادثة العكسية و نرمز لها بالرمز $\overline{D_6}$.

الحصول على رقم 10 تعتبر حادثة مستحيلة.

الحصول على رقم بين 1 و 6 تعتبر حادثة أكيدة

3) عندما نرمي قطعة نقدية فانه يمكن أن نحصل على وجه كما يمكن أن نحصل على ظهر و لما كانت القطعة النقدية متجانسة فإننا نقول بان احتمال ظهور الوجه يساوي احتمال ظهور الظهر و يساوي 1./2

4) عندما نقوم برمي زهرة نرد فان احتمال الحصول على أي رقم من 1 إلى 6 يساوي 1/6. بينما احتمال الحصول على الأقل على رقم يساوي 4 , أي الحصول على رقم 4 أو 5 أو 6 يساوي 3/6 و بصفة عامة لدينا احتمال حادثة ما يساوي عدد الحالات الملائمة لوقوعها على عدد الحالات الممكنة أي:P(A) = (cas favorable)/(cas possible)

5) نرمي ثلاث قطع نقدية. ما هو احتمال الحصول على وجه و ظهرين

الحالات الممكنة: $P_1P_2P_3, P_1P_2F_3, P_1F_2P_3, P_1F_2F_3, F_1P_2P_3, F_1P_2F_3, F_1F_2P_3, F_1F_2F_3$ هناك *8* حالات ممكنة و *3* حالات ملائمة و منه الاحتمال يساوي *3./8*

6) داخل صندوق توجد *10* كريات بيضاء و *20* كرية سوداء, نخرج عشوائيا كرتين من الصندوق.

ما هو احتمال الحصول على:

أ) كرية بيضاء و الأخرى سوداء.

ب) كرتين بيضاوين.

ت) كرتين سوداوين.

حل

أ) عدد الحالات الممكنة لإخراج كرتين من 30 يساوي $435 = C_{30}^{2}$.

بينما عدد الحالات الملائمة يساوي $200 = C_{20}^{1} \times C_{10}^{1}$.و منه الاحتمال يساوي $\frac{200}{435}$.

ب) عدد الحالات الممكنة لإخراج كرتين من 30 يساوي $435 = C_{30}^{2}$.

بينما عدد الحالات الملائمة يساوي $45 = C_{20}^{0} \times C_{10}^{2}$.و منه الاحتمال يساوي $\frac{45}{435}$.

ت) عدد الحالات الممكنة لإخراج كرتين من 30 يساوي $435 = C_{30}^{2}$،

بينما عدد الحالات الملائمة يساوي $200 = C_{20}^{2} \times C_{10}^{0}$

و منه الاحتمال يساوي $\frac{190}{435}$.

7) احتمال حادثة عكسية $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

مثال

ما هو احتمال عدم ظهور وجه بعد رمي قطعة نقدية.

إن احتمال عدم ظهور وجه يساوي $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 1/2 = 1/2$.

مثال

عنـــد رمـــي زهـــرة نـــرد فـــان احتمـــال الحصـــول علـــى رقـــم 1 أو 2 أو 3 أو 4 يســـاوي $P(1,2,3,4) = 1 - P(5,6) = 1 - 2/6 = 4/6$.

8) لتكن لدينا لعبة تحتوي على 10 أوراق.

4 أوراق تحمل رقم 1 و البقية تحمل أرقام كيفية.

ما هو احتمال الحصول عند نقوم بسحب مع الإرجاع لأربع أوراق على:

1) لا ورقة تحمل رقم 1.

2) ورقة تحمل رقم 1.

3) ورقتان تحملان رقم 1.

4) ثلاث أوراق تحمل رقم 1.

5) أربع أوراق تحمل رقم 1.

حل

عدد الحالات الممكنة لسحب *4* أوراق من *10* يساوي C_{10}^{4} .

1) عدد الحالات كي لانسحب ورقة تحمل رقم *1يساوي* C_{6}^{4} .و منه الاحتمال يساوي $\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=0.071$.

2) عدد الحالات كي نسحب ورقة تحمل رقم *1* يساوي $C_6^3 \times C_4^1$ و منه الاحتمال يساوي.

3) عدد الحالات كي نسحب ورقتين تحملان رقم *1* يساوي $C_6^2 \times C_4^2$. و منه الاحتمال يساوي

$\frac{C_6^2 \times C_4^2}{C_{10}^4}=0.429$.

4) عدد الحالات كي نسحب ثلاث أوراق تحمل رقم *1* يساوي $C_6^1 \times C_4^3$.و منه الاحتمال يساوي

$\frac{C_6^1 \times C_4^3}{C_{10}^4}=0.114$.

5) عدد الحالات كي نسحب أربع أوراق تحمل رقم *1* يساوي $C_6^0 \times C_4^4$ و منه الاحتمال يساوي

$\frac{C_6^0 \times C_4^4}{C_{10}^4}=0.05$.

4.2.4 مسلمات الاحتمالات الأساسية

1) إن احتمال أي حادثة محصور بين 0 و 1: $0 \le P(A) \le 1$

2) إن احتمال الحادثة الأكيدة يساوي *1* و احتمال الحادثة المستحيلة يساوي *0*.

3) لتكن *A* و*B* حادثتين متنافيتان لدينا $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

4) إذا كان يمكن لحادثة *A* أن تقع وفق طرق مختلفة و كانت كل طريقة تمنع حدوث باقي الطرق فان احتمال تحقق *A* يساوي جمع كل الاحتمالات لمختلف الطرق الأخرى أي:

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_m)$.

خواص

يمكننا استنتاج الخصائص التالية

1) ليكن $A_1, ..., A_m$ *m* حادثة متنافية فيما بينها مثنى مثنى فانه يمكننا البرهان أن:

$P(A_1 \cup ... A_m)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_m)$

2) إذا كانت لدينا *m* حادثة متنافية مثنى مثنى و إذا كان لزاما على حادثة من *m* حادثة أن تتحقق فإننا نقول بان الحوادث متتامة و يكون لدينا. $P(A_1 \cup ... A_m)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_m)=1$

3) لدينا $P(\overline{A})=1-P(A)$ حيث $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة *A*.

4) عندما تكون *A* و*B* حادثتين غير متنافيتين فان: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

5) يمكن تعميم الخاصية السابقة إلى حالة ثلاث حوادث غير متنافية :

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)-P(A \cap B \cap C)$$

و منه $P(A \cup B \cup C) \le P(A)+P(B)+P(C)$

أمثلة

في صندوق يحتوي على *90* كرية, 30 بيضاء, 15 خضراء, 20 حمراء و 25 صفراء.

نخرج ثلاث كريات عشوائيا.

ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون و كرية من لون أخر بشرط أن كلا اللونين لا يكون أبيضا.

حل

عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاث كريات من ضمن تسعين يساوي $C_{90}^3 = 117480$

عدد الحالات الملائمة للحصول على:

***E_1*: 2 خضراء و 1حمراء أو صفراء يساوي** $C_{15}^2 \times C_{45}^1 = 4725$ **.**

***E_2*: 2 حمراء و 1 صفراء أو خضراء يساوي** $C_{20}^2 \times C_{40}^1 = 7600$ **.**

***E_3*: 2 صفراء و 1 خضراء أو حمراء يساوي** $C_{25}^2 \times C_{35}^1 = 10500$

لدينا $P(E_1) = \frac{4725}{117480}, P(E_2) = \frac{7600}{117480}, P(E_3) = \frac{10500}{117480}$ **.**

لتكن *E* الحادثة المعتبرة إذن حسب المسلمة 4 فان $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{22825}{117480} = 0.194$ **.**

4.2.5 الاحتمال الشرطي و الاستقلالية

تعريف

لتكن الحادثة A حادثة احتمالها غير معدوم. نسمي احتمال شرطي للحادثة B بالنسبة للحادثة A و نرمز بالرمز: $P_A(B)$ **أو** $P(B/A)$

العدد المعرف كالتالي: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **.**

ملاحظة $\forall B \subset A^c ; P(B/A) = 0 \text{ et } P(A/A) = 1$

مثال

نخرج بالتتابع كريتين من صندوق يحتوي على 10 كريات بيض و 5 سود.

ما هو احتمال الحصول على الاثنين سود؟

الحادثة A: الكرية الأولى المستخرجة سوداء

الحادثة B/A: علما أن الكرية الأولى المستخرجة سوداء, الكرية الثانية المستخرجة سوداء.

$P(A) = \frac{5}{15}$ **,** $P(B/A) = \frac{4}{14}$ **و منه** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14}$

مثال

كيس يحتوي على *4* كريات حمراء و *6* كريات سوداء. نسحب كريتان الواحدة تلوى الأخرى.

ما هو احتمال أن الكرة المسحوبة الأولى حمراء و الثانية سوداء؟

حل

لتكن $\Omega = \{(x_1, x_2)\}$ **حيث *x_1* ترمز للكرية المسحوبة أولا و *x_2* و ترمز للكربة الثانية.**

الحالة الأولى السحب بالإرجاع.

لتكن A_i الحادثة الحصول على كرية حمراء عند السحب رقم i و لتكن B_i الحادثة الحصول على كرية سوداء عند السحب رقم i عندئذ فان $A_1 \cap B_2$ هي الحادثة الحصول على كرية حمراء في السحب الأول و سوداء في السحب الثاني و منه $P(A_1 \cap B_2) = p(B_2 / A_1) \times P(A_1) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$

الحالة الثانية السحب بدون إرجاع.

تحت نفس المعطيات السابقة لدينا $P(A_1 \cap B_2) = p(B_2 / A_1) \times P(A_1) = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$

الحوادث المستقلة

لم تكون الحوادث A وB (أو أكثر) بحيث وقوع حادثة ما لا يؤثر على الأخرى نقول عندها بأن الحادثتين مستقلتان.

نظرية

تكون الحادثتان A وB مستقلتين إذا وفقط إذا تحقق $P(B \cap A) = p(B) \times P(A)$

برهان

لدينا العلاقة $P(A) = P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

و هو المطلوب.

مثال

نختار عشوائيا رقمي تسجيل من دائرة العلوم الدقيقة و التي عدد طلبتها 250 طالبة و 200 طالب, ثم نختار رقمي تسجيل من دائرة علوم التسيير و التي عدد طلبتها 230 طالبة و 220 طالب. ما هو احتمال كون الأرقام الأربعة المختارة تكون كلها لطالبات.

حل

لكون الحادثتان مستقلتين فان $P(A \cap B) = p(A) \times P(B) = \frac{C_{250}^2}{C_{450}^2} \times \frac{C_{230}^2}{C_{450}^2} = 0.0803$

4.2.6 نظرية بابيز (Bayes)

ليكن لدينا فضاء مزود باحتمال و لتكن A حادثة و $(B_n)_{n \in I}$ متتالية حوادث تشكل تجزئة منتهية أو قابلة للعد لفضاء الحوادث E, عندئذ لدينا $\forall A, \forall k \in I; P(B_k / A) = \frac{P(A / B_k) \times P(B_k)}{\sum_{n \in I} P(A / B_n) \times P(B_n)}$

برهان

لدينا (1) $$P(B_k / A) = \frac{P(A / B_k) \times P(B_k)}{P(A)}$$

$(B_n)_{n \in I}$ **تجزئة لـ E** $\Leftrightarrow \forall n, m \in I, n \neq m; B_n \cap B_k = \phi \text{ et } \bigcup_{n \in I} B_n = E$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap E) = P(A \cap (\bigcup_{n \in I} B_n)) = P(\bigcup_{n \in I} (A \cap B_n)) = \sum_{n \in I} P(A \cap B_n) = \sum_{n \in I} P(A / B_n) \times P(B_n) \qquad (2)$$

و بتعويض العلاقة (2) في (1) نحصل على $\forall A, \forall k \in I; P(B_k / A) = \frac{P(A/B_k)\times P(B_k)}{\sum_{n\in I} P(A/B_n)\times P(B_n)}$

و هو المطلوب.

مثال

مصنع يشتغل بثلاث آلات فإذا كانت الآلة رقم *1* تنتج *40* بالمئة من إنتاج المصنع و الآلة رقم *2* تنتج *30* بالمئة بينما الآلة رقم *3* تنتج *30* بالمئة. إذا كان احتمال أن تكون الوحدات المنتجة من طرف الآلة رقم *1* معيبة يساوي *0.02* و إذا كان احتمال أن تكون الوحدات المنتجة من طرف الآلة رقم *2* معيبة يساوي *0.03* بينما احتمال أن تكون الوحدات المنتجة من طرف الآلة رقم *3* معيبة يساوي *0.04*. أخذت وحدة من إنتاج المصنع فكانت معيبة.

ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة رقم 2؟

حل

لتكن A الحادثة: الوحدة المسحوبة معيبة.

المطلوب إيجاد $P(2/A)$

حسب نظرية بييز لدينا $P(2/A) = \frac{P(2)\times P(A/2)}{P(1)\times P(A/1)+P(2)\times P(A/2)+P(3)\times P(A/3)} = \frac{0.30\times 0.03}{0.40\times 0.02+0.30\times 0.03+0.30\times 0.04} = 0.31$

مثال

ليكن لدينا صندوقين *A* و *B* بحيث *A* تحتوي على *90* كرية سوداء و *10* كريات بيضاء, بينما *B* تحتوي على *80* كرية بيضاء و *20* كرية سوداء. نقوم بسحب كرية فنجد أن لونها أسود, ما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق A.

حسب نظرية بييز لدينا $P(A/N) = \frac{P(N/A)\times P(A)}{P(N/A)\times P(A)+P(N/B)\times P(B)} = \frac{\frac{C_{90}^2}{C_{100}^2}\times\frac{1}{2}}{\frac{C_{90}^2}{C_{100}^2}\times\frac{1}{2}+\frac{C_{20}^2}{C_{100}^2}\times\frac{1}{2}}$

4.3 المتغير العشوائي النقطي, قانون الاحتمال

مقدمة

لتكن $A_1,......,A_n$ n حادثة لتجربة ما عشوائية. بحيث الحوادث تكون متنافية مثنى مثنى و ليكن $P_1,......,P_n$ احتمال تحقق الحوادث $A_1,......,A_n$ على الترتيب.

لتكن $x_1,......,x_n$ قيم متغيرة ما x و $P_1,......,P_n$ هي القيم التي تأخذها الدالة P عند النقاط $x_1,......,x_n$.

تعريف

كل المتغيرات المرفقة لتجارب عشوائية و التي تأخذ قيم متفرقة [18] تسمي متغيرات عشوائية نقطية.

كما نسمي قانون احتمال للمتغيرة العشوائية النقطية x العبارة التالية $P(X = x_i) = P(X \le x_i)$

ملاحظة

يمكن تمثيل قانون بعلاقة رياضية أو بإعطاء جدول.

---

[18] أو منفصلة أو نقطية

أمثلة

1) نرمي قطعتين نقديتين و نهتم بالحوادث:

0: لا يظهر الوجه

1: يظهر الوجه مرة واحدة.

2: يظهر الوجه مرتين.

إن القيم المرفقة لهذه المتغيرة العشوائية هي *0*، *1* و*2* ويكون قانون المتغيرة العشوائية التي تهتم بعدد الوجوه الظاهرة عقب رمي قطعتين نقديتين هو:

X	0	1	2
P	1/4	2/4	1/4

2) في صندوق توجد 4 كريات بيض و 6 حمر . نخرج 4 كريات معا.

لتكن الحوادث التالية:

عدد الكريات البيضاء المسحوبة تساوي *0*، *1*، *2*، *3* أو*4*.

و منه فالقيم التي تأخذها المتغيرة العشوائية هي 0، 1، 2، 3 و 4.

نجد قانون التوزيع كمايلي

x	0	1	2	3	4
p	$\frac{C_4^0 \times C_6^4}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^1 \times C_6^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^2 \times C_6^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^3 \times C_6^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^4 \times C_6^0}{C_{10}^4}$

4.4 بعض التوزيعات الكلاسيكية

4.4.1 توزيع برنو لي (BERNOULLI)

لتكن متغيرة عشوائية لا تأخذ سوي قيمتين و لتكن 0 و 1 أي $x(\Omega)=\{0,1\}$

نفرض وجود $0 \prec \alpha \prec 1$ **بحيث** $\begin{cases} P(X=0)=1-\alpha \\ P(X=1)=\alpha \end{cases}$

نقول إن المتغير العشوائي النقطي *X* يتبع قانون برنو لي ذي الوسيط α **و نرمز بالرمز** $X \longrightarrow B_\alpha(x)$ **.**

4.4.2 توزيع ديراك (DIRAC)

ليكن X متغير عشوائي نقطي و ليكن a نقطة كيفية من IR بحيث

$\forall x \in IR-\{a\}; P(X=x)=0, et\, p(X=a)=1$ **نقول بأن المتغير العشوائي *X* منحل (dégénérée) و نرمز لهذا القانون بالرمز** δ_a **و يسمي قانون ديراك عند النقطة a.**

4.4.3 القانون الهندسي المصعد (hypergéométrique).

ليكن *X* متغير عشوائي نقطي و*N* عدد طبيعي و ليكن *N₁*، *N₂* و*n* كذلك أعداد طبيعة

إن المتغير العشوائي النقطي *X* بحيث: $\forall = \overline{0,......,N_1} : P(X=k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$

يتبع القانون الهندسي المصعد.

مثال

في صندوق توجد *4* كريات بيض و *6* حمر. نخرج *4* كريات معا, لتكن الحوادث التالية: عدد الكريات البيضاء المسحوبة تساوي *0 ,1 ,2 ,3* أو *4*. و منه فالقيم التي تأخذها المتغيرة العشوائية هي 0, 1, 2 ,3 و 4 نجد قانون التوزيع كما يلي:

x	0	1	2	3	4
p	$\frac{C_4^0 \times C_6^4}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^1 \times C_6^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^2 \times C_6^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^3 \times C_6^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_4^4 \times C_6^0}{C_{10}^4}$

4.4.4 القانون الهندسي (loi géométrique)

إن المتغير العشوائي *X* بحيث $\forall k \in IN^* : P(X=k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}; 0 \prec \alpha \prec 1$

يتبع القانون الهندسي ذي الوسيط α

مثال

نلقي قطعة نقدية عدد لا نهائي من المرات نفرض أن احتمال ظهور جهة الوجه هو α ليكن *X* عدد الرميات التي نقوم بها للحصول لأول مرة على جهة الوجه. حدد قانون *X*

حل

نرمز لجهة الوجه بالعدد *1* و لجهة الظهر بالعدد *0* أي $\Omega = \left\{(x_i)_{i\in IN^*} / x_i \in \{0,1\}\right\}$

نرمز بالرمز P_i, F_i للحادثة الحصول عند الرمية رقم *i* على وجه, ظهر على الترتيب.

نفرض أننا حصلنا لأول مرة على جهة الوجه عند الرمية رقم *k* فيكون المطلوب تقدير احتمال الحادثة

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_{k-1} \cap F$$

و لما كانت الحوادث P_i , F_i مستقلة فيما بينها فانه يكون لدينا

$$P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_{k-1} \cap F) = P(P_1) \times P(P_2) \times \ldots \times P(P_{k-1}) \times P(F_k) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha$$

قانون ثنائي الحد (loi binomiale)

ليكن *X* متغير العشوائي بحيث $\forall k \in \{1,......,n\}; P(X=k) = C_n^k.\alpha^k.(1-\alpha)^{n-k}, n \in IN^* et 0 \prec \alpha \prec 1$.

هذا القانون يسمي بقانون ثنائي الحد ذي الوسيط α و الرتبة *n* و له $X \longrightarrow B(\alpha, n)$.

مثال

نقوم برمي قطعة نقدية n مرة.

احتمال ظهور الوجه يساوي α.

ليكن *X* عدد المرات التي ظهرت فيها جهة الوجه $\Omega = \left\{(x_i)_{1\le i\le n} / \forall i, x_i \in \{0,1\}\right\}$

$$P(X=k) = P\left(\left\{(x_i)_{1\le i\le n} / \ni I \in \{1,......,n\}, |I| = k, \forall i \in I, x_i = 1, \forall i \notin I, x_i = 0\right\}\right) = C_n^k.\alpha^k.(1-\alpha)^{n-k}$$

4.4.5 قانون بواسون (loi de poisson)

ليكن X متغير عشوائي نقطي بحيث $P(X=n)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{n}}{n!}$ حيث $\lambda \in IR_{+}^{*}$ و $n \in IN$

مثال

معدل حوادث المرور على الطريق الرابط بين بشار و البيض يساوى 8 في الشهر.

فما احتمال؟

1) عدم حدوث أي حادث خلال 15 يوم.

2) احتمال حدوث 4 حوادث أو اقل خلال شهر.

3) أن يزيد عدد الحوادث عن 6 خلال شهرين.

حل

يتعلق الأمر بقانون بواسون (Poisson) $k=0,1,2,...\text{et}\, \lambda = \text{moyenne}$

$$p(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

$\lambda = 8$ خلال شهر.

1) $p(X=0)=\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=e^{-4}$ لأن $\lambda = 8/2$ خلال نصف شهر.

2) $p(X\le 4)=\sum_{k=0}^{4}\frac{e^{-8}8^{k}}{k!}$ لان $\lambda = 8$ خلال شهر.

3) $p(X\succ 6)=1-p(X\le 6)=1-\sum_{k=0}^{6}\frac{e^{-16}16^{k}}{k!}$ لان $\lambda = 16$ خلال شهرين.

4.4.6 *قانون ثنائي الحد السالب* (loi Binomiale négative)

ليكن لدينا صندوق يحتوي على كريات بيضاء بنسبة معينة $p\,(0\le p\le 1)$. لتكن *Y* المتغيرة العشوائية التي تهتم بعدد المرات من السحب المتتالي بالإرجاع الضروري للحصول على *r* كرية بيضاء.

لتكن الحوادث

A={ حصلنا على *(r-1)* كرية بيضاء في *(y-1)* سحب}.

B={ حصلنا على كرية بيضاء في السحب رقم *y* }. $p(Y=y)=P(A\cap B)=p(A)\times P(B)$

(الحوادث مستقلة لأن السحب بالإرجاع)

$p(A)=C_{y-1}^{r-1}p^{r-1}q^{y-r}$ و $p(B)=p$

و منه فإن $p(Y=y)=C_{y-1}^{r-1}p^{r}q^{y-r}$ حيث $q=1-p, 0\prec p\prec 1$

هنا $\Omega_{Y}=\{r,r+1,............\}$

تعريف

نضع *X,X=Y-1* متغيرة عشوائية تتبع قانون ثنائي الحد السالب و يرمز له بالرمز $\overline{B}(r;p)$ بحيث

$$\Omega_{X}=IN, p(X=k)=p(Y=k+r)=C_{r+k-1}^{k}p^{r}q^{k}$$

ملاحظة

نقول بأن X هو قانون عدد الفشل قبل النجاح رقم r

4.5 الأمل الرياضي - التباين – الانحراف المعياري

الأمل الرياضي

تعريف

لتكن X متغيرة عشوائية معرفة عن طريق قانون الاحتمال حسب الجدول التالي

X	x_1	x_2	.....	.....	....	....	....	x_n
P	P_1	P_2	.....	.....	...	.....	...	p_n

نسمي أمل رياضي [19] العدد الحقيقي $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)$

التباين و الانحراف المعياري

نسمي تباين للمتغير العشوائي X العدد الحقيقي الموجب التالي $V=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2P(X=x_i)$

كما نسمي انحراف معياري للمتغير العشوائي X الجذر التربيعي الموجب للتباين أي $\sigma=\sqrt{V}$

مثال

في صندوق توجد 4 كريات بيض و 6 حمر. نخرج 4 كريات معا, لتكن الحوادث التالية

عدد الكريات البيضاء المسحوبة تساوي *0, 1, 2, 3* أو *4*. و منه فالقيم التي تأخذها المتغيرة العشوائية هي *0, 1, 2, 3* و *4* نجد قانون التوزيع كما يلي

x	0	1	2	3	4
p	0.071	0.381	0.429	0.114	0.005

لحساب الأمل, التباين و الانحراف المعياري يستحسن تشكيل الجدول التالي.

x_i	P(x)	$(X_i - E(X))$	$(X_i - E(X))^2$	$P(x_i)(X_i - E(X))^2$
0	0.071	1.601-	2.563	0.181
1	0.381	0.601-	0.361	0.137
2	0.429	0.399	0.159	0.233
3	0.114	1.399	1.957	0.233
4	0.005	2.399	5.755	0.028

الأمل الرياضي يساوي $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=1.601$

بينما التباين يساوي $V=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2P(X=x_i)=0.639$

و منه الانحراف المعياري يساوي $\sigma=\sqrt{V}=0.799$

5 التوزيعات العشوائية المستمرة – قانون الاحتمال

مقدمة

سبق و أن لاحظنا في حالة توزيع عشوائي بأن خلال التجربة العشوائية نحصل على عدد منته من الحوادث نرفقها لقيمة معينة للمتغيرة العشوائية و نعطي لها احتمال و ليكن P. عندما تكون P دالة

---

[19] أو توقع أو متوسط

معرفة لكل قيمة من قيم المتغيرة العشوائية لكن عدد القيم التي تأخـذها المتغيـرة العشـوائية منتـه, مثل هذه الدالة هي قانون احتمال متقطع أي أن المتغيرة العشوائية غير مستمرة. مجموع كـل القـيم التي تأخذها *P* تساوي *1*.

في بعض التجارب عدد الحالات يمكن أن يكون غير منته و لكن قابل للعد عندها يمكننا أن نعرف قـانون الاحتمال المرفق مثل قانون بواسون. في حـالات أخـرى فـان المتغيـرة العشـوائية المرفقـة لتجربـة مـا يمكن أن تأخذ عـدد غيـر منتـه مـن القـيم مـن أي مجـال كـان, عنـدها نقـول بـأن المتغيـرة العشـوائية مستمرة, و منه قانون الاحتمال مستمر.

لتكن *X* متغيرة عشوائية مستمرة, نعرف قانون احتمال X بإعطاء الاحتمال التالي: $P(X \leq x), \forall x \in IR$

مثال

ليكن لدينا قرص بنصف قرص يساوي *R* و نفرض أننا نقوم بعملية الرمي و أن كل الرميات تصيب القرص و أن احتمال إصابة القرص متناسبة مع مساحة هذا الجزء. عند كل رمي نرفق المسافة الفاصـلة بـين مركز القرص و نقطة سقوط القذيفة. إن المتغيرة الإحصائية *X* مستمرة لأنها تأخذ كل القيم بين *0* و *R*.

ليكن *r* عدد كيفي بحيث $0 \leq r \leq R$.

المجموعة $\{X = r\}$ تمثل كل النقاط المنتمية إلى القرص حيث بعـدها عـن المركـز يسـاوي *r*. مسـاحة هذه المجموعة معدومة و منه $P(X = r) = 0$.إذن $P(X \leq r) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$.

5.1 كثافة الاحتمال

تعريف

إن قانون احتمال المتغيرة العشوائية المستمرة معرف كما يلي $F(x) = P(-\infty \leq X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

إن الدالة *f* تدعي بكثافة احتمال المتغير العشوائي *X* بينما *F* تدعي بدالة توزيع المتغير العشوائي *X*.

مثال

إن دالة توزيع المتغيرة العشوائية السابقة هي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec O \\ \frac{x^2}{R^2} & si\ 0 \leq x \prec R \\ 1 & si\ x \geq R \end{cases}$$

و منه كثافة الاحتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{R^2}x; 0 \leq x \prec R \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

حتى يكون f كثافة احتمال لمتغيرة عشوائية مستمرة يلزم ويكفي أن يتحقق $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1 \text{ et } f(t)\geq 0, \forall t\in IR \right\}$

5.2 التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأساسية

5.2.1 التوزيع المنتظم

ليكن *X* متغير عشوائي مستمر على المجال $[a \quad b]$ نقول انه يتبع التوزيع المنتظم إذا كانت دالة كثافة الاحتمال من الشكل $f(x)=\begin{cases} C & si \quad x\in[a \quad b] \\ 0 & \sin on \end{cases}$

و تحقق الشرط $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1 \Leftrightarrow C(b-a)=1 \Leftrightarrow C=\frac{1}{b-a}$

أي من الشكل $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad x\in[a \quad b] \\ 0 & \sin on \end{cases}$

و منه $P(x_1\le X\le x_2)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$

نعرف تابع توزيع المتغير العشوائي كما يلي $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0 & si x\le a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a\le x\le b \\ 1 & si \quad x\ge b \end{cases}$

إن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي *X* قيم في $[x_1 \quad x_2]$ المحتوى في المجال هو

- $P(x_1\le X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt=F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx=\frac{b+a}{2}$

حساب التباين الرياضي $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$

نبحث أولا عن $E(X^2)$: لدينا $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$

و منه $V(X)=\sigma^2=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

5.2.2 التوزيع الأسى

ليكن *X* متغير عشوائي مستمر على المجال $]+\infty \quad -\infty[$. إن كثافة التوزيع الأسى تكون الشكل

$$f(t)=\begin{cases} ce^{-ct} & si \quad t\ge 0 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

يمكن أن نتحقق بسهولة أن $\left\{\forall t\in IR, f(t)\ge 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1\right\}$

و بالتالي فان *f* عبارة عن كثافة توزيع لمتغيرة عشوائية X.

حساب تابع التوزيع $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1-ce^{-cx}$

و منه فان $F(x)=\begin{cases}1-ce^{-cx} & si\ x\geq 0\\ 0 & si\ \ x\prec 0\end{cases}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{c}$

حساب التباين $V(X)=\sigma^2 = E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{c^2}$ **و منه فان** $\sigma=\frac{1}{c}$

ملاحظة

إن القيم الكبيرة بالنسبة للاحتمال الأسى ذات احتمال ضعيف $P(X\geq \frac{a}{c})=\int_{\frac{a}{c}}^{+\infty} ce^{-cx}dx = e^{-a}$

فكلما كان *a* كبيرا كلما كان الاحتمال صغيرا.

6 تمارين محلولة

تمرين 1

ليكن X متغير إحصائي يمثل عدد المقاييس التي تحصل عليها كل طالب في فوج يتكون من 200 طالب, النتائج ممثلة في الجدول التالي

قيم x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
تكرار n_i	16	12	24	14	36	40	12	10	6	30

1) ما هو نوع المتغير الإحصائي X؟

2) أرسم مخطط الأعمدة للتكرارات n_I ثم مخطط الأعمدة للتكرارات النسبية $f_i = \frac{n_i}{N}$.

3) أرسم المنحنى المتجمع F للتكرارات النسبية. ماذا تعني $(1-F(4))$ بالنسبة للمجتمع؟

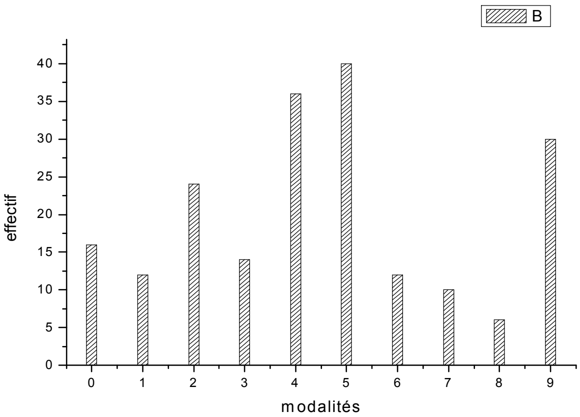
4) حدد منوال X و ماذا يعني ؟

5) أحسب المتوسط الحسابي $\overline{X}$, التباين σ_X^2 و الانحراف المعياري σ_X.

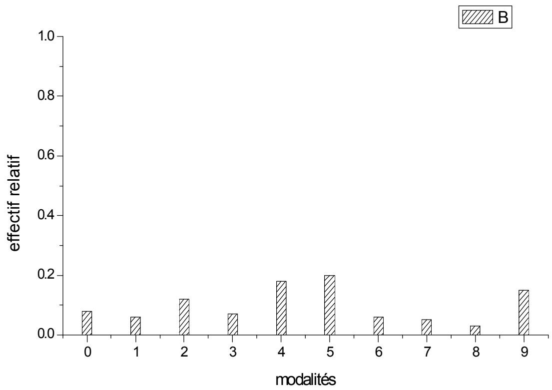
حل 1:

1) متغير إحصائي متقطع (منفصل)

2.1) مخطط الأعمدة للتكرارات n_I .



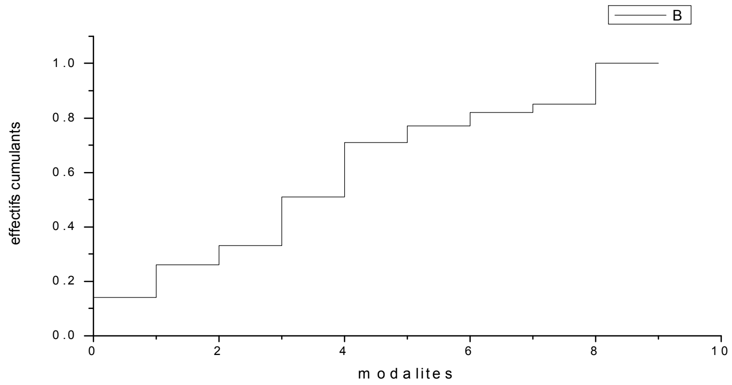
2) مخطط الأعمدة للتكرارات النسبية $f_i=\frac{n_i}{N}$



3) لكي نمثل المنحنى التجميعي للتكرارات النسبية يستحسن تشكيل الجدول التالي

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_I	0.08	0.14	0.26	0.33	0.51	0.71	0.77	0.82	0.85	1.00

تمثيل المنحنى التجميعي للتكرارات النسبية



F(4) تمثل نسبة الطلبة الذين تحصلوا على الأكثر على 4 مقاييس و منه فان

((1-F(4)) تمثل نسبة الطلبة الذين تحصلوا على الأقل على 5 مقاييس.

3) المنوال يساوي 5 و هو يمثل قيمة المتغيرة الإحصائية الأكثر شيوعا.

5) $V = \sum f_i (x_i - \overline{X})^2 = 7.21 \text{d'ou}\, \sigma = 2.68, \overline{X} = \sum f_i x_i = 4.53$

تمرين 2

نرمز بالرمز X للأجر اليومي لأجور عمال مؤسسة معينة, قيم X مسجلة في الجدول التالي

الفئات c_I	]80 90]	]90 100]	]100 110]	]110 120]	]120 130]	]130 140]	]140 150]	]150 160]
التكرار n_I	4	20	107	168	122	48	21	10

1) عين المجتمع و الوحدات الإحصائية. ما نوع المتغير X؟

2) أرسم المنحنى المتجمع للمتغير X للتكرارات النسبية.

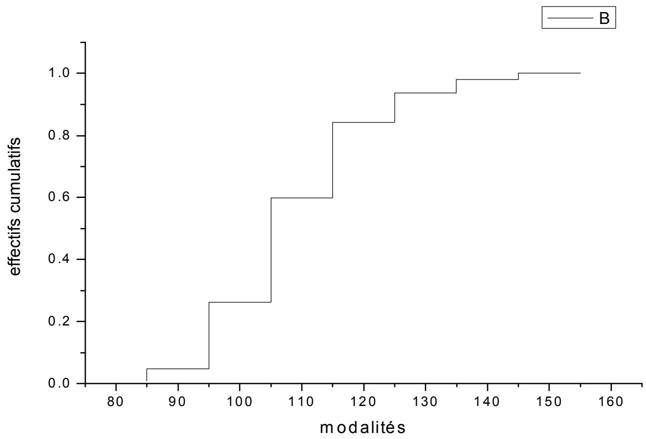
حل 2

1) المجتمع P هو مجتمع العمال و المتغير الإحصائي X مستمر.

2) قبل تمثيل المنحنى التجميعي للتكرارات النسبية للمتغير الإحصائي X.

يستحسن تشكيل الجدول التالي

المركز c_I	85	95	105	115	125	135	145	155
التكرار f_i	0.008	0.04	0.214	0.336	0.244	0.96	0.042	0.02
المجموع	0.008	0.048	0.262	0.598	0.842	0.938	0.980	1.00



تمرين 3

أخذت عينتان من مجتمعين فأعطتنا النتائج التالية

العينة B	العينة A
$\sum_{i=1}^{40} y_i=280$ $\sum_{i=1}^{40} y_i^2=2100$	$\sum_{i=1}^{50} x_i=300$ $\sum_{i=1}^{50} x_i^2=1950$

1) **جد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لكل عينة.**
2) **أي العينتين أكثر تغيرا؟**
3) **دمجت العينتان, ما هو الوسط الحسابي للمجموعة الناتجة؟**

حل3

1.1) العينة A

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=\frac{300}{50}=6$ **,** $\sigma^2{}_x=\frac{1}{n}\sum x_i^2-\bar{x}^2=\frac{1}{50}1950-36=3$ **و منه** $\sigma_x=\sqrt{3}$

1.2) العينة B

$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i=\frac{280}{40}=7$ **,** $\sigma^2{}_y=\frac{1}{n}\sum y_i^2-\bar{y}^2=\frac{1}{40}2100-49=3.5$ **و منه** $\sigma_y=\sqrt{3.5}$

2) مادام $\sigma_x=\sqrt{3}\prec\sigma_y=\sqrt{3.5}$ **فان العينة B أكثر تغيرا من العينة A.**

3) بعد دمج العينتين يكون الوسط الحسابي يساوي: $\frac{1}{90}(300+280)=6.44$

تمرين 4

نشرت شركة النجمة للسياحة و الأسفار رقم أعمالها خلال 4 سنوات متتالية ابتداء من سنة 1995

الفصل /السنة	1995	1996	1997	1998
الأول	230	215	195	200
الثاني	245	240	200	300
الثالث	245	290	235	250
الرابع	250	200	190	260

1) مثل بيانيا بطرقتين هذه السلسلة الإحصائية, أي الطريقتين أفضل و لماذا؟

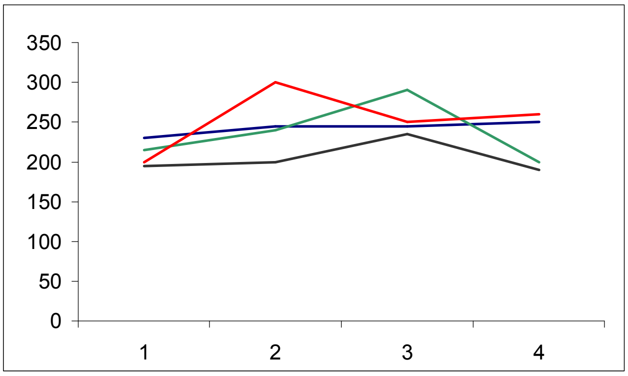
2) باستعمال طريقة المربعات الصغرى جد معادلة المستقيم $y = ax + b$

3) بفرض أن رقم الأعمال لسنة 1999 بقي خاضعا لنفس الاتجاه, قدر رقم أعمالها.

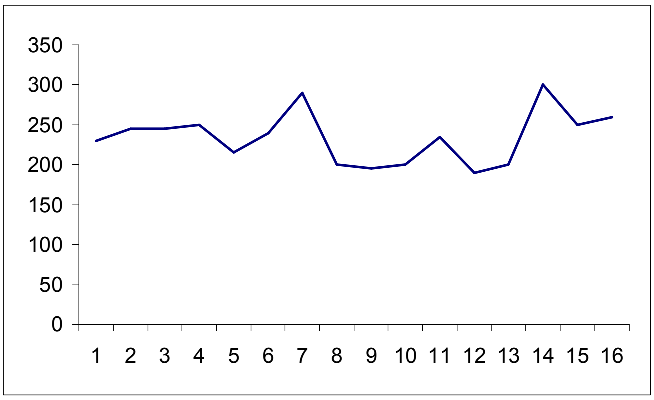
حل4

1) التمثيل البياني

1.1) الطريقة الأولى

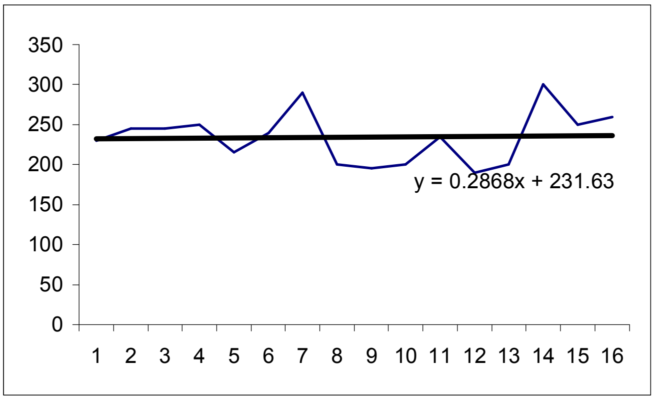


1.2) الطريقة الثانية



الطريقة (1.1) أفضل لأنها تسمح بمقارنة السنوات بشكل جيد.

2) إيجاد المعادلة $y = ax + b$ **حيث** $a = \dfrac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}$ **و** $b = \bar{y} - a\bar{x}$



3) لتقدير رقم أعمال سنة 1999, نقوم بتعويض x في المعادلة الأخيرة بـ 17 ,18,19 و 20 للحصول على رقم أعمال كل فصل.

سنة1999	رقم الأعمال
الفصل1	236.5049
الفصل 2	236.7926
الفصل3	237.0803
الفصل 4	237.368

تمرين 5

الجدول التالي يمثل سحابة نقاط لبيانات جمعت عن تسعة طلاب.

معدل الطالب في السنة النهائية x	75	82	65	90	77	60	55	87	91
معدل الطالب في الباكالوريا y	69	85	55	90	80	50	50	90	85

1) مثل سحابة النقاط في معلم متعامد.

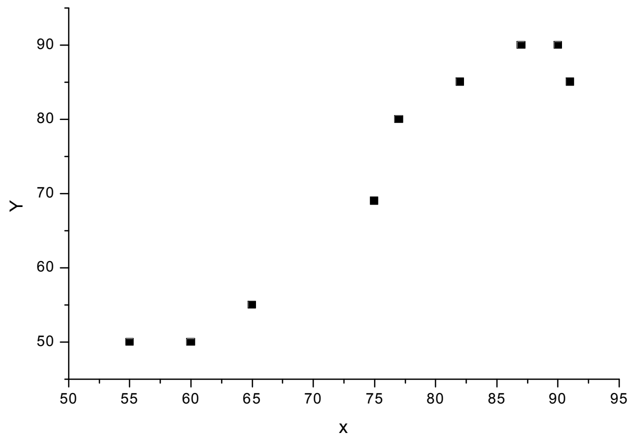
2) أحسب معامل الارتباط بين x و y.

3) باستعمال طريقة المربعات الصغرى جد مستقيم التعديل.

4) قدر معدل طالب في شهادة البكالوريا إذا كان معدله في الثالثة ثانوي 80.

حل5

1) السحابة



2) لدينا $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}}=\dfrac{9\times 51295-682\times 654}{\sqrt{9\times 53078-(682)^2}\sqrt{9\times 49836-(654)^2}}=0.966$

3) مستقيم التعديل يكون من الشكل $y=ax+b$ حيث $a=\dfrac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$ و $b=\bar{y}-a\bar{x}$ أي

$$a=\frac{51295-9\times 75.778\times 72.667}{53078-9\times(75.778)^2}=1.242 \quad b=72.667-1.242\times 75.778=-21.45$$

ومنه $y = 1.242x - 21.45$ **(1)..........**

4) لإيجاد معدل الطالب في امتحان البكالوريا نعوض x =80 في المعادلة (1) فنجد

$$y = 1.242 \times 80 - 21.45 = 77.9$$

تمرين 6

الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للأجور الأسبوعية لـ 500 عامل في مصنع

الأجرة	]20 15 [	]25 20[	]30 25[	]35 30[	]40 35[	]45 40[	] 50 45[	] 55 50 [	]60 55[
العمال	2	7	101	180	120	50	25	10	5

أحسب كل من

1) الوسط الحسابي, 2)الوسيط، 3) المنوال, 4) الانحراف المتوسط, 5) الانحراف المعياري

حل6

نقوم أولا بتشكيل الجدول التالي

x_I	n_i	$n_I c_i$	$\sum n_i$	$n_I c_I^2$
[15 20[	2	35	2	612.5
[20 25[	7	157.5	9	3543.75
[25 30[	101	2777.5	110	76381.25
[30 35[	180	5850	290	190125
[35 40[	120	4500	410	168750
[40 45[	50	2125	460	90312.5
[45 50[	25	1187.5	485	56406.25
[50 55[	10	575	495	33062.5
[55 60[	5	287.5	500	16531.25

(1 $\bar{x} = \frac{1}{500}(17445) = 34.89$

(2 $me = 30 + \frac{(35-30)}{180}(250-110) = 33.88$

(3 $M = 32.5$

(4 $e_m = \frac{1}{500}\sum \eta_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{500}(2596.31) = 5.19$

(5 $\sigma^2 = \frac{1}{500}\sum n_i c_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{500}(635725) - 1217.31 = 54.14 \Rightarrow \sigma = 7.35$

تمرين7

نقوم برمي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على وجهين, ظهرين, وحه و ظهر.

حل7

$$p(ff) = p(pp) = \frac{1}{2} p(fp) = \frac{1}{4}$$

تمرين 7

الجدول التالي يعطي مبيعات محل تجاري بملايين الدنانير حسب الأشهر لسنوات 1998, 1999 و 2000.

السنة	الرباعيات		
	الرباعي 1	الرباعي 2	الرباعي 3
1998	2.0	2.3	1.0
1999	2.5	2.7	2.0
2000	2.4	2.8	3.0

1) جد معادلة الاتجاه العام (trend) بطريقة المربعات الصغرى.

2) جد المعاملات الموسمية (الموسم هنا هي الرباعيات).

3) أعط السلسلة الزمنية منزوعة التأثير الموسمي.

4) ما هو تقدير قيمة المبيعات للرباعي الثاني من سنة 2002 بفرض أن الاتجاه العام يبقي ثابتا.

حل 7

1) إيجاد معادلة الاتجاه العام باستعمال طريقة المربعات الصغرى

نكتب الجدول السابق على الشكل التالي

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2,0	2,3	1,0	2,5	2,7	2,0	2,4	2,8	3,0

ونحسب $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum x_i = 5, \bar{y} = \frac{1}{9}\sum y_i = 2,3$

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{111,3 - 9\times 5\times 2,3}{285 - 9\times 25} = 0,13$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1,65$$

و منه فإن معادلة المستقيم هي $y = 0,13x + 1,65$

و بتعويض x بالقيم من 1 إلى 9 نحصل على الجدول التالي

السنة	الرباعيات		
	الرباعي 1	الرباعي 2	الرباعي 3
1998	1,78	1,91	2,04
1999	2,17	2,3	2,43
2000	2,56	2,69	2,82

2) إيجاد قيم المعاملات الموسمية

و نحصل عليها بقسمة القيم الحقيقية على القيم التقريبية ثم أخذ المتوسط لكل موسم

السنة	الرباعيات		
	الرباعي 1	الرباعي 2	الرباعي 3
1998	1,12	1,2	0,49
1999	1,15	1,17	0,82

2000	0,93	1,04	1,06
المعاملات الموسمية	1,06	1,13	0,79

3) السلسلة منزوعة التأثير الموسمي و نحصل عليها بقسمة القيم الحقيقية على المعاملات الموسمية

السنة	الرباعيات		
	الرباعي 1	الرباعي 2	الرباعي 3
1998	1,88	2,03	1,26
1999	2,35	2,38	2,53
2000	2,26	2,47	3,79

4) التقدير

نعوض في المعادلة x بالقيمة 14 فنحصل على 3,47 أو 3,92 منزوعة التأثير الموسمي.

تمرين 8

نقوم برمي زهرة نرد 5 مرات, ما هو احتمال الحصول على رقم 3.

1) مرتين, 2) على الأكثر مرتين, 3) على الأقل مرتين.

حل 8

هنا لدينا قانون ثنائي الحد $p(X=k)=C_5^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}\ ;k=1,...,5$

1) $p(X=2)=C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$

2) $p(X\leq 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$

3) $p(X\geq 2)=1-p(X\prec 2)=1-(p(X=0+p(X=1)$

تمرين 9

ثلاث صناديق متماثلة يوجد في الأول 7ساعات ذهبية و 3 فضية, و في الثاني 4 ساعات ذهبية و 5 فضية و في الثالث 3 ساعات ذهبية و 12 فضية.

سحب صندوق عشوائيا ثم سحبت منه ساعة.

1) ما احتمال أن الساعة المسحوبة ذهبية؟

2) ما احتمال أن الساعة أخذت من الصندوق الأول إذا علم أن الساعة ذهبية؟

حل 9

لتكن *OR* هي الحادثة الحصول على ساعة ذهبية و U_i يرمز للحادثة إختيار الصندوق رقم i.

1) $p(or)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{15}$

2) $$p(U_1/or)=\frac{p(U_1)p(or/U_1)}{p(U_1)p(or/U_1)+p(U_2)p(or/U_2)+p(U_3)p(or/U_3)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{15}}$$

تمرين 10

إذا كان $p(A)=0,3; p(B)=0,4; p(A\cup B)=0,5$

أحسب

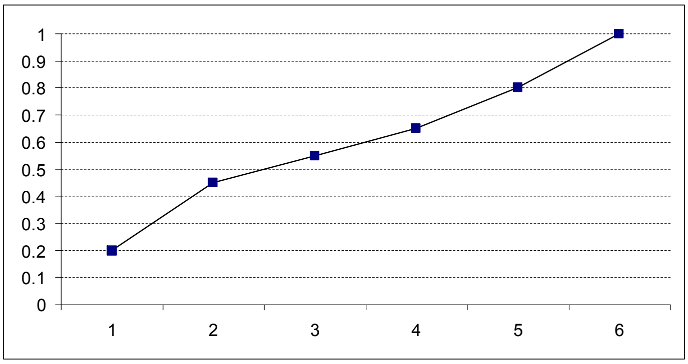
$$\begin{array}{ll} 1)p(A\cap B) & 5)p(\overline{A}\cap B) \\ 2)p(A\cap \overline{B}) & 6)p(\overline{A}\cap \overline{B}) \\ 3)p(A/B) & 7)p(B/A) \\ 4)p(\overline{A}/\overline{B}) & 8)p(\overline{B}/\overline{A}) \end{array}$$

(حيث $\overline{A}$و$\overline{B}$ يرمز للحادثة العكسية للحادثة A و B على التوالي)

حل 10

$$\begin{array}{ll} 1)\quad p(A\cap B)=0,2 & 5)p(\overline{A}\cap B)=0,2 \\ 2)\quad p(A\cap \overline{B})=0,1 & 6)p(\overline{A}\cap \overline{B})=0,5 \\ 3)\quad p(A/B)=0,5 & 7)p(B/A)=0,5 \\ 4)\quad p(\overline{A}/\overline{B})=0,83 & 8)p(\overline{B}/\overline{A})=0,83 \end{array}$$

تمرين 11



ليكن لدينا المخطط التجميعي النسبي لمتغيرة إحصائية مستمرة لمجتمع مشكل من 100 فرد.

1) **أحسب المنوال, الوسط, الوسيط, الربيع الأول و الثالث.**

2) **هل هذا التوزيع متناظر؟**

حل11

x_i	[0 1[	[1 2[	[2 3[	[3 4[	[4 5[	[5 6[
التكرار التجميعي النسبي	0.2	0.45	0.55	0.65	0.80	1.00
التكرار التجميعي	20	45	55	65	80	100
التكرار	20	25	10	10	15	20

(1

(1.1 الفئة المنوالية تساوي]1 2[و منه المنوال يساوي 1.5.

(1.2الوسط $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum n_i x_i=\frac{1}{100}(0.5\times20+1.5\times25+2.5\times10+3.5\times10+4.5\times15+5.5\times20)=2.85$

1,3) الوسيط $me = l_0 + \frac{l_1 - l_0}{n_0}\left(\frac{N}{2} - F_0\right) = 2 + \frac{3-2}{10}(50-45) = 2.5$

1.4) الربيع الأول $Q_1 = l_0 + \frac{l_1 - l_0}{n_0}\left(\frac{N}{4} - F_0\right) = 1 + \frac{2-1}{25}(25-20) = 1.2$

1.5) الربيع الثالث $Q_3 = l_0 + \frac{l_1 - l_0}{n_0}\left(\frac{3N}{4} - F_0\right) = 4 + \frac{5-4}{15}(75-65) = 4.66$

2) هذا التوزيع غير متناظر لأن $s = \frac{(Q_3 - me) - (me - Q_1)}{(Q_3 - me) + (me - Q_1)} = \frac{(4.66-2.5)-(2.5-1.2)}{(4.66-2.5)+(2.5-1.2)} = 0.24$

تمرين 12

لدى مستودع الجامعة 7 آلات حاسبة منها آلتان عاطلتان, تسلمت إحدى الدوائر 3 آلات عشوائيا من هذا المستودع

1) **أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الآلات العاطلة التي تسلمتها الدائرة**
2) **جد دالة توزيع x.**
3) **جد التوقع الرياضي للمتغير x.**

حل12

1) إيجاد التوزيع الاحتمالي

x_i	0	1	2
p	$\frac{C_2^0 \times C_5^3}{C_7^3}$	$\frac{C_2^1 \times C_5^2}{C_7^3}$	$\frac{C_2^2 \times C_5^1}{C_7^3}$

2) دالة التوزيع

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec 0 \\ \frac{10}{35} & \text{si } 0 \le x \prec 1 \\ \frac{30}{35} & \text{si } 1 \le x \prec 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

3) حساب التوقع الرياضي $E(X) = \sum_{k=0}^{2} kp(X=k) = 0.857$

تمرين13

ليكن x متغيرا عشوائيا كثافة احتماله تساوي $f(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$

1) **جد قيمة k.**
2) **أحسب** $p(1 \le X \le 2)$ **.**
3) **جد دالة توزيع** ***X*****.**
4) **أحسب العزم من المرتبة n للمتغير** ***X*****.**
5) **أستنتج قيمة التوقع الرياضي و التباين.**

حل 13

1) البحث عن قيمة k

$$\int_0^3 k^2 x dx = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{3} \ \vee \ k = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

2) حساب الاحتمال $p(1 \le X \le 2) = \int_1^2 \frac{2}{9} x dx = \frac{1}{3}$

3) إيجاد دالة التوزيع $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ \frac{x^2}{9} & si \ 0 \le x \prec 3 \\ 1 & si \quad x \succ 3 \end{cases}$

4) حساب العزم من الدرجة n $E(X^n) = \int_1^3 x^n \times \frac{2}{9} \times x dx = 2 \times \frac{3^n}{n+2}$

5) استنتاج قيمة التوقع الرياضي و التباين

حسب العلاقة $E(X^n) = 2 \times \frac{3^n}{n+2}$

فإن $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2}\ , \ E(x) = 2$

تمرين 14

لتكن لدينا المتغيرة الإحصائية المستمرة لمجتمع مكون من 30 فرد الموزعة حسب الجدول التالي

x_i	[0 2[	[2 4[	[4 6[	[6 7[	[7 9[	[9 10[
n_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6

حيث p_i هي حدود متتالية هندسية حدها الأول يساوي 5.

1) أحسب المنوال, الوسط, الوسيط, الربيع الأول و الثالث و معامل يول.

حل14

1) لكي نتمكن من الإجابة على الأسئلة نقوم بحساب حدود المتتالية فنحصل من العلاقة $p_1\left(1-r^6\right) = 30(1-r)$ على ***r=1*** كقيمة مقبولة لأن كل القيم الخمسة المتبقية مرفوضة و عليه يكون الجدول كما يلي

x_i	[0 2[	[2 4[	[4 6[	[6 7[	[7 9[	[9 10[
n_i	5	5	5	5	5	5

و منه $S = -0.2, Q_1 = 3, me = 6, Q_3 = 8, \overline{X} = 5.5, M_0 = 6.5,\ M_0 = 9.5$

تمرين 15

نعتبر سلسلة مشكلة من 6 ولادات, نهتم بعدد المزدادين الجدد الذكور, إذا علمنا أن 51 % إناث و 49 % ذكور.

1) أحسب احتمال أن نحصل على الأكثر على ذكرين.

2) أوجد التوقع.

3) أوجد أصغر عدد للولادات حتى يكون احتمال الحصول على الأقل على ذكر أكبر أو يساوي 0.9.

حل 15

1) احتمال أن نحصل على الأكثر على ذكرين.

$$p(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + p(X=2) = \sum_{k=0}^{2} C_6^k \left(\frac{49}{100}\right)^k \left(\frac{51}{100}\right)^{6-k}$$

2) **حساب التوقع لتوزيع الذكور** $E(X) = \sum_{k=0}^{6} kC_6^k \left(\frac{49}{100}\right)^k \left(\frac{51}{100}\right)^{6-k}$

3)

$$P(\text{au moins un garçon}) = 1 - P(\text{aucun garçon}) = 1 - C_6^0 \left(\frac{49}{100}\right)^0 \left(\frac{51}{100}\right)^n \ge 0.9 \Leftrightarrow \left(\frac{51}{100}\right)^n \le 0.1$$

$$\Leftrightarrow n\ln(0.51) \le \ln(0.1) \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.51)} = 3.41 \Rightarrow n = 4$$

تمرين 16

ليكن لدينا الجدول التالي و الممثل لعدد المسافرين على متن الخطوط الجوية الجزائرية

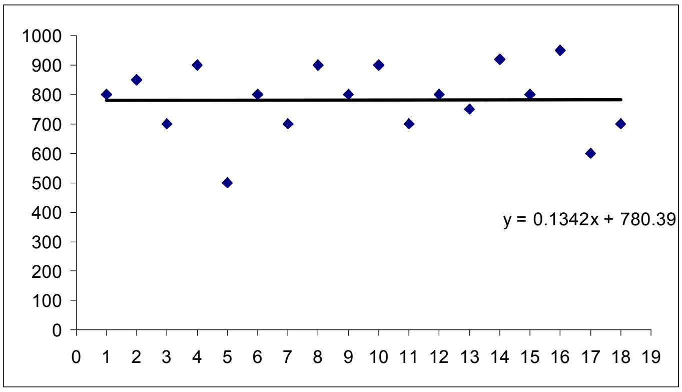
شهرين		ج/ف	م/أ	م/ج	ج/أ	س/أ	ن/د
السنة	1998	800	850	700	900	500	800
	1999	700	900	800	900	700	800
	2000	750	920	800	950	600	700

1) **مثل سحابة النقاط و مستقيم التعديل في معلم متعامد.**

2) **أحسب معامل الارتباط الخطي.**

حل 16

1) **سحابة النقاط و مستقيم التعديل**



2) **معامل الارتباط الخطي.** $r = 2 \times 10^{-\frac{5}{2}}$

تمرين 17

ليكن الجدول التالي يمثل عدد السواح خلال ثلاث سنوات

الفصل		الفصل 1	الفصل 2	الفصل 3	الفصل 4
السنة	N-2	2840	2570	2400	4640
	N-1	3020	2630	240	420
	N	3290	2480	2620	2730

1) **مثل بيانيا هاته السلسلة الزمنية.**

2) جد معادلة مستقيم الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى.

3) نفرض أن النموذج جدائي , جد المعاملات الموسمية.

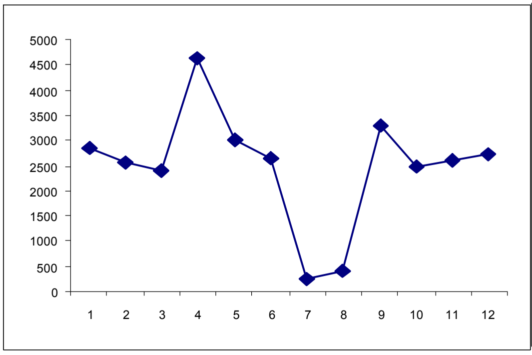
4) أعطي السلسلة الزمنية منزوعة التأثير الموسمي.

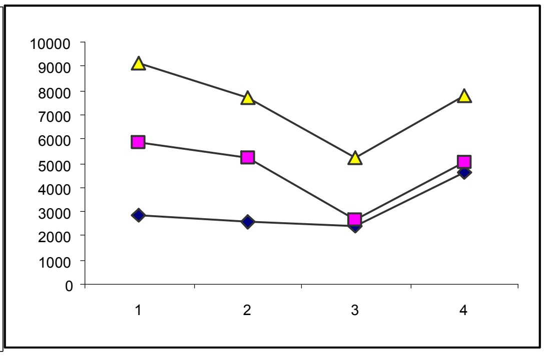
5) أعط التنبؤ لعدد السواح خلال سنة N + 1.

حل 17

1) التمثيل البياني

لدينا طريقتان





2) معادلة مستقيم التعديل

y = -59.93x+2879.5

3) إيجاد المعاملات الموسمية

معامل الفصل الأول: $(1+1.1+1.19)\div 3 = 1.09$

معامل الفصل الثاني: $(1.31+1.04+0.93)\div 3 = 1.09$

معامل الفصل الثالث: $(1.33-1.33+0.88)\div 3 = 0.88$

معامل الفصل الرابع: $(1.35-7+1.75)\div 3 = -1.3$

4) السلسلة الزمنية منزوعة التأثير الموسمي

الفصل		الفصل 1	الفصل 2	الفصل 3	الفصل 4
السنة	N-2	2605.5	2357.7	2727.2	3569.2-
	N-1	2770.6	2412.8	272.7	323.07-
	N	3018.3	2275.2	2977.2	2100-

5) تنبأ بعدد السواح لسنة N + 1

الفصل 1	الفصل 2	الفصل 3	الفصل 4
2099.5	2039.5	1979.5	1919.5

تمرين 18

ليكن لدينا الجدول التالي

نوع الأخطار		الزلازل	الحوادث	الحرائق	المجموع
		Y_1	Y_2	Y_3	T
السنوات	1990	275	170	80	525
	1991	320	190	90	600
	1992	400	210	98	708
	1993	480	250	112	842

1) جد باستعمال طريقة المربعات الصغرى معدلات المستقيمات التالية

$$y_1 = a_1 t + b_1, y_2 = a_2 t + b_2, y_3 = a_3 t + b_3, T = At + B$$

2) تحقق من أن $A = a_1 + a_2 + a_3$ و $B = b_1 + b_2 + b_3$

حل18

نحول الجدول المعطى في التمرين إلى الجداول الأربع التالية

t	1	2	3	4
Y_1	275	320	400	480

t	1	2	3	4
Y_2	170	190	210	250

t	1	2	3	4
Y_3	80	90	98	112

t	1	2	3	4
T	525	600	708	842

و باستعمال طريقة المربعات الصغرى للجداول الأربعة نحصل (على الترتيب) على المستقيمات التالية

$$y_1 = a_1 t + b_1 = 69.5t + 19.5, y_2 = a_2 t + b_2 = 10.4t + 69$$
$$y_3 = a_3 t + b_3 = 26t + 140, T = At + B = 105.9t + 404$$

2) نتحقق من العلاقة بحساب مباشر

تمرين 19

ليكن لدينا الجدول التالي

	1-	0	1
1-	6	2	0
0	2	5	5

1) جد معامل الارتباط الخطي.

2) أعط التوزيع الهامشي لـ x.

3) أعط التوزيع الشرطي لـ y علما أن x=0.

حل 19

1) معامل الإرتباط $r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0.24}{0.876 \times 2.11} = 0.129$

1) التوزيع الهامشي لـ x

X	1-	0
n	8	12

2) التوزيع الشرطي لـ y علما أن x=0

Y/x=0	1-	0	1
N	2	5	5

تمرين20

في صندوق I توجد 1 كريات بيضاء و 3 سوداء و في صندوق II توجد 5 كريات بيضاء و 3 حمراء , يقوم لاعب بإخراج كرية فيحصل عليها بيضاء. ما احتمال أن تكون الكرية مسحوبة من الصندوق II.

حل20:

$$p(II/Blanche)=\frac{p(II)\times p(blanche/II)}{p(I)\times p(blanche/I)+p(II)\times p(blanche/II)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}}$$

تمرين21

نقوم برمي زهرتي نرد, لتكن X المتغيرة العشوائية الموافقة لجمع النقاط المحصل عليها من رمي النردين.

1) جد قانون توزيع X.

2) جد دالة توزيع X.

3) أحسب E(X) و V(X).

حل 21

1) قانون التوزيع

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2) دالة التوزيع

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\prec 2 \\ \frac{1}{36} & si\ 2\le x\prec 3 \\ \frac{1}{36}+\frac{2}{36} & si\ 3\le x\prec 4 \\ & \\ \frac{35}{36} & si\ 11\le x\prec 12 \\ 1 & si\ x\ge 12 \end{cases}$$

3) حساب E(X) $E(X)=\sum x_i p_i=2\times\frac{1}{36}+.................+12\times\frac{1}{36}=7$

حساب V(X)

نحسب أولا $E(X^2)=\sum x_i^2 p_i=4\times\frac{1}{36}+.................+144\times\frac{1}{36}=54,83$

و منه $V(X)=E(X^2)-E^2(X)=54,83-49=5,83$

تمرين 22

معاملات المعادلة $ax^2+bx+c=0$ **ناتجة عن رمي زهرة نرد أي** $\{a,b,c\in(1,2,3,4,5,6)\}$

جد احتمال الحصول على

1) **جذرا مضاعفا.**
2) **جذران ناطقان.**
3) **جذران حقيقيان.**

حل 22

$$p(3)=\frac{43}{216},p(2)=\frac{20}{216},p(1)=\frac{5}{216}$$

تمرين23

لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية {4,3,2,2,1,1,0}

1) **أحسب الوسط, المنوال, الربيع الأول, الثاني و الثالث.**
2) **هل هذا التوزيع متناظر؟ علل.**

حل23

حساب الوسط $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum n_i x_i=\frac{1}{7}(2\times1+2\times2+3+4)=\frac{13}{7}$

حساب المنوال $M_0=\{1,2\}$

حساب الربيعات $Q_1=1,\ Q_2=2,\ Q_3=3$

دراسة التناظر

لدينا $S=\frac{(Q_3-me)-(me-Q_1)}{(Q_3-me)+(me-Q_1)}=\frac{0}{2}=0$

و منه فهو متناظر.

تمرين 24

عدل باستعمال الدالة المناسبة للسلسلة الزمنية التالية

X_i	0	1	2	3	4	5
Y_i	1	2	4	8	16	32

لاحظ أنها تتبع شكل $y=b^x$

حل 24

لدينا $\ln y=x\ln b\Leftrightarrow y=b^x$

يكفي أن نبحث عن قيمة b بحيث يكون $s(b)=\sum_{i=1}^{6}(\ln y_i-x_i\ln b)^2$

أصغريا $\frac{\partial s}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{6}(\ln y_i-x_i\ln b)(-\frac{x_i}{b})=0\Leftrightarrow\frac{2}{b}\sum_{i=1}^{6}(\ln y_i-x_i\ln b)(-x_i)=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{6}x_i\ln y_i=\sum_{i=1}^{6}x_i^2\ln b)$

$$\Leftrightarrow b = e^{\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \ln y_i}{\sum_{i=1}^{6} x_i^2}} \cong 2$$

أي التعديل من الشكل $y=2^x$

تمرين 25

يقوم عمر و لخطر برمي قطعتين نقديتين متجانستين بالتناوب؛ الأول الذي يحصل على وجهين يعتبر فائزا . يقوم عمر بالرمي أولا :

1) أحسب احتمال فوز عمر.

2) احسب احتمال فوز لخطر.

حل 25

لدينا النتائج التالية $P(FF) = P(pp) = \frac{1}{4}, P(Fp) = \frac{1}{2}, p = \text{pile}, F = \text{face}$

1) يكون احتمال فوز عمر حاصل في إحدى الحالات التالية و في حالة واحدة فقط

$$P(\text{omar gagne}) = \frac{1}{4}$$

أو $P(\text{omar perd, lakhdar perd, omar gagne}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)$

....

$$P(\text{omar perd, lakhdar perd, omar perd,}\ldots\ldots\ldots\text{, omar gange}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \left(\frac{1}{4}\right)$$

و لما كانت الحوادث متمانعة فلدينا حسب مسلمة الحوادث الشاملة

$$P(\text{omar gagne}) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\left(3/4\right)^2}\right) = \frac{4}{7}$$

2) $P(\text{lakhdar gange}) = 1 - P(\text{omar gagne}) = \frac{3}{7}$

تمرين 26

لتكن X متغيرة عشوائية مستمرة مطلقا معرفة بدالة كثافتها التالية $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$

حيث a وسيط من IR.

1) جد قيمة الوسيط a و دالة توزيع X.

2) أحسب $p(-1 \le X \le 1)$.

حل 26

1) يجب تحقيق الشرطين $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1,\ f \ge 0$

حتى يكون التابع كثافة احتمال للمتغيرة العشوائية X و هو ما يكافئ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=1, a\geq 0$

لكن $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=a\,,\text{Arctgx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=a\pi=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{\pi}$

و منه فدالة التوزيع تساوي $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\pi}\text{Arctgx}+\frac{1}{2}$

2) حساب $p(-1\leq X\leq 1)$

لدينا $P(-1\leq X\leq 1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$

تمرين 27

عزمت مديرية الخدمات الجامعية تنظيم رحلة سياحية و قامت باختيار 5 طلبة علي الأسلس التالي

نرمي زهرة نرد متجانسة

إذا ظهر رقم 1, 2 أو 3 نختار من السنة الأولى التي تحتوي علي 90 طلب و 70 طالبة.

إذا ظهر رقم 4 أو 5 نختار من السنة الثانية التي تحتوي علي 80 طالب و 90 طالبة.

إذا ظهر رقم 6 نختار من السنة الثالثة التي تحتوي على 40 طالب و 30 طالبة.

احسب احتمال اختيار.

1) 3 طالبات و 2 طلبة

2) علي الأقل 4 طالبات

3) علي الأكثر 3 طالبات .

حل 27

1) $P(3F+2G)=\frac{3}{6}\times\frac{C_{70}^{3}\times C_{90}^{2}}{C_{160}^{5}}+\frac{2}{6}\times\frac{C_{90}^{3}\times C_{80}^{2}}{C_{170}^{5}}+\frac{1}{6}\times\frac{C_{30}^{3}\times C_{40}^{2}}{C_{70}^{5}}$

2) $P(\text{au moins 4filles})=\frac{3}{6}\times\frac{\sum_{k=4}^{5}C_{70}^{k}\times C_{90}^{5-k}}{C_{160}^{5}}+\frac{2}{6}\times\frac{\sum_{k=4}^{5}C_{90}^{k}\times C_{80}^{5-k}}{C_{170}^{5}}+\frac{1}{6}\times\frac{\sum_{k=4}^{5}C_{30}^{k}\times C_{40}^{5-k}}{C_{70}^{5}}$

3) $P(\text{au plus3filles})=1-P(\text{au moins 4filles})$

تمرين 28

نعطي الجدول التالي

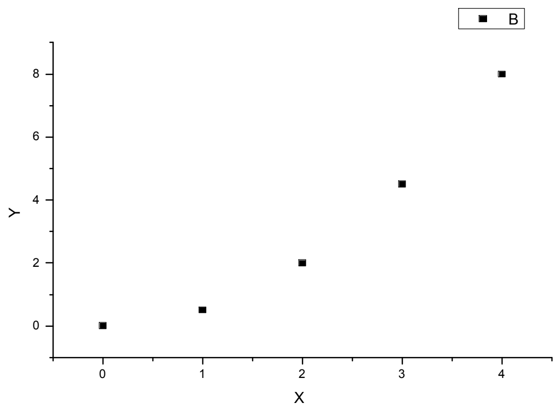
x_I	0	1	2	3	4
y_I	0.0	0.5	2.0	4.5	8.0

1) شكل سحابة النقاط.

2) لاحظ أنها تتبع دالة من الشكل $y=ax^2$. حددها باستعمال التعديل المناسب

حل 28

1) سحابة النقاط



2) تحديد دالة التعديل

نقربها باستعمال طريقة المربعات الصغرى لدينا $y_i = ax_i^2$

و هي تحقق $\log y_i = \log a + 2\log x_i$

نبحث عن a:لدينا $S = \sum\left(y_i - ax_i^2\right)^2$

حتى يكون أصغريا يكفى و يلزم في هذه الحالة أن يتحقق الشرط $\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} 2\left(y_i - ax_i^2\right)\left(-x_i^2\right) = 0$

$\sum_{i=1}^{5} ax_i^4 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \Leftrightarrow \Leftrightarrow 354a = 177 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ **و منه** $y = \frac{1}{2}x^2$

تمرين29

عائلة تتكون من 8 أفراد. إذا كان احتمال وجود أنثى أو ذكر متساو.

فما هو احتمال وجود؟

1) 3 دكور و 5 إناث.

2) على الأقل أنثى.

حل29

1) لتكن X المتغيرة العشوائية التي تهتم بعدد الإناث الموجودة في العائلة , X تتبع قانون ثنائي الحد لنيوتن و منه $P(X = 5) = C_8^5 p^5 q^3 = C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3$

2) عكس الحادثة هي عدم وجود أي أنثى و منه $P(\text{au moins une fille}) = 1 - P(\text{aucune fille}) = 1 - C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0$

تمرين 30

ليكن لدينا الجدول التالي الذي يمثل رقم أعمال شركة ما خلال 8 سنوات متواليات: x مرتبة السنة, y رقم الأعمال.

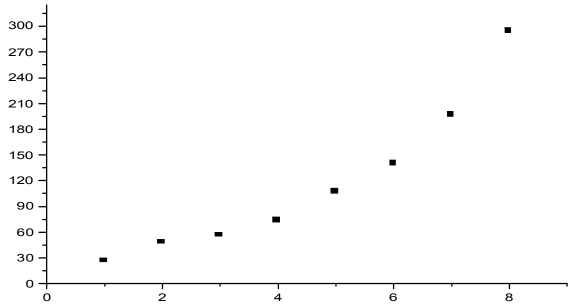
	السنة	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
X	مرتبة السنة	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	رقم أعمال	27	48	56	74	107	140	197	295

1) مثل في معلم متعامد و متجانس سحابة النقاط M(x, y).

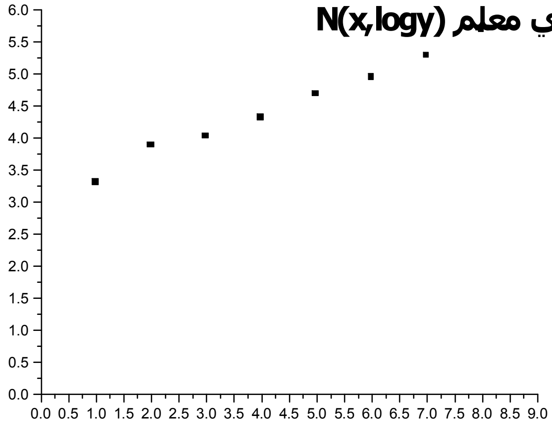
2) مثل في معلم أخر سحابة النقاط $N(x, y)$ حيث $Y=\log y$ اللوغاريتم العشري.

حل 30

1) تمثيل سحابة النقاط



2) تمثيل سحابة النقاط في معلم $N(x,\log y)$



تمرين 31

ما هو احتمال الحصول على رقم 4 على الأقل مرة واحدة خلال رمي زهرة نرد مرتين متواليتين.

حل 31

لتكن A_1 الحادثة الحصول على رقم 4 عند الرمية الأولى ولتكن A_2 الحادثة الحصول على رقم 4 عند الرمية الثانية. المطلوب حساب $\mathrm{p(au\ \ moins\ \ une\ \ 4)} = 1 - \mathrm{p(au\ \ plus\ \ zéro\ \ 4)} = 1 - \frac{5}{6}\frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36}$

تمرين 32

صندوقA يحتوي على 5 كريات حمراء، 3 كريات سوداء و 8 خضراء بينما يحتوي صندوق آخر B على 3 كريات حمراء و 5 سوداء. نود سحب كرية لهذا نقوم برمي زهرة نرد متجانسة.

إذا ظهر رقم 3 أو 6 نختار من الصندوق B.

إذا ظهر رقم 1، 2، 4 أو 5 نختار من الصندوق A.

a) أحسب احتمال سحب

1) كرية حمراء. 2) كرية سوداء. 3) كرية خضراء.

b) إذا كانت الكريه المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق A؟

c) إذا كانت الكريه المسحوبة سوداء، فما احتمال أن النرد كان قد أظهر الرقم 5؟

حل 32

لتكن الحوادث

A: نختار الصندوق A.

B: نختار الصندوق B.

R: الكرية المسحوبة حمراء.

N: الكرية المسحوبة سوداء.

V: الكرية المسحوبة خضراء.

a)

1) حساب احتمال سحب كرية حمراء، لدينا

$$P(R) = P(A)\times P(R/A) + P(B)\times P(R/B) = \frac{4}{6}\times\frac{5}{16}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{8}$$

2) حساب احتمال سحب كرية سوداء، لدينا

$$P(N) = P(A)\times P(N/A) + P(B)\times P(N/B) = \frac{4}{6}\times\frac{3}{16}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{8}$$

3) حساب احتمال سحب كرية خضراء، لدينا

$$P(V) = P(A)\times P(V/A) + P(B)\times P(V/B) = \frac{4}{6}\times\frac{8}{16}+\frac{2}{6}\times\frac{0}{8}$$

b) نطبق نظرية بايز $P(A/R) = \dfrac{P(A)\times P(R/A)}{P(A)\times P(R/A) + P(B)\times P(R/B)} = 0.63$

c)

لتكن الحوادث

C_I: النرد أعطى العدد i

إذا تحققت الحادثة C_5 فمعنى هذا أننا نختار الصندوق A.

إذن $P(C_5/N) = \dfrac{P(C_5)\times P(N/C_5)}{\sum_{k=1}^{6} P(C_k)\times P(N/C_k)} = \dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{16}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{16}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{16}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{16}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{16}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}} = 0.1$

تمرين 33

أجب بنعم أو لا و علل إجابتك

لون الأعين يمثل خاصية كيفية (نوعية)

المجال الربيعي $[Q_1 \quad Q_3]$ **يحتوي على 25 ٪ من قيم متغير إحصائي X.**

المتوسط الحسابي لمجتمع P مركب من مجتمعين جزئيين P_1 الذي تكراره الكلي N_1 و P_2 الذي تكراره الكلي N_2, يساوي مجموع المتوسطات الحسابية لـ P_1 و P_2.

حل 33

نعم لأن اللون غير قابل للقياس.

لا لأن المجال الربيعي يحتوي على 25 بالمئة من قيم المتغير الإحصائي.

لا لأن الوسط يساوي $\overline{x_p}=\dfrac{N_1\overline{X}_{p_1}+N_2\overline{X}_{p_2}}{N_1+N_2}$

تمرين 34

كم لدينا من طريقة مختلفة لتصفيف 5 كريات بألوان مختلفة.

حل 34

عدد كل الطرق يساوي: !5

تمرين 35

كم لدينا من طريقة مختلفة لكي نجلس 10 أشخاص على كرسي يحتوي 4 أماكن.

حل 35

عدد كل الإمكانيات يساوي $A_{10}^{4}=10\times 9\times 8\times 7$

تمرين 36

بكم طريقة يمكننا أن نجلس 5 رجال و 4 نساء في صف واحد بحيث النساء تحتل الأماكن ذات الأرقام الزوجية.

حل 36

عدد كل الإمكانيات الخاصة بالرجال يساوي !5 , بينما عدد كل الإمكانيات الخاصة بالنساء يساوي !4 و منه فحسب المبدأ الأساسي في التحليل التوفيقي فان عدد كل الإمكانيات للقيام بالعمليتين معا يساوي !5.!4

تمرين 37

بكم طريقة يمكننا أن نجلس 7 أشخاص حول مائدة مستديرة في الحالات التالية

يمكن أن يجلسوا بشكل كيفي.

شخصان معينان لا يمكنهما أن يتجاورا.

حل 37

نفرض أن شخصا من السبعة جلس حول المائدة المستديرة فيبقي لنا !6 إمكانية لكي يجلس الستة أشخاص الآخرين.

عدد كل الإمكانيات لكي يجلس شخصان معينان بجوار بعضيهما و 5 أشخاص الآخرين بشكل كيفي يساوي !5.!2 و منه فعدد كل الحالات بحيث شخصان معينان لا يتجاورا يساوي !5.!2-!6

تمرين 38

كم طريقة لدينا لتقسيم مجموعة مكونة من 10 أشخاص إلى مجموعتين مشكلتين من4 و 6 أشخاص.

حل 38

عدد الحالات الممكنة يساوي $C_{10}^{4}=C_{10}^{6}$

تمرين 39

لدينا صندوقان حيث يحتوي الصندوق الأول U_1 على 4 كريات بيضاء و 2 سوداء, بينما

يشمل الثاني U_2 على 3 كريات بيضاء و 5 سوداء . نسحب كرية من كل صندوق, أحسب احتمال الحصول على

1) كريتين بيضاوين,2) كريتين سوداوين, 3) واحدة بيضاء و الأخرى سوداء.

حل 39

نرمز بالرمز B_1 للحادثة الحصول على كرية بيضاء من الصندوق الأول, N_1 الحادثة الحصول على كرية سوداء من الصندوق الأول و نرمز بالرمز B_2 للحادثة الحصول على كرية بيضاء من الصندوق الثاني , N_2 الحادثة الحصول على كرية سوداء من الصندوق الثاني.

1) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 / B_2) \times P(B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8}$

2) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1 / N_2) \times P(N_2) = P(N_1) \times P(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{5}{8}$

3) $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(N_2) + P(N_1) \times P(B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{8}$

تمرين 40

من بين 9 أشخاص كم لجنة يمكننا تشكيلها مكونة من 5 أعضاء ؟

حل 40

عدد الحالات الممكنة يساوي C_9^5

تمرين 41

نود تشكيل لجنة مكونة من 3 فيزيائيين و 2 رياضيين مأخوذة من مجموعة مشكلة من 5 رياضيين و 7 فيزيائيين. ما هو عدد الإمكانيات إذا.

يمكن لأي من الرياضيين و الفيزيائيين أن يظهر في اللجنة.

فيزيائي معين يجب أن يظهر في اللجنة.

رياضي معين يجب إقصائه من اللجنة.

حل41

1) عدد الحالات الممكنة يساوي $C_5^2 \times C_7^3$.

2) عدد الحالات الممكنة يساوي $C_5^2 \times C_6^2$.

3) عدد الحالات الممكنة يساوي $C_4^2 \times C_7^3$.

تمرين 42

في صندوق توجد 6 كريات حمراء , 4 بيضاء و 5 زرقاء . نسحب كرية عشوائيا . ما هو احتمال سحب كرية: 1)حمراء,2) بيضاء, 3) زرقاء, 4) غير حمراء, 5) حمراء أو بيضاء.

حل42

لتكن الحوادث التالية

R= الحصول على كرية حمراء.

B= الحصول على كرية بيضاء.

BL= الحصول على كرية زرقاء.

NR= الحصول على كرية غير حمراء.

RB= الحصول على كرية حمراء أو بيضاء.

لدينا $P(R)=\frac{6}{15}, P(B)=\frac{4}{15}, P(BL)=\frac{5}{15}, P(NR)=1-P(R)=\frac{9}{15}, P(RB)=\frac{10}{15}$

تمرين 43

نقوم برمي زهرة نرد مرتين. ما هو احتمال الحصول على رقم 4 ,5 أو 6 في الرمية الأولى و الحصول على 1 ,2 , 3 أو 4 في الرمية الثانية؟

حل 43

لتكن A_1 الحادثة الحصول على رقم 4, 5 أو 6 عند الرمية الأولى ولتكن A_2 الحادثة الحصول على رقم1, 2, 3 أو 4 عند الرمية الثانية. نحسب

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 / A_2)\times P(A_2) = P(A_1)\times P(A_2) = \frac{3}{6}\times\frac{4}{6}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\times P(A_2)$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}$$

تمرين 44

لتكن لدينا سلسلتين x و y حيث $y_i = bx_i^{\ a}, \forall \ i=1,...,n$ مع a و b ثابتان.

أحسب المتوسط الهندسي لـ Y بدلالة المتوسط الهندسي لـ X.

حل 44

لدينا باستعمال تقنيات حساب جبرية بسيطة $\overline{Y}_G = \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{k_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i}} = \left(\prod_{i=1}^{n} (bx_i^a)^{k_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i}} = b\left(\overline{X}_G\right)^a$

تمرين 45

ليكن لدينا الجدول التالي الممثل لسلسة إحصائية لمتغير مستمر يمثل توزيع الأراضي على 50 فلاحا

المساحة بالهكتار	40-30	50-40	60-50	70-60	80-70	90-80	100-90
عدد الفلاحين	4	6	8	12	9	7	4

هل هناك تمركز في توزيع الأراضي.

حل 45

لكي تكون الإجابة بسيطة يستحسن تشكيل الجدول التالي

الفئات	40-30	50-40	60-50	70-60	80-70	90-80	100-90
التكرار	4	6	8	12	9	7	4
المراكز	35	45	55	65	75	85	95
$C_I n_i$	140	270	440	780	675	595	380
$\sum C_i n_i$	140	410	850	1630	2305	2900	3280

نحسب الفرق بين الوسيط و الوسيط النوعي ثم نقارنه بمدى السلسلة

لدينا قيمة الوسيط النوعي من جهة $M_1 = 70 + \frac{80-70}{675}(1640-1630) = 70.15$

و من جهة أخرى فإن قيمة الوسيط تساوي: $me = 60 + \frac{70-60}{12}(25-18) = 65.83$

و منه فإن $\Delta M = M_1 - me = 4.32$

و هو ما يسمح بإيجاد النسبة $\frac{4.32}{70} = 0.06$ **و هي نسبة ضعيفة و هو ما يثبت عدم وجود التمركز**

تمرين 46

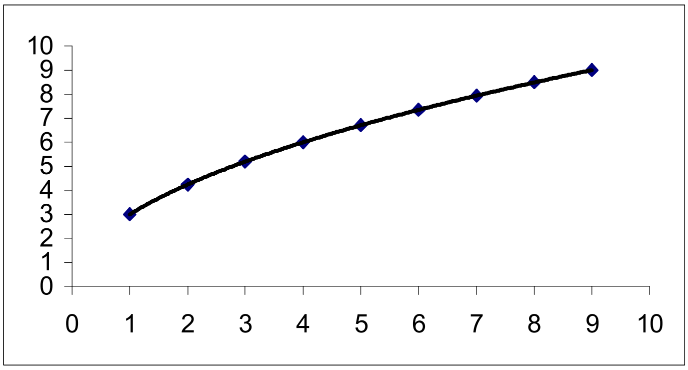
ليكن لدينا الجدول الإحصائي التالي المبين لعدد الآلات الكهربائية المنتجة و تلك المسوقة لـ 9 مصانع مختلفة.

القطع المنتجة	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
القطع المسوقة	**3**	**4.24**	**5.2**	**6**	**6.71**	**7.35**	**7.94**	**8.49**	**9**

ارسم سحابة النقاط

باستعمال تقنية المربعات الصغرى، جد منحنى التعديل على الشكل $y = bx^a$ **.**

حل 46



معادلة المنحنى: $y = 3x^{0.5}$

تمرين 47

برهن أن معامل الارتباط محصور بين 1 و –1. أي $-1 \leq r \leq 1$

حل 47

لدينا

$$\left((x_i - \bar{x})\lambda + (y_i - \bar{y})\right)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x_i - \bar{x})^2\lambda^2 + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\lambda + (y_i - \bar{y})^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2\right)\lambda^2 + \left(2\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)\lambda + \frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})^2 \geq 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير λ **و علية فإن مميزها يكون سالب تماما لعدم وجود حلول حقيقية**

أي $\Delta = \left(\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})\right)\left(\frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})\right) \leq 0$

أي $\mathrm{Cov}^2(x, y) \leq V(x)V(y)$

و هو ما ينهي البرهان

7 تمارين غير محلولة

تمرين 1

عرف المتوسط الحسابي, الهندسي و التوافقي مع تحديد بشكل دقيق مواضع استعمال كل واحد

تمرين 2

الجدول التالي يعطينا عدد القطع المصنوعة خلال أسبوع في مصنع ما.

.70,76,74,97,81,80,75,75,74,77,73,77,77,78,74,77,69,76,73,74,67,74,75,74,79,75

1) ضع هذه البيانات في توزيع تكراري ذي فئات ستة (6).
2) أوجد الوسط الحسابي.
3) أوجد الوسيط.
4) أوجد الانحراف المعياري.
5) أوجد الربيع الأول و الثالث.
6) هل هذا التوزيع ملتو أم متناظر.
7) ارسم المخطط النسيجي و المخطط التكراري التجميعي النسبي.

تمرين 3

يمثل الجدول التالي مداخيل عائلة و المصاريف الخاصة بالألبسة سنويا

المداخيل $x_i.10^6$	3.95	4.1	4.3	4.5	5.0	5.5	6.5	7.1
المصاريف $y_i.10^3$	80	90	95	110	120	125	140	155

1) مثل المشاهدات في معلم متعامد.
2) باستعمال طريقة المربعات الصغرى, جد معادلة مستقيم التعديل $y=y(x)$.
3) إذا كان الدخل السنوي يساوي 8.10^6 فما هي مصاريف الخاصة بالألبسة؟
4) أحسب معامل الارتباط الخطي, ماذا تستنتج؟

تمرين 4

لتكن لدينا f دالة معرفة كما يلي $f(x)=\begin{cases} c(1-x^k) & si \ \ 0\le x\le 1 \\ 0 & \sin on \end{cases}$

حيث k عدد طبيعي غير معدوم و c ثابت حقيقي.

1) جد قيمة الثابتين حتى تكون f كثافة احتمال لمتغيرة X.
2) من أجل $k=1$ ارسم بيان دالة التوزيع F.
3) من أجل $k=1$ احسب

a) α بحيث $p(X\le\alpha)=\frac{1}{2}$

b) $p(\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4}),\ p(X\le\frac{1}{4})$

تمرين 5

لديك الجدول التالي لمبيعات شركة سوناطراك لمادة الغاز. البيع بملاين الدولارات

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
البيع	120	160	150	180	150	200	170	190	180	230	210	225

1) مثل في معلم متعامد و متجانس المنحني المتوسط لتطور البيع شهر بعد شهر.

تمرين 6

شركة مختصة في بيع زيت الزيتون , أعطت الجدول التالي لمبيعاتها خلال 4 سنوات الأخيرة. بآلاف اللترات.

السنة	الفصل 1	الفصل 2	الفصل 3	الفصل 4
ن	30	11	12	36
ن+1	32	12	13	37
ن+2	33	13	15	39
ن+3	35	14	17	41

1) مثل هدا التوزيع على معلم متعامد و متجانس.

2) جد المعاملات الموسمية الخاصة بكل فصل.

3) مثل على معلم متعامد ومتجانس تطور المبيعات باخد بعين الاعتبار نزع التأثير الموسمي.

4) ما هو ثمن البيع خلال الفصل الثاني من السنة ن+4.

حسب الطريقة التحليلية.

حسب طريقة الموسم.

تمرين 7

قامت مصالح الحالة المدنية لمدينة بشار بإحصاء سن الزواج على عينة تتكون من 3607 شخص و أعطت الجدول التالي

السن	[15 20[	[20 25[	[25 30[	[30 35[	[35 45[	[45 55[
عدد الأفراد	15	1230	1584	660	112	6

أحسب

الوسط, الوسيط, المنوال, الربيع الأول, الربيع الثاني, العشير الثالث, العشير السادس, التباين و الانحراف المعياري.

تمرين 8

صندوق يحتوي على 8 كريات حمراء, 3 بيضاء و 9 زرقاء. نقوم بسحب 3 كريات بدون إرجاع. أحسب احتمال الحصول على

1) 3 كريات بيضاء.

2) كريات حمراء.

3) كريتين حمراوين و كرية بيضاء.

4) على الأقل كرية بيضاء.

5) من كل لون كرية.

6) ثلاث كريات حسب الترتيب التالي : حمراء , بيضاء و زرقاء.

تمرين9

نفرض أن A و B حادثين مستقلتين, برهن أن: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

تمرين 10

شركة صونا كوم أنتجت نوع من السيارات و طلبت منك أن تقدر احتياجاتها لسنة 2000. تتلقى.
من مصالح التسويق الجدول الإحصائي التالي

السنة	1997	1998	1999
الفصل الأول	2360	2280	2520
الفصل الثاني	1910	1830	2070
الفصل الثالث	1790	1750	1830
الفصل الرابع	2540	2980	2540

مثل سحابة النقاط.

1) جد سلسلة المتوسطات المتحركة.
2) قربها بطريقة ماير.
3) احسب التوقعات الممكنة لسنة 2000.

تمرين 11

ليكن لدينا السلسلة التالية المشكلة من 12 قياس

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	1.5	2.5	2.0	2.0	3.0	4.0	4.0	3.5	4.5	4.0	5.0	5.5

1) جد مستقيم التعديل باستعمال طريقة المربعات الصغرى للمتغير y بدلالة x.
2) جد مستقيم التعديل(الانحدار) باستعمال طريقة المربعات الصغرى للمتغير y بدلالة x.
3) جد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y.

تمرين 12

نفرض أن الطول X لقطع معدنية مصنوعة موزع حسب كثافة الاحتمال التالية

$$f(x) = \begin{cases} ax & si\ \ 0 \le x \le 2 \\ 2a(3-x) & si\ \ 2 \le x \le 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) جد الثابت a.
2) أحسب $p(1 \le X \le 2.5)$.
3) مثل بيانيا التابع *f*.
4) أحسب *E(X)* و $\sigma(X)$.

تمرين 13

في مصنع لدينا ثلاث آلات , إن احتمال تعطل الآلة رقم 1, 2 و3 يساوي 0.02, 0.08 و 0.12 على الترتيب. أحسب احتمال أن

1) لا تتعطل أي آلة.
2) واحدة و واحدة فقط تتعطل.
3) التين فقط تتعطلان.

4) على الأقل آلة واحدة تتعطل.

تمرين 14

ليكن الجدول التالي

الفئات	[0 10[	[10 20[	[20 30 [	[30 40[
f_I	0.10	a	b	0.40

1) احسب قيمة a و b علما أن $\overline{X}=25$

2) أرسم المنحني النسبي التجميعي.

تمرين 15

لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية $\{4,5,2,3,7,9\}$

أحسب الانحراف المتوسط

إذا أضفنا لكل عدد من أعداد السلسلة السابقة القيمة 3 فإننا نحصل على السلسلة العددية التالية $\{7,8,5,6,10,12\}$.ماذا تلاحظ من خلال مقارنة متوسطيهما و انحرافيهما المعياريين.

تمرين 16

تعاقبت ثلاث فرق عمل على مؤسسة تجارية

الفرقة الأولى اشتغلت لمدة 3 سنوات و حققت زيادة في الأرباح قدرها 5.8 $^0/_0$ سنويا.

الفرقة الثانية اشتغلت لمدة 1 سنة و حققت زيادة في الأرباح قدرها 4.6 $^0/_0$ سنويا

الفرقة الثالثة اشتغلت لمدة 2 سنة و حققت زيادة في الأرباح قدرها 11.2 $^0/_0$ سنويا

أحسب متوسط المعدل السنوي لزيادة الأرباح المتحققة و ذلك طوال الفترة التي توالت فيها الفرق الثلاث.

تمرين 17

ليكن التوزيع التكراري الممثل لأوزان مجموعة من الطلبة.

الفئات	[45 50[	[50 55[	[55 60[	[60 65[	[65 70[	[70 75[
التكرار	3	7	16	12	9	5

1) أحسب المنوال و الوسيط.

2) حدد عدد الطلبة الذين يقل وزنهم عن 55 , 65 كلغ.

3) حدد الوزن الذي يقل عنه نصف أفراد المجموعة.

تمرين 18

سيارة تقطع مسافة 10 كلم بسرعة 10 كلم في الساعة و 10 كلم بسرعة 20 كلم في الساعة ثم 10 كلم بسرعة 30 كلم في الساعة.

أحسب السرعة المتوسطة.

تمرين 19

ليكن الجدول التكراري التالي

الفئات	[49.5 159.5[	[159.5 169.5[	[169.5 x[	[x 189.5[	[189.5 199.5[
f_I	14	46	111	158	175

أحسب قيمة x علما أن الوسيط me175.9.

تمرين 20

عائلة تتكون من 5 أطفال

1) **أحسب احتمال وجود في هذه العائلة 3 ذكور و 2 إناث.**

2) **أحسب احتمال وجود على الأقل 3 ذكور.**

تمرين 21

نعطي الجدول الإحصائي التالي

45	40	35	30	25	20	x_i
2	5	8	10	15	10	n_I

1) **عين المنوال و أحسب الوسيط.**

2) **أحسب الوسط, التباين و استنتج الانحراف المعياري.**

تمرين 22

ليكن X متغير عشوائي كثافة احتماله تساوي $f(x) = \begin{cases} cx & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1) **جد الثابت c.**

2) **أحسب** $P(1 \le X \le 3)$ **.**

تمرين 23

في صندوق توجد 32 كرية. 4 كريات تحمل رقم 1 و 4 كريات تحمل رقم 2 و 4 كريات تحمل رقم 8. نسحب 5 كريات بدون إرجاع.

أحسب احتمال الحصول على

1) **4 كريات تحمل نفس الرقم و الكرية الخامسة تحمل رقم أخر.**

2) **3 كريات تحمل نفس الرقم و 2 كريات تحمل رقم آخر مختلف عن الأول.**

3) **3 كريات تحمل نفس الرقم وكريتان تحملان رقمين مختلفين و مختلفين عن الرقم الأول.**

4) **كريتان تحملان نفس الرقم و كريتان أخريان تحملان نفس الرقم و مختلف عن الرقم السابق و الكرية الخامسة تحمل رقم مختلف عن الرقمين السابقين.**

5) **كريتان تحملان نفس الرقم و 3 كريات تحمل أرقام مختلفة و مختلفة عن الرقم الأول.**

6) **الكريات الخمس تحمل أرقام مختلفة.**

تمرين 24

ليكن لدينا الجدول التالي الممثل لتوزيع عينة من المزارع حسب المساحة بالهكتار.

]100 70]	]70 45]	]45 30]	]30 20]	] 20 0]	الفئات
5	15	20	23	11	التكرار

1) **ما هي طبيعة هاته المتغيرة ؟**

2) **أحسب: المنوال, الوسيط, الربيع الأول, الربيع الثالث, العشير الأول و التاسع.**

3) **مثل في معلم متعامد المنحنى التجميعي المتزايد.**

4) **استنتج قيمة الربيع الثالث من المنحنى التجميعي.**

5) **بين إن كان توزيع هاته المتغيرة متناظر أم ملتو.**

6) هل هذا التوزيع متمركز؟ علل ذلك.

تمرين 25

إنتاج الحليب حسب الفصول خلال سنتين متواليتين لدى أحد الخواص مبين في الجدول التالي :

الفصل	فصل الصيف	فصل الخريف	فصل الشتاء	فصل الربيع
السنة 1	20000 لتر	15000 لتر	10000 لتر	25000 لتر
السنة 2	21000 لتر	14000 لتر	12000 لتر	30000 لتر

1) مثل بيانيا هذا الجدول الإحصائي.

تمرين 26

نعتبر الجدول التالي

X	1	3	5	7	9	5
Y	8	6	3	6	1	0

1) جد مستقيم التعديل بطريقة المربعات الصغرى.

2) جد معامل الارتباط الخطي.

تمرين 27

ليكن لدينا الجدول الإحصائي التالي :

X	0	1	2	3	4
Y	0.0	0.5	2.0	4.5	8.0

1) شكل سحابة النقاط

2) لاحظ أنها تتبع شكل دالة من النوع $y = ax^2$, حددها باستعمال التعديل المناسب.

تمرين 28

كثافة احتمال f المتغير عشوائي X مستمرة مطلقا معرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} ax & si\ \ 0 \le x \le 1 \\ a & si\ \ 1 \le x \le 3 \\ -ax+4a & si\ \ 3 \le x \le 4 \\ 0 & sin\ on \end{cases}$$

1) جد الثابت a.

2) أحسب $P(0.5 \le X \le 2.5)$, $P(X \le 1/2)$.

3) أحسب $E(X)$, $V(X)$ و $\sigma(X)$

تمرين 29

نعتبر الفضاء الاحتمال (Ω, X, p). لتكن A و B حادثتين بحيث: $P(A) = 3/8, P(B) = 1/2, P(A \cap B) = 1/4$

أحسب: $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ و $P(\overline{B})$.

تمرين 30

برهن العلاقة التالية: $\frac{1}{n}\sum n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \overline{X}^2$

تمرين 31

ليكن لدينا الجدول التالي

x_I / y_i	-1	0	1
-1	6	2	0
0	2	5	5

1) أحسب معامل الارتباط الخطي بين x و y.

2) جد التوزيع الهامشي للمتغير x.

3) جد التوزيع الشرطي للمتغير y علما أن $x = 0$.

تمرين 32

ليكن لدينا الجدول التالي و الذي يمثل عدد الأقمار الاستطلاعية المصنوعة خلال سنتين متواليتين.

السنة	السنة 1	السنة 2
السداسي 1	4	5
السداسي 2	4	6

1) مثل بيانيا هذه السلسلة.

2) مثل بيانيا نفس السلسلة بعد نزع التأثير الموسمي.

تمرين 33

لتكن لدينا المتغيرة الإحصائية التالية: $\{8,1,10,7,17,23,12,15,24\}$.

1) رتب السلسلة الإحصائية السابقة.

2) أعط وسطها.

3) نفس الأسئلة بالنسبة للسلسلة التالية: $\{1,7,8,10,12,15,17,23,24,19\}$.

تمرين 34

لدينا سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا متزايدا ما هو الوسيط إذا

1) $N = 200$

2) $N = 201$

تمرين 35

لتكن السلسلة الإحصائية التي تأخذ القيم التالية: 5, 12, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 18, 20

1)أعط المنوال, 2) عين الوسيط, 3) أحسب الوسط, 4) قدر المدى,5) جد الربيعات

6) أحسب العشير الأول و التاسع.

تمرين 36

ليكن لدينا الجدول التالي لطول 80 طالب.

الفئات	[155 160[	[160 165[	[165 170[	[170 175[	[175 180[	[180 185[	[185 190[
التكرار	3	12	18	25	15	5	2

1) أحسب المنوال, الوسيط, الوسط, المدى, الربيعات, نصف المدى الربيعي, العشير الثاني.

2) أحسب الانحراف المتوسط, التباين و الانحراف المعياري.

تمرين 37

لدينا الجدول التالي لتوزيع أجور العمال بالساعة لـ 100 عامل

اجر	[0 4[	[4 8[	[8 12[	[12 Q[	[Q 22[	[22 30[	[30 42[
التكرار	6	P_2	P_3	17	14	11	3

1) أوجد P_2 و P_3 علما أن العشر الرابع يساوي 9.5.

2) أوجد Q علما لأن متوسط الأجور يساوي 13.

3) أرسم المدرج التكراري ثم أحسب الانحراف المعياري.

تمرين 38

ليكن لدينا جدول توزيع للمساكن حسب ثمن الكراء في الشهر بمدينة بشار.

ثمن الكراء	]4 4.5]	]4.5 5.5]	]5.5 7]	]7 9]	]9 30]
عدد المساكن	8	15	47	22	8

1-أحسب المنوال, الوسط, الوسيط و الربيع الثالث.

2-مثل في معلم متعامد المخطط النسيجي لهذا التوزيع.

3-أرسم المخطط التجميعي المتزايد و أستنتج قيمة الربيع الأول.

4-حدد اتجاه ميل هذا التوزيع.

تمرين 39

ليكن لدينا الجدول التالي.

X	X_1	X_2	16
N	2	2	1

علما أن الوسط الحسابي يساوي 5,6 و الوسط الهندسي يساوي 4 جد قيمتي x_1 و x_2.

تمرين 40

لتكن لدسنا السلسلة الإحصائية التالية

x_i	[0 5[	[5 10[	[10 20[	[20 40[	[40 70[
n_i	3	6	8	2	1

1) أحسب المنوال, الوسط, الوسيط, الربع الأول, الربيع الثالث.

2) هل هذا التوزيع متناظر؟ علل.

تمرين 41

ليكن x_i متغير إحصائي وسطه الحسابي $\overline{X}$ و تباينه σ_X^2. ليكن y_i متغير إحصائي آخر بحيث $y_i = ax_i + b$.

1) أحسب الوسط الحسابي $\overline{Y}$ بدلالة $\sigma_X^2, \overline{X}, b, a$.

2) أحسب التباين σ_Y^2 بدلالة $\sigma_X^2, \overline{X}, b, a$.

تمرين 42

لتكن لدينا السلسلة الإحصائية ذات مدخلين معرفة كما يلي

x/y	[0 3[	[3 7[	[7 27]
[-1 1[	1	0	0
[1 3[	0	3	0
[3 5[	0	0	4

1) جد المنوال.

2) أرسم المخطط البياني متوازي السطوح.

3) جد التوزيعين الهامشين.

4) أحسب معامل الارتباط.

5) مثل سحابة النقاط.

6) عدل سحابة النقاط بما يتناسب معها.

تمرين 43

أجب بصح أم خطأ على القضايا التالية

لون الشعر يمثل خاصية كمية.

لكل خاصية كمية ميزة و ميزة واحدة فقط.

يمكن لفرد من المجتمع أن يكون حمارا.

يمكن لفرد من المجتمع أن يكون نعلا.

(أصفر, أحمر, أخظر, أسود, بنى) تمثل سلسلة إحصائية لمتغير إحصائي نوعي.

تمرين 44

ليكن لدينا الجدول الإحصائي التالي لإنتاج الحليب

	سنة 1999	سنة 2000
الرباعي 1	1666600	1000000
الرباعي 2	1655500	1200000
الرباعي 3	2500000	2200000

مثلها بيانيا باستعمال التمثيل القطبي.

تمرين 45

ليكن E الفضاء الشامل لتجربة عشوائية ما , لتكن A و B حادثتين . عبر عن القضايا التالية باستعمال رموز الاحتمالات

1) يتحقق على الأقل A أو B.
2) يتحقق A و B معا.
3) Aو B متمانعتان.
4) A تستلزم B.
5) A تكافئ B.
6) A وBمستقلان
7) يتحقق على الأقل A أو B علما انهما متمانعان.
8) A و B متتامان.

تمرين 46

دعي لاجتماع بداية السنة الدراسية n أستاذ و n أستاذة. ما هو احتمال عدم جلوس أستاذين من نفس الجنس جنبا إلى جنب, علما أن تحديد المقاعد يتم بالصدفة.

تمرين 47

ليكن X متغير عشوائي معرف بكثافة احتمال كما يلي $f(x)=\begin{cases}\frac{K}{x}\ si \in [1\ \ e] \\ 0 \quad\quad sin\,on\end{cases}$

عين ***K*** و تابع توزيع ***X***.

أحسب (X^n) و أستنتج أمل و تباين المتغير X.

تمرين 48

إن الإحصاء هو فن الكذب بدقة. لماذا؟

(*La statistique est l' art de mentir avec précision . Pourquoi ?*)

تمرين 49

معدل حوادث المرور على الطريق الرابط بين بشار و البيض يساوى 8 في الشهر

فما احتمال

1) عدم حدوث أي حادث خلال 15 يوم.

2) احتمال حدوث 4 حوادث أو اقل خلال شهر.

3) أن يزيد عدد الحوادث عن 6 خلال شهرين.

تمرين 50

قام أحد الباحثين بإجراء دراسة بين الولادات الجديدة للإنسان و تزايد عدد اللقالق فوجد أن معامل الارتباط يساوي 0.17 +، أعط تفسرا منطقيا ممكنا لهذا الارتباط.

تمرين51

لتكن X متغيرة عشوائية بحيث كثافة احتمالها تساوي

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) ما هي كثافة المتغيرة: $3X-2$ و X^2+1.

تمرين 52

جد الدوال المولدة للعزوم لبعض التوزيعات التي درستها.

تمرين 53

برهن انه إذا كان X متغير عشوائي كيفي و كان a, b ثابتين بحيث

$Y = aX + b$ فان $V(Y)=a^2V(X)$.

تمرين 54

X متغير عشوائي أمله $E(X)=10$ و تباينه $V(X) = 3$.

جد الأمل الرياضي و التباين للمتغيرات

1) $Y=-2X+10$

2) $Z= X/12$

تمرين 55

إذا كان $X:N(60,16)$

فجد

1) $P(X>65)$

2) b بحيث $P(0<X<b)=0.25$

تمرين 56

ليكن لدينا الجدول التالي الذي يمثل رقم أعمال شركة ما خلال 8 سنوات متواليات x مرتبة السنة, y رقم الأعمال

	السنة	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
X	مرتبة السنة	1	2	3	4	5	6	7	8
y	رقم اعمال	27	48	56	74	107	140	197	295

مثل في معلم متعامد و متجانس سحابة النقاط M(x,y).

1) **مثل في معلم أخر سحابة النقاط N(x,Y)حيث Y=log y اللوغاريتم العشري.**
2) **احسب معامل الارتباط الخطي.**
3) **جد بطريقة ماير معادلة مستقيم الانحدار.**
4) **أعط رقم أعمال المقترح لسنة 1990 بفرض أن الاتجاه العام يبقى ثابت.**

تمرين 57

لتكن لدينا السلسلة $\{1,2,...............,n\}$. أوجد وسطها الحسابي و تباينها.

تمرين 58

نسبة الجلوكوز عند 32 شخص تعطى كما يلي

0.85, 0.87, 0.90, 0.93, 0.94, 0.94, 0.95, 0.97, 0.97, 0.98, 0.98, 0.99, 1.00 ,1.01, 1.03, 1.03, 1.03, 1.03, 1.04, 1.06, 1.07, 1.08, 1.08, 1.10, 1.10, 1.10 1.11, 1.13, 1.14, 1.15, 1.19,1.17, 1.20.

1) **جد مدى السلسلة.**
2) **قسمها إلى فئات.**
3) **أعط جدول لتكراراتها.**

تمرين 59

لدينا الجدول الممثل لعدد السنوات المعادة و عدد الطلبة الموافق

x_I	0	1	2	3	4	5	6	7
n_I	82	55	30	15	9	5	2	1

1) **ما هي طبيعة هذه المتغيرة الإحصائية؟**
2) **شكل جدول يشمل التكرار التجميعي, التكرار النسبي و التكرار النسبي التجميعي.**
3) **أرسم المخطط البياني بالأعمدة.**
4) **أرسم مضلع التكرارات.**
5) **أرسم مضلع التكرارات التجميعي.**

تمرين 60

لدينا الجدول التالي الممثل لعلامات الطلبة في الرياضيات

الفئات	]1 4]	]4 7]	]7 10]	]10 13]
التكرار	7	5	3	3

1) **أرسم المخطط النسيجي و مضلع التكرارات.**

تمرين 61

نقوم برمي زهرتي نرد متجانستين, ليكن X المتغير العشوائي الموافق لجمع النقاط المحصل عليها.

1) **جد قانون توزيع X.**
2) **جد دالة التوزيع للمتغير X.**

3) أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري.

تمرين 62

معاملات المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ حصلنا عليها بعد رمي زهرة نرد ثلاث مرات أي $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

ما هو احتمال الحصول على :

1) جذرين حقيقيين .
2) جذرين ناطقين
3) جذرا مضاعفا
4) جذرين مركبين

تمرين 63

لتكن لدينا السلسلة الإحصائية التالية $\{0,1,1,2,2,3,4\}$

1) أحسب الوسط, المنوال, الربيع الأول, الثاني, الثالث.
2) هل هذا متناظر؟ علل إجابتك.

تمرين 64

عدل السلسلة التالية باستعمال الطريقة الملائمة

X_I	0	1	2	3	4	5
Y_I	1	2	4	8	16	32

لاحظ أنها تتبع شكل $y=b^x$ (المطلوب إيجاد قيمة b)

تمرين 65

نعتبر 35 كرية متجانسة مرقمة من 1 إلى 35 نسحب 5 كريات بدون إرجاع.

أحسب احتمال الحصول على

1) كرية تحمل رقم زوجي.
2) كرية تحمل رقم فردي.
3) كرية تحمل رقم أكبر تماما من رقم 5.

تمرين 66

نرمي ثلاث أحجار نرد. ما هو احتمال الحصول على

رقم 6 مرتين مع رقم أخر مختلف عن 6.

على مجموع يساوي 12.

تمرين 67

أحمد و محمد اتفقا على أن يلتقيا أمام المكتبة البلدية بين الساعة 8 و 10 صباحا على أن ينتظر أول من يصل الآخر 30 دقيقة. أحسب احتمال عدم التقاءهما.

تمرين 68

لدينا قرص نرميه ثلاث مرات. إذا كان احتمال إصابته يساوي 0.7 شكل قانون و دالة توزيع المتغيرة العشوائية التي تهتم بعدد الرميات الناجحة. أحسب التوقع الرياضي, التباين و الانحراف المعياري.

تمرين 69

كم لجنة من 6 نساء و 3 رجال يمكن تشكيلها إذا كان الاختيار من بين 10 نساء و 8 رجال؟

كم طريقة توجد أمام مؤسسة لاختيار 3 ممولين بلوازم الإنتاج من بين 5 مشاركين.

تمرين 70

الجدول التالي يمثل نتائج دراسة عدد الطفيليات الموجودة بالفواكه .

عدد الطفيليات	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد الفواكه	15	20	25	15	10	30	40	05	10

1) ما هي طبيعة هذه المتغيرة المدروسة.

2) شكل جدول يحتوي على التكرار التجميعي, النسبي و النسبي التجميعي.

3) أرسم المخطط بالأعمدة ومضلع التكرارات.

4) أرسم المخطط التجميعي للتكرار النسبي.

تمرين 71

ليكن لدينا التوزيع الممثل بالجدول التالي

الفئات	[7 9[	[9 11[	[11 13[	[13 15[	[15 17[	[17 19[
التكرار	10	70	30	40	45	5

1)أحسب الوسط, التباين, الانحراف المعياري و الانحراف المتوسط.

تمرين 72

نظام ترقيم السيارات يحتوي على 4 أعداد حيث العدد الأول و الثاني ينتمي إلى المجموعة $\{2,3,4\}$, متبوعا بثلاث أحرف كبيرة ثم نختمها بعدد أو حرف صغير ما هو عدد لوحات الترقيم الممكنة؟

تمرين 73

داخل صندوق توجد 8 كريات بيضاء و 3 سوداء, نسحب 4 كريات معا.

ما هو عدد كل الإمكانيات؟

بكم طريقة يمكننا سحب

1) 3 كريات بيضاء و 1 سوداء

2) 2 كريات بيضاء و 2 كريات سوداء

تمرين 74

يتقدم مترشحان A و B لإجراء امتحان في مركزين مختلفين, حيث احتمال فوز A يساوي 0.75 و احتمال نجاح B يساوي 0.66.

ما هو احتمال

1) نجاح المترشحين معا

2) فشل المترشحين معا.

3) أحدهما فقط ينجح.

4) على الأقل أحدهما ينجح.

تمرين 75

نرمي 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6 نحو 6 صناديق مرقمة هي كذلك من 1 إلى 6, حيث لا يمكن للصندوق استعاب أكثر من كرية.

ما هو احتمال

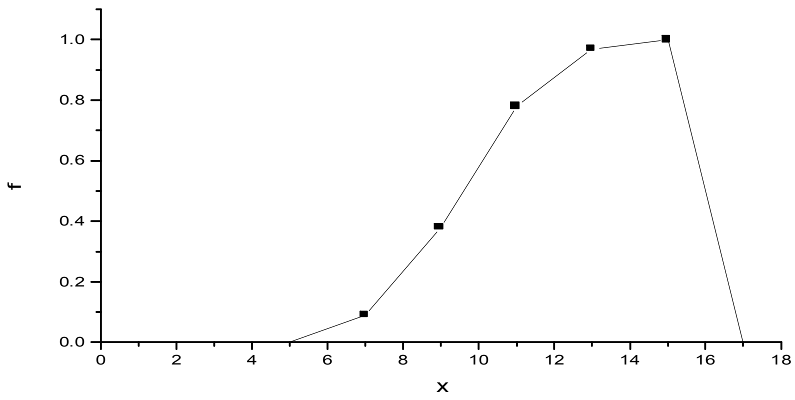
1) دخول الكرية التي تحمل رقم 5 في الصندوق الذي يحمل رقم 5.

2) دخول الكريتان رقم 3 و 5 في الصندوق رقم 3 و 5 (على الترتيب).

3) كل كرية من الستة تدخل في الصندوق الذي يحمل نفس الرقم.

تمرين 76

نقاط مجموعة مكونة من 100 طالب و المحصورة بين 6 و 16 أعطت بعد معالجتها, ممثلة على شكل بياني



1) كيف نسمي هذا التمثيل البياني و ما طبيعة المتغيرة الإحصائية؟

2) أحسب الوسط, التباين و الانحراف المعياري لهذه السلسلة الإحصائية.

تمرين 77

ليكن لدينا الجدول التالي الممثل لعدد الحرائق المسجلة في مصنع على مدار 14 سنة ابتداء من سنة 86

]100 98]	]98 96]	] 96 94]	]94 92]	]92 90]	]90 88]	]88 86]	x_I
0	5	z	3	4z	6	4	n_I

1) احسب z إذا علمت أن الوسيط me ينتمي إلى الفئة [90 92]و يحقق

$$z \times me + z^2 - 6 = 180$$

2) استنتج قيمة الوسيط.

3) أرسم المخطط النسيجي و مضلع التكرارات.

تمرين 78

الجدول التالي يمثل طول ووزن 10 طلبة أخذوا عشوائيا.

67	62	65	74	71	66	60	72	63	70	X(kg)
1.56	1.35	1.50	1.80	1.68	1.55	1.32	1.78	1.45	1.60	Y(cm)

1) جد مستقيم التعديل للمتغير y بدلالة x.

2) جد مستقيم التعديل للمتغير x بدلالة y.

3) أستنتج قيمة معامل الارتباط.

4) إذا كان طول طالب 1.58 م فما هو وزنه؟

5) إذا كان وزن طالب 64 كلغ فما هو طوله؟

تمرين 79

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري للعلامات النهائية في مادتي الجبر و الإحصاء لـ100 طالب.

علامات الإحصاء	الفئات	علامات الجبر 10-8	12-10	14-12	16-14	18-16	20-18
	10-8	3	5	4	0	0	0
	12-10	3	6	6	2	0	0
	14-12	1	4	9	5	2	0
	16-14	0	0	5	10	8	1
	18-16	0	0	1	4	6	5
	20-18	0	0	0	2	4	4

المطلوب

1) كم عدد التوزيعات الشرطية و كم عدد التوزيعات الهامشية.

2) جد التوزيعين الهامشين.

3) جد توزيع شرطي لـ X و توزيع شرطي لـ Y.

4) كم عدد الطلبة الذين حصلوا على العلامات 14-16في الجبر و 16-18 في الإحصاء.

5) كم هي النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا في الجبر على علامة أقل من 14.

6 كم هو عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة 14 أو أكثر في الإحصاء و أقل من 16 في الجبر.

7) كم هو عدد الطلبة الذين تحصلوا على مقياس الإحصاء و الجبر.

8 أحسب معامل الارتباط الخطي .

تمرين 80

إذا علمت أن معادلتي التعديل لـ x على y و لـ y على x هما $\begin{cases} y = 0.72x + 3.12 \\ x = -0.81y + 1.43 \end{cases}$

فما تعليقك مع التبيين؟

تمرين 81

إذا علمت أن الانحراف المعياري لقيم x هو 0.61 و أن الانحراف المعياري لقيم y هو 1.22. فأحسب معامل الارتباط بين قيم x و y علما أن معادلة التعديل هي $y = 0.84x + 21.28$

تمرين82

نقوم برمي قطعة نقدية متجانسة 6 مرات. أحسب إحتمال الحصول على الأكثر عل وجه.

بعض المراجع

عنوان الكتاب	الكاتب	دار النشر
مقدمة في الإحصاء	محمد صبحي أبو صالح عدنان محمد عوض	ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1984
STATISTIQUE & INFORMATIQUE	L. LALLAM	ATLAS EDITIONS ALGERIE
STATISTIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE (Tome1)	PierreDAGNELIE	Les Presses Agronomiques De GEMBLOUX BELGIQUE 1992
PROBABILITES ET STATISTIQUES	MURRAY R. SPIEGEL	SERIE SHAUM Mc-GRAW HILL NEW YORK 1981