BENBACHIR Maamar

Notes de Cours
Analyse et applications

TABLE DES MATIERES

SERIES NUMERIQUES

GENERALITES ET DEFINITIONS

Soient $(u_n)_{n\in IN}$ une suite de nombres réels (complexes), l'étude de la série c'est donné un sens à $u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + \ldots.$

Définition

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ une suite numérique, on appelle série de terme générale u_n la somme infinie définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n \qquad (1)$$

tel que $(S_n)_{n\in IN}$ est la suite de sommes partielles de la suite $(u_n)_{n\in IN}$

Définition

Si la limite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie, on l'appelle la somme de la série (1) et on dit que la série converge. Si la limite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas on dit que la série (1) diverge.

Définition

On appelle reste d'ordre n la quantité définie par :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{k\geq n+1} u_k$$

EXEMPLES

1) soit la série $\sum\limits_{n\geq 0} ar^n$

On a $S_n = a\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

si $|r| \prec 1 \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{1-r}$, la série converge (CV)

si $|r| \succ 1 \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, la série diverge (DV)

si $r = 1 \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, la série diverge (DV)

si $r = -1 \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, la série diverge (DV)

2) Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1))}$

On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Théorème (CAUCHY)

Soit (S_n) une série de terme générale u_n on a :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ Converge} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \succ 0, \ni N(\varepsilon) \in IN : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in IN \Rightarrow |u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+p}| \prec \varepsilon$$

Preuve

Si la série converge $\Leftrightarrow (S_n)$ converge

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \succ 0, \ni N(\varepsilon) \in IN : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in IN \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| \prec \varepsilon$

Théorème

L'ensemble des séries convergentes muni de la somme des séries et de la multiplication par un réel forment un espace vectoriel sur IR

Preuve

On peut vérifier sans grande difficulté qu'avec les opérations

$$\begin{cases} S + W = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} v_n\right) \\ cS = c\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} cu_n\right) \end{cases}$$

L'ensemble des séries convergentes forment un espace vectoriel sur IR.

Théorème

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre finie de ces termes

Démonstration

Soient $S_n = \sum_n u_n$ et $T_n = \sum_n v_n$

telles que

$$\begin{cases} u_n = v_n & \text{pour} \quad n \geq N \\ u_n \neq v_n & \text{pour} \quad n \prec N \end{cases}$$

On a

$$S_n - T_n = \sum_{n=0}^{N-1} (u_n - v_n) \quad ....(1)$$

Si (S_n) converge $\Leftrightarrow$ (T_n) converge grâce à (1).

Exemple

Etudier la série suivante

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$$

Solution

$\sum_n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_n \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ on en déduit que

$$s_n = u_1 + ... + u_n \quad = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - .... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ ce qui implique la convergence de la série.

SERIES A TERMES POSITIFS

Définition

Toute suite à termes positifs est une série dont les termes sont tous non négatifs à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Remarques

Une série à termes positifs est:

a) Soit convergente.

b) Soit divergente vers l'infini

Soit une suite (u_n) de termes positifs. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit convergente il faut et il suffit que la suite $s_n = u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$ soit majorée c-a-d ($\sum_n u_n$ CV $s_n = u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n \Leftrightarrow$ majorée).

Théorème

Soient (u_n) *et* (v_n) de suites de nombres réels vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang N alors

a) $\sum_n v_n$ CV $\Rightarrow \sum_n u_n$ CV

b) $\sum_n u_n$ DIV $\Rightarrow \sum_n v_n$ DIV

Démonstration

a) $\sum_n v_n$ cv $\Rightarrow \sum_n u_n$ cv ?

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k = M$ c.-à-d. que $S_n \leq M \quad \forall n \in IN$

$\Rightarrow \sum_n u_n$ cv

b) On utilise la contraposée

$\sum_n v_n$ cv $\Rightarrow \sum_n u_n$ cv $\Leftrightarrow \sum_n u_n$ div $\Rightarrow \sum_n v_n$ div

Corollaire

Soit (v_n) une suite positif qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang N, soit (u_n) une suite positif .Supposons que les deux suites vérifient $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

alors

a) si $\sum\limits_n v_n$ cv et $0 \le k \prec \infty$ $\Rightarrow \sum\limits_n u_n$ cv

b) si $\sum\limits_n v_n$ div et $0 \prec k \le \infty$ $\Rightarrow \sum\limits_n u_n$ div

Démonstration

La même démonstration que celle utilisée dans un théorème semblable dans les intégrales impropres.

Corollaire

Soient (u_n) , (v_n) deux séries à termes positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \forall\ n \ge n_0 \quad , \ n_0 \text{ un rang}$$

alors on a

1) $si \ \sum\limits_n v_n \ cv \ \Rightarrow \ \sum\limits_n u_n \ cv$

2) $\sum\limits_n u_n$ div $\Rightarrow \sum\limits_n v_n$ div

Démonstration

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \forall\ n \ge n_0$ ceci entraîne que $\frac{u_n}{v_n} \le \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \ \forall \ n \ge n_0$

$$\Rightarrow u_n \le \left(\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\right) v_n \qquad \forall n \ge n_0$$

Le théorème précédent et ses deux corollaires achèvent la démonstration.

Théorème

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes strictement positifs alors

1) s'il existe un q tel que $0 \prec q \prec 1$ et un n_0 à partir duquel

on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$

alors la série $\sum_n u_n$ converge

2) s'il existe un rang n_0 à partir duquel on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série diverge.

Démonstration

1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \quad$ si $\quad n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0+1} \leq q\, u_{n_0}$ par récurrence on trouve

$$\sum_{n=n_0} u_n \leq \sum_{n=n_0} u_{n_0} q^n = u_{n_0} \cdot \sum_{n=n_0} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} u_{n_0} = u_{n_0} \frac{1}{1-q} \text{ cv}$$

donc la série converge

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad$ si $\quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow u_n \geq u_0$

Le terme général ne tend pas vers zéro, d'ou on a divergence.

Corollaire (Regle de D'alambert)

Soit $\sum u_n$ une série numérique tel qu'il existe un réel q qui vérifie

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

alors

1) si $q \prec 1$ la série converge.

2) si $q \succ 1$ la série diverge.

3) si q=1 on ne peut rien conclure.

Démonstration

1) On a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \prec 1$, alors il va exister un n_0 et $0 \prec q \prec 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, d'après le théorème précèdent la série converge.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \succ 1 \quad \Rightarrow \exists \; n_1$ tel que $\forall \; n \geq n_1 \; \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et d'après le théorème précèdent la série diverge.

Théorème

Soit $\sum\limits_n u_n$ une série tel que $u_n \geq 0 \quad \forall \quad n \geq 0$ alors

1) s'il existe $0 \leq q \prec 1$ et un rang n_0 à partir du quel on a $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq q$,la série converge

2)s'il existe un rang n_0 à partir du quel on a $(u_n)^{\frac{1}{n}} \succ 1$, la série diverge

Démonstration

1) on a pour $n \geq n_0$ $(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq q \Leftrightarrow (u_n) \leq q^n$ mais $0 \leq q \prec 1$ et$\sum\limits_n u_n \leq \sum\limits_n q^n$

la série de terme général (q^n) converge, alors il en est de même pour la série de terme général (u_n).

2) pour tout $n \geq n_1$ $(u_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ alors la série diverge

Consequence (Regle de CAUCHY)

Soit (u_n) une suite de nombres positifs

soit $L = \limsup_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}}$, $0 \le L \le +\infty$

Si $L \prec 1$ la série converge.

Si $L \succ 1$ la série diverge.

Si L=1 on ne peut rien conclure.

Démonstration

1) $\limsup_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = L \prec 1 \Rightarrow \exists\, n_0$ *tel que* $\forall\, n \ge n_0$ *on a* $(u_n)^{\frac{1}{n}} \le q$ *avec* $0 \le q \prec 1$

d'après le théorème précèdent la série converge.

2) Si $L \succ 1$ la condition nécessaire n'est pas vérifie, donc la série diverge.

Exemple

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{2n}} + \ldots\ldots\ldots$$

on a $\limsup_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \prec 1$ donc la série converge.

COMPARAISON D'UNE SERIE AVEC UNE INTEGRALE

Théorème

Soit $f : [0, \infty[\;\to IR$ une fonction continue positive et décroissante alors la série $\sum_n f(n) = f(0) + f(1) + \ldots\ldots\ldots + f(n) + \ldots\ldots$ est convergente si et seulement si $\int_0^\infty f(x)dx$ est convergente.

Démonstration

f est positive décroissante $\Rightarrow \forall x \in [n, n+1]$ on a $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$, on intégrant l'inégalité on trouve $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1)$, $\forall n \in IN$ donc on peut écrire : $\sum_{k=n}^{m} f(k) \geq \int_n^m f(x)dx \geq \sum_{k=n+1}^{m+1} f(k)$

mais

$$\left(\int_n^{n+1} f(x)dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx + ... + \int_m^{m+1} f(x)dx \right) \geq f(n+1) + f(n+2) + ...f(m+1)$$

si de plus on suppose que $\int_0^{\infty} f(x)dx$ est convergente alors il vient

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} f(k) \leq \int_n^{m+1} f(x)dx \leq \int_0^{\infty} f(x)dx \leq M \quad \forall n, m \in IN.$$

comme la suite des sommes partielles est bornée alors la série de terme général f(n) est convergente.

d'autre part on a $\sum_{k=0}^{m} f(k) \geq \int_0^{m+1} f(x)dx \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \geq \int_0^{\infty} f(x)dx = \infty$ ou cas ou l'intégrale est divergente.

Exemple

Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (série de REIMMAN)?

Solution:

On a $\sum_{n=1} \frac{1}{n^{\alpha}} = \int_1^{\infty} f(n)$ ou $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$

si $\alpha \leq 0$ alors u_n ne converge pas vers 0 donc la condition nécessaire n'est pas vérifiée. la série diverge.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \begin{cases} cv & si \quad \alpha \succ 1 \\ dv & si \quad \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} cv & si \quad \alpha \succ 1 \\ dv & si \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

SERIES A TERMES DE SIGNE QUELCONQUE

Définition

Soit $\sum_n u_n$ une série numérique réelle, on dit qu'elle est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Définition

Une série est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Remarque

L'étude de la convergence d'une série est l'étude de la série à termes positifs, par conséquent tous les résultats établis dans le paragraphe précèdent peuvent être réutilisé dans l'étude de la convergence absolue

Lemme (Identité d'Abel)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = U_n v_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} U_k (v_{k+1} - v_k) \qquad \text{ou} \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Démonstration

On remarque que $u_k = U_{k+1} - U_k \quad , k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} (U_k - U_{k-1}) v_k \\
&= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k v_k \\
&= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k v_k - (U_0 v_1 + \sum_{k=1}^{n} U_k v_{k+1} - U_n v_{n+1}) \\
&= u_0 (v_0 - v_1) + \sum_{k=1}^{n} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_{n+1}
\end{aligned}$$

Théorème (règle d'Abel)

Soient u_n et v_n deux suites réelles vérifiant les deux conditions

1) u_n monotone et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

2) $\exists \quad M \succ 0 \quad : \quad |U_n| \prec M \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors $\sum u_n v_n$ converge.

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = U_n v_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} U_k (v_{k+1} - v_k)$$

U_n bornée et $v_n \to 0 \Rightarrow U_n v_n \to 0$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \quad \text{convergente} \\ U_n \text{ bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n (v_{n+1} - v_n) \quad \text{cv}$$

U_n bornée $\Rightarrow \left|U_n(v_{n+1}-v_n)\right| \le M(v_{n+1}-v_n)$

mais $-\left|U_n\right|(v_{n+1}-v_n) \le U_n(v_{n+1}-v_n) \le \left|U_n\right|(v_{n+1}-v_n)$

$\Rightarrow 0 \le U_n(v_{n+1}-v_n)+\left|U_n\right|(v_{n+1}-v_n) \le 2\left|U_n(v_{n+1}-v_{n)}\right|$

$\sum 2\left|U_n\right|(v_{n+1}-v_n)$ cv $\Rightarrow \sum(U_n(v_{n+1}-v_n)+\left|U_n\right|(v_{n+1}-v_n))$ cv

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n(v_{n+1}-v_n)$ cv $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} U_k(v_{k+1}-v_k)$ cv $\Rightarrow S_n$ cv

Corollaire (Dirichelet)

Soient u_n et v_n deux suites telles que

1) u_n monotone bornée.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ convege

Démonstration

Soit $u=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ u_n-u est monotone et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - u = 0$

$\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \le M$ car $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ cv $\Rightarrow$ ABEL $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(u_n-u)v_n$ cv et comme $\sum uv_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n v_n$ cv

Exemples

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ converge pour tout x

on a $\left|1+\cos x+\cos 2x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\cos kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ pour $\begin{cases} k \in Z \\ x \ne 2k\pi \end{cases}$

$\frac{1}{n} \to 0$, ABEL $\Rightarrow \sum \frac{1}{n} \cos nx$ converge pour $x \neq 2k\pi$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}.(-0{,}5)^n$

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-0{,}5)^n & \text{cv} \\ \frac{n}{n+1} & \text{monotone} \quad \text{bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}.(-0{,}5)^n \quad \text{converge}$$

SERIES ALTERNEES

Définition

Soit u_n une suite positive, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ est appelée série alternée.

Théorème (LEIBNIZ)

Soit u_n une suite positive telle que

1) u_n est décroissante.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

alors la série alternée $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ converge et $|S - S_n| \leq u_{n+1}$

Démonstration

$$S_{2n-1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots\dots\dots\dots + (u_{2n-2} - u_{2n-1})$$
$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + (u_{2n} - u_{2n+1})$$
$$= S_{2n-1} + (u_{2n} - u_{2n+1})$$

donc S_{2n-1} est croissante.

S_{2n-1} croissante majorée $\Rightarrow$ convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$

D 'autre part on a $S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n}$

donc S_{2n} converge et $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S + 0$

par conséquence S_n converge et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge

de plus $S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \le u_{n+1}$

Exemple

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge d'aprés LEIBNIZ et $|S - S_n| \le \frac{1}{\ln(n+1)}$

Remarque

On peut utiliser la règle d'ABEL pour démontrer le critère de LEIBNIZ.

CONVERGENCE ABSOLUE ET SEM-CONVERGENCE

Définition

Une série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite absolument convergente si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\ cv \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ , \exists N \in IN\ :\ \forall\ m,n\ \ge N \Rightarrow |u_n| + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + |u_m| < \varepsilon$$

mais

$$\forall\ \varepsilon \succ 0\ ,\ \ni N\ \in\ \mathbb{N}\ :\ \ \forall\ \ m,n\ \ge N\ \ \Rightarrow |u_n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_m| \le |u_n| + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + |u_m| \prec \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ \ cv\ \ \text{d'aprés}\ \ \text{CAUCHY}$$

Exemples

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{n^2}$ est convergente car elle l'est absolument.

on a $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Le critère de comparaison entre séries a termes positives achève la démonstration.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n^2+1)}{2n^2+1}$ cv abs

Remarque

La réciproque est en générale fausse

Exemple

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ cv (LEIBNIZ) mais $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ dv

Définition

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite semi-convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ diverge

Exemples

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$

SUITES DE FONCTIONS ET SERIES DE FONCTIONS

Définition

Soit E une partie de IR et F(E,IR) l'ensemble des fonctions réelles à variables réelles définie sur E .

Définition

On appelle suite de fonctions sur E, toute suite $(f_n)_{n \in IN}$ d'élément de F(E ,IR), c-à-d toute application :

$$\begin{aligned} f : IN &\longrightarrow F(E;IR) \\ n &\longrightarrow f_n \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} f_n : E &\longrightarrow IR \\ x &\longrightarrow f_n(x) \end{aligned}$$

Remarque

Ne pas confondre la suite de fonctions $(f_n)_{n \in IN}$ et la suite numérique $(f_n(x))_{n \in IN}$

Exemple

$f_n(x) = x^n \qquad x \in IR \ , \quad f_n \in F(IR ; IR)$

Convergence simple

Définition

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in IN}$ est dite convergente au point x_0 de E si la suite numérique $(f_n(x_0))_{n \in IN}$ converge. $(f_n)_{n \in IN}$ est simplement convergente sur une partie I de E si elle converge en tout point de I.

Définition

On appelle domaine de convergence de la suite $(f_n)_{n \in IN}$, le sous-ensemble de E défini par $D = \{x, x \in E : f_n(x) \text{ converge}\}$

Définition

On appelle limite de $(f_n)_{n \in IN}$ la fonction f définie sur D par:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in D$$

Remarque

$(f_n)_{n \in IN}$ est simplement convergente sur I

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon \succ 0, \ni N_{\varepsilon,x} \in IN : \forall n \succ N_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \prec \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon \succ 0, \ni N_{\varepsilon,x} \in IN : \forall n, m \succ N_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \prec \varepsilon$$

Exemple

Si $|x| \succ 1 \Rightarrow x^n$ diverge

Si $x = -1 \Rightarrow (-1)^n$ diverge

Si $|x| \prec 1 \Rightarrow x^n$ converge

Si $x = 1 \Rightarrow (1)^n = 1$ converge

donc

$$f_n \longrightarrow f = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \prec x \prec 1 \\ 1 & \text{si } \quad x = 1 \end{cases}$$

CONVERGENCE UNIFORME

Définition

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in IN}$ est dite uniformément convergente sur I de E vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ni N_\varepsilon \in IN : \forall n \succ N_\varepsilon, \forall x \in I \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \prec \varepsilon$$

posons $\|f\| = \sup_{x\in I}|f(x)|$,(norme de f)

Proposition

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in IN}$ est uniformément convergente vers f sur I si et seulement si $\|f-f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\forall x \in I, |f_n(x)-f(x)| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \prec \varepsilon$

Exemple

La suite $f_n(x) = x^n \quad x\in[0\,,1[$ converge simplement vers f=0,mais pas uniformément car $\|f-f_n\| = \sup_{x\in[0.1[}|f_n(x)-f(x)| = 1$,ne tend pas vers zéro

mais sur $[0,\delta[$ tel que $\delta \prec 1$ on a $\sup_{x\in[0.\delta[}|x^n| = \delta^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ CU sur $[0,\delta[\ \forall\delta \prec 1$

Théorème

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Démonstration

Soit $x\in I$, on a

$|f_n(x)-f(x)| \le \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| = \|f_n - f\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$

Remarque

L'exemple précédent montre que la réciproque est fausse.

$f_n(x) = x^n \quad x\in[0\,,1[$ converge vers 0 sur I simplement mais pas uniformément.

Théorème (critère de CAUCHY)

Pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in IN}$ soit uniformément convergente sur I il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ni N_\varepsilon \in IN : \forall n, m \succ N_\varepsilon, \Rightarrow \|f_n - f_m\| \prec \varepsilon$$

Démonstration

$\Rightarrow$

Supposons $(f_n)_{n \in IN}$ uniformément convergente sur I vers f

Soit $\varepsilon \succ 0$

$$\ni N_\varepsilon \in IN : \forall n \succ N_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\| \prec \varepsilon / 2$$
$$\forall m \succ N_\varepsilon \Rightarrow \|f_m - f\| \prec \varepsilon / 2$$

donc

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \prec \varepsilon / 2 \prec \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow$

Supposons la condition vérifiée et montrons que $(f_n)_{n \in IN}$ est uniformément convergente.

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0 \Rightarrow$$
$$\forall x \in I : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

donc $(f_n(x))_{n \in IN}$ est de Cauchy dans IR et par conséquent $(f_n(x))_{n \in IN}$ converge vers une limite noté f(x)

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in I$$

$$\forall n, m \geq N \quad |f_n(x) - f_m(x)| \prec \varepsilon$$

$$\forall n \geq N \quad \lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \prec \varepsilon$$

$\forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \prec \varepsilon$

Donc $(f_n)_{n \in IN}$ Converge uniformément vers f sur I

SUITES DE FONCTIONS CONTINUES

On note par $C^0(I,IR)$,l'ensemble des fonctions réelles continues sur I .Une suite de fonctions continues est une suite d'éléments de $C^0(I,IR)$.

Théorème

Soit $(f_n)_{n \in IN}$ une suite de $C^0(I,IR)$,si $(f_n)_{n \in IN}$ converge uniformément vers f sur I. alors f appartient à $C^0(I,IR)$

Démonstration

Soit $\varepsilon \succ 0$

$f_n \longrightarrow f$ unif sur I $\Leftrightarrow \ni N_\varepsilon \in IN : \forall n \succ N_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\| \prec \varepsilon / 3$

....$\Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \prec \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $n \succ N_\varepsilon$ et $x_0 \in I$.

f_n continue en $x_0 \Rightarrow \ni \delta \succ 0 : \quad \forall$ x tq $\quad |x - x_0| \prec \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \prec \frac{\varepsilon}{3}$

Soit $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

on a $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

c-à-d que f est continue en x_0.

Remarque

Si la limite n'est pas continue sur I avec $f_n \in C^0(I, IR)$ alors il n'est pas de convergence uniforme sur I

Exemple

1) $f_n(x) = x^n \quad , \quad x \in I = [0,1]$

$$f_n \to f \quad \text{tq} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

f n'est pas continue sur I et f_n est continue sur I, ceci implique que f_n ne converge pas uniformément vers f sur I.

2) $f_n(x) = \text{arctg } nx \ , \ x \in IR$

$$f_n \in C^0(IR) \quad , \quad f_n \xrightarrow{C.S} f \quad \text{tq} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

$f \notin C^0(IR)$, alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur IR

SUITES DE FONCTIONS INTEGRABLES

Rappel

F est intégrable sur I=$[a,b]$ au sens de REIMANN

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \ni d(x_0, \ldots\ldots\ldots, x_n) \text{ subdivision de } [a,b] \text{ tq : } \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

avec $M_i = \max\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ , m_i = \min\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Théorème

Soit f_n une suite de fonctions intégrables sur I=$[a,b]$, si f_n converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est intégrable sur I et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration

soit $\varepsilon \succ 0$.

$$f_n \underset{CU}{\to} f \text{ sur } I \Rightarrow \ni N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \text{ et } \forall x \in I \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \prec \frac{\varepsilon}{a(b-a)} . \ ....(1)$$

soit $n \succ N$

f_n integrable sur $[a,b] \Rightarrow \ni d(x_0,......,x_k)$ subdivision de $[a,b]$ tq :

$$\sum_{i=1}^{k}(M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) \prec \frac{\varepsilon}{2}$$

avec $M_{n_i} = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_n(x)$, $m_{n_i} = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_n(x)$

d'après (1) on a $\forall x \in I..f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq f(x) \leq f_n + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\Rightarrow \ m_{n_i} - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_i \leq M_i \leq M_{n_i} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\Rightarrow M_i - m_i \leq M_{n_i} - m_{n_i} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\sum_{i=1}^{k}(M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

donc f est intégrable .Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

on a

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$\leq (b-a)\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'ou le résultat.

Exemple

$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad , \quad x \in [0,+A]$

on a $f_n \xrightarrow{CS} f = 0$ sur $[0,+A]$

$\int_0^{+A} f_n(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^{+A} = \frac{1}{2}$

d'autre part on a : $\int_0^{+A} f(x)dx = 0 \neq \frac{1}{2}$

donc f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+A]$

SUITES DE FONCTIONS DERIVABLES

On désigne par $C^1([a,b])$, l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[a,b.]$.

Théorème

Soit f_n une suite de fonctions de classe $C^1([a,b])$ telles que

1) f'_n converge uniformément vers une fonction h.

2)Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f_n(x_0)$ converge.

alors

f_n converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f \in C^1([a,b])$.

$f' = h$, (c-à-d $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$

Démonstration

$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt$, on a $f'_n \xrightarrow{CU} h$ sur $[a,b]$, a fortiori sur $[x_0,x]$ et donc : $\int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_0}^{x} h(t)dt$

Posons $F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n^{/}(t)dt$ et $F(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)dt$

On a $\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} (x - x_0)\|f_n^{/} - h\|$

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} (x - x_0)\|f_n - f\|$$

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} (x - x_0)\|f_n - f\| \leq (b-a)\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $F_n \xrightarrow{CU} F$ sur $[a,b]$.

Exemples

1) Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $\sup_{x\in IR} |f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $f_n \xrightarrow[CU]{} 0$ sur IR mais $f_n^{/}(x) = -\sqrt{n}\cos nx$, divergente quel que soit x de IR.(c-à-d que la convergence uniforme de f_n n'est pas suffisante pour la dérivabilité de la limite).

2) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,\delta]$.

$$\left\{\begin{array}{l} f_n^{/}(x) = nx^{n-1} \xrightarrow{CU} 0 \\ \quad f_n(0)\ \ CV \end{array}\right\} \Rightarrow f_n^{/} \xrightarrow{CU} f^{/}$$

SERIES DE FONCTIONS

Définition

Soit f_n une suite de fonctions définies sur une partie E de IR,et S_n la suite de fonctions des sommes partielles de f_n .

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad ,\forall x \in E$$

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge au point x_0 de E si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge (c-à-d la suite $S_n(x_0)$ converge).La série diverge au point x_0 si elle ne converge pas en ce point.

Définition (convergence simple)

La série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est dite simplement convergente sur une partie I de E , si elle converge en tout point x de I.

(c-à-d $\forall \; x \in I, \; \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge).

Définition

On appelle domaine de convergence de la série de fonctions

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ l'ensemble $D = \left\{ x, x \in E : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

on a :

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots\dots\dots + x^n = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & , \quad x \neq 1 \\ n + 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

$$S_n(x) \text{ converge } \Leftrightarrow x^{n+1} \text{ converge } \Leftrightarrow |x| \prec 1$$

donc $D =]-1,+1[\quad et \quad S_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} S(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

Définition

On appelle somme de la série, la fonction S définie sur D par

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad \forall x \in D$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

par définition de S et de D, D est exactement le domaine de définition de S.

Remarque

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge simplement sur I :

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon \succ 0, \ni N_{\varepsilon,x} \in IN \ : \forall n \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \prec \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \longrightarrow 0 \quad \text{simplement sur} \quad I$$

Définition

La série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est dite uniformément convergente sur une partie I de E si la suite de fonctions S_n des sommes partielles converge uniformément sur I.

Remarque

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ni N_{\varepsilon} \in IN \ : \forall n \geq N_{\varepsilon}, \forall x \in I \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \prec \varepsilon$$

Exemple

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge simplement vers $S(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sup_{x \in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x|} = +\infty$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformément sur $[-\delta, +\delta], (1 \succ \delta \succ 0)$

car le $\sup_{x \in [-\delta,\delta]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{\delta^{n+1}}{1 - \delta} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

CRITERE DE CONVERGENCE UNIFORME

Théorème(critère de Cauchy)

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ni N_\varepsilon \in IN:\ \forall n, m \geq N_\varepsilon,\ \ \forall x \in I\ \left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \left\| \sum_{k=n}^{m} f_k \right\| \prec \varepsilon$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme de la suite S_n des sommes partielles.

Remarque

$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ sur I est une condition nécessaire

Théorème(CRITERE DE WEIERSTRASS)

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions simplement convergente sur I de IR s'il existe

une série numérique convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ telle que

$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$. Alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur I.

Démonstration

Soit $\varepsilon \succ 0$

$\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ CV et $a_n \geq 0 \Leftrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n, m \geq N \Rightarrow a_n + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_m \prec \varepsilon$ (critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries numériques).

On a

$$|f_n(x) + \ldots\ldots + f_m(x)| \leq |f_n(x)| + \ldots\ldots + |f_m(x)|$$
$$\leq \|f_n\| + \ldots\ldots\ldots\ldots + \|f_m\|$$

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) + \ldots\ldots + f_m(x)| \leq \|f_n\| + \ldots\ldots\ldots\ldots + \|f_m\|$$

c-à-d $\|f_n + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_m\| \leq \|f_n\| + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \|f_m\| \leq a_n + \ldots\ldots + a_m \prec \varepsilon$

donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur I d'après le critère de Cauchy.

Exemple

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$

car $\left|\dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}\right| \leq \dfrac{1}{n^2+1} \quad \forall x \geq 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ converge

Théorème (critère d'ABEL)

Soient f_n et g_n deux suites de fonctions vérifiant les propriétés suivantes

1) $\exists\, M \succ 0 \quad : |f_0(x) + \ldots\ldots\ldots + f_n(x)| \prec M \quad \forall n \quad , \quad \forall x \in I$

2) g_n monotone et $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ unif sur I.

alors $\sum\limits_{n\geq 0} f_n g_n$ converge uniformément sur I.

Démonstration

On a d'après l'identité d'ABEL

$$S_n(x) = F_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} F_k(x)(g_{k+1}(x) - g_k(x)).$$

On suppose que g_k est croissante sur I ($g_{k+1} \geq g_k$).

On a $|F_n(x)g_{n+1}(x)| \leq M|g_{n+1}(x)| \quad \leq M\|g_{n+1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

donc $A_n(x) = F_n(x)g_{n+1}(x)$ converge uniformément sur I, il suffit maintenant de montrer que $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} F_k(x)(g_{k+1}(x) - g_k(x))$. est uniformément convergente sur I en utilisant le critère de Cauchy en effet

soit $\varepsilon \succ 0$

$$\|g_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \ni N_\varepsilon \in \mathrm{IN}: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|g_n\| \prec \frac{\varepsilon}{2M}$$

Soit $n, m \geq N_\varepsilon$ on a

$$|B_n(x) - B_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} F_k(x)(g_{k+1}(x) - g_k(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |F_k(x)||(g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$

$$\leq M \sum_{k=n+1}^{m} |(g_{k+1}(x) - g_k(x)| = M(g_m(x) - g_{n+1}(x))$$

$$\leq M(|g_m(x)| + |g_{n+1}(x)|) \leq M(\|g_m\| + \|g_{n+1}\|$$

$$\leq M(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}) = \varepsilon \quad , \forall x \in I$$

donc $\|B_n(x) - B_m(x)\| \prec \varepsilon$

d'ou la convergence uniforme de B_n sur I, et par la suite $S_n=A_n+B_n$ converge uniformément sur I.

Exemple

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\sin nx}{\sqrt{n+x}} \qquad x\in I_\varepsilon=[\varepsilon\ ,\quad 2\pi-\varepsilon]\ \ \varepsilon\succ 0$$

$f_n(x)=\sin nx$, avec $|F_n(x)|=|\sin x+..............+\sin nx|\leq\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\dfrac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ d'autre part on a $|g_n(x)|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}\right|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$, donc uniforme d'autant plus qu'elle est monotone .

PROPRIETES DE SERIES DE FONCTIONS UNIFORMEMENT CONVERGENTES

Théorème (continuité)

Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur un intervalle $[a,b]$, si toutes les fonctions f_n sont continues en un point x_0 de $[a,b]$, alors la somme $S=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ est continue en x_0 et on a:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x_0)$$

Démonstration

Les termes de la suite $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f_k$ étant continues en x_0 de $[a,b]$, la convergence uniforme de S_n vers S sur $[a,b]$ entraîne la continuité de S en x_0.

$$S \text{ continue en } x_0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$$

Théorème : (intégrabilité de la somme)

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[a,b]$, si toutes les fonctions f_n sont intégrable sur $[a,b]$, alors la somme $S(x)=\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ est intégrable sur $[a,b]$ et l'on a

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)dx$$

Démonstration

Soit $S(x)=\sum\limits_{k=0.....n} f_k(x)$ une somme finie de fonctions intégrable sur $[a,b]$,de plus elle converge uniformément sur $[a,b]$ vers $S(x)=\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ S est intégrable sur $[a,b]$ et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx$$

Exemple

1) $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n\geq 0} x^n$, converge uniformément sur $[-\delta,+\delta]$, $\delta \prec 1$

donc $\displaystyle\int_0^{\delta} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n\geq 0} \int_0^{\delta} x^n dx = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\delta} = \sum_{n\geq 0} \frac{\delta^{n+1}}{n+1}$, $\forall \delta \in [0,1[$

$\Rightarrow \log \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $\forall x \in]-1,1[$

Théorème (dérivabilité)

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur

$[a,b]$

1) si toutes les fonctions f_n sont continûment dérivables, $f_n \in C^1([a, b])$ et

2) si $\ni x_0 \in [a, b] : \sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.

3) $\sum_{n\geq 0} f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors

$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

la somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est continûment dérivable sur $[a, b]$ et l'on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} (f_n(x))'$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions à la suite $S_n(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

Soit V un espace vectoriel sur IR.

Définition

On appelle produit scalaire sur V, toute application de V x V dans R vérifiant :

$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \quad , \quad \forall \lambda \in IR, \forall u, v \in V.$

$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \quad , \quad \forall u_1, u_2, v \in V.$

$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad , \quad \forall u, v \in V.$

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \quad , \quad \forall u \neq 0. \text{ et } \|u\| = 0 \quad \Leftrightarrow u = 0.$

L'application : $\|.\| : V \longrightarrow IR^+$ est appelée la norme associée au produit scalaire $\langle . \rangle$

Exemples

1)V = IR^n, X= $(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$, Y= $(y_1, \ldots\ldots, y_n)$

$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

V=R$[-\pi, \pi]$, l'espace des fonctions intégrables sur $[-\pi, \pi]$ muni

du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ et $\| f \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$

cette norme est appelée norme de la convergence en moyenne

quadratique, ne pas confondre avec la norme de la convergence uniforme $\|.\|_u$.

$\|f\|_u = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Définition

Soit $S=\{\phi_1,\ldots\ldots\ldots\phi_n,\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ dans V , S est dite orthogonale si $\langle\phi_i,\phi_j\rangle = 0 \quad i \neq j$, si de plus $\|\phi_i\| = 1 \quad ,\forall i$, S est orthonormale.

Exemples

1)V=IR^n

$S = \{e_1, \qquad ,e_n\}$ est orthonormale tel que e_i= (0,0,………,1,0,………0).

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases}$$

2) $V = R[-\pi,\pi]$, muni de produit scalaire suivant : $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

$S = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ tel que :

$$\begin{cases} \phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \phi_{2k+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx \\ \phi_{2k}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \end{cases}$$

S est orthonormale.

En effet :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\sin nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)dx$$
$$= \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \pi & , \quad n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx$$

$$= \begin{cases} 0 \ , & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

$$\|\phi_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \pi \Rightarrow \|\phi_n\| = 1 \quad , \quad \forall n \geq 1$$

Théorème

Si la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge uniformément vers f

alors $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ $, n = \overline{0 \ , \ 1}$ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ $, \ n = \overline{1, \ \ 2}$

Corollaire (l'inégalité de BESSEL)

Si $f \in R[-\pi, \pi]$ on a : $\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$

Démonstration

On a $0 \leq \|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \langle f, \phi_k \rangle)^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle f, \phi_k \rangle^2$

$\forall \ \alpha_0, \dots\dots\dots , \alpha_n \in IR$ au point $(\langle f, \alpha_0 \rangle, \quad , \langle f, \phi_n \rangle)$ on obtient.

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \geq 0 \qquad \forall n \in IN$$

d'ou la série $\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2$ converge et l'on a $\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2$

Conséquence

Si $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ est le développement en série de FOURIER de fonction f on a $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

Définition

Soit $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\phi_k$ une suite de $R[-\pi,\pi]$ et $f\in R[-\pi,\pi]$ on dit que S_n converge en moyenne vers f si

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx=0$$

Corollaire (égalité de PARSEVAL)

Si $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\phi_k$ converge en moyenne vers f alors $\|f\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|\langle f,\phi_k\rangle|^2$

Démonstration

$$0\le\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}\langle f,\phi_k\rangle^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\Rightarrow\|f\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|\langle f,\phi_k\rangle|^2$$

Remarque

Si $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ converge uniformément vers f alors $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

car la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne Définition

Un point x_0 est dit point de discontinuité de première espèce pour la fonction f, si f est discontinué en x_0 et si les limites à gauche et à droite existent.

On note

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x \xrightarrow[\succ]{} x_0} f(x)$, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x \xrightarrow[\prec]{} x_0} f(x)$

Théorème (Dirichelet)

Soit $f: IR \longrightarrow IR$ une fonction intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et périodique de période égale à 2π, si les conditions suivantes sont vérifiées f est continué sur $[-\pi,\pi]$ sauf peut-être en un nombre fini de point de discontinuité de première espèce.

2)Il existe une subdivision fini $d(x_0, ..,x_n)$ de l'intervalle $[-\pi,\pi]$ tel que f soit monotone sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ alors la série de FOURIER de f converge sur $[-\pi,\pi]$ vers $f(x_0)$ si f est continue en x_0

$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ si f est discontinue en x_0

$\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$ en $x=\pm\pi$

Remarque

On peut remplacer dans le théorème de DIRICHLET la deuxième condition par:

$\lim\limits_{x \xrightarrow[\succ]{} 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$ existe et $\lim\limits_{x \xrightarrow[\prec]{} 0} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}$ existe

Développement des fonctions paires et impaires

Lemme

Soit $\varphi: IR \longrightarrow IR$ une fonction localement intégrable on a

1) si φ: est impaire alors $\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0 \quad \forall a \succ 0$

2) si φ: est paire alors $\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 2\int_{0}^{a} \varphi(x)dx \quad \forall a \succ 0$

Démonstration

φ: impaire $\Leftrightarrow \varphi(-x) = \varphi(x) \quad \forall\, x \in IR$

on a

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = -\int_{a}^{-a} \varphi(-y)dy = -\int_{-a}^{a} \varphi(y)dy$$

$$\Rightarrow 2\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0 \qquad \forall x \in IR$$

2) φ paire $\Leftrightarrow \varphi(-x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in IR$

on a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx &= \int_{-a}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{a} \varphi(x)dx \\ &= -\int_{a}^{0} \varphi(-x)dx + \int_{0}^{a} \varphi(x)dx \\ &= \int_{0}^{a} \varphi(x)dx + \int_{0}^{a} \varphi(x)dx = 2\int_{0}^{a} \varphi(x)dx\end{aligned}$$

Théorème

Soit $f \in R[-\pi, \pi]$, le développement en série de FOURIER de f est

de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx) \quad \text{si} \quad f \quad \text{est} \quad \text{paire avec } a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \ , \quad b_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx) \quad \text{si} \quad f \quad \text{est} \quad \text{impaire} \quad \text{avec } b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad , \quad a_n = 0$$

Démonstration

On remarque que si f est paire alors f(x)cosnx est paire et f(x)sinnx est impaire, il suffit d'appliquer le lemme précédent. Même chose lorsque f est impaire.

Exemple

Soit $f \in R[0,\pi]$, alors f admet sur $[0,\pi]$ deux développements différent en série de cos et de sin .

Sur $[0,\pi]$ on a

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx)$$

avec $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

On remarque que

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx)$ forme par prolongement pair de f sur $[-\pi,\pi]$ puis

un prolongement par périodicité sur IR et que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx)$ forme un

prolongement impair de f sur $[-\pi,\pi]$ puis un prolongement périodique sur IR .

Exemple

f(x)=x sur $[0,\pi]$

Développement en cos :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right), \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

d'ou : $f(x) \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right)\cos nx \qquad x \in [-\pi,\pi]$

f(x)=x sur $[0,\pi]$ développement en sin :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = 2\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \; a_n = 0$$

$$d'ou\ f(x) \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin nx \qquad x \in [-\pi,\pi]$$

CHANGEMENT D'ECHELLE

Théorème

Soit $f:IR \to IR$ une fonction intégrable sur $[-L,L]$ (L réel strictement positif, si f est périodique de période 2L, on a

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{L}x + b_n \sin n\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\frac{\pi}{L}x\,dx \qquad , b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\frac{\pi}{L}x\,dx$$

Démonstration

Il suffit de considérer le changement de variable suivant :

$$y = \frac{\pi x}{L} \in [-\pi,\pi]$$

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in [0,1] \\ 0 & , \ x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\frac{\pi}{1}x\,dx \qquad = 0,\ b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\frac{\pi}{1}x\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \qquad a_0 = 1$$

$$donc\ f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}(\sin nx) \quad x \in [-\pi,\pi]$$

INTEGRALES IMPROPRES

DEFINITIONS ET PROPRIETES :

Soit I=[a,b[$\subset R$ un intervalle semi-ouvert de R avec $b \leq +\infty$, et f : $I \to R$ une fonction réelle définie sur I .

Définition

f est dite localement intégrale sur I, si elle est intégrable au sens de Reimann sur tout compact de I , c-à-d $\forall \alpha, \beta \in I$ l'intégrale au sens de Reimann $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ existe.

Soit f : $I \to R$ une fonction localement intégrable sur I, on définit alors la fonction F sur I par : $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$

Définition

On appelle intégrale impropre de f sur [a,b[la limite $\lim_{x \to b} F(x)$ lorsqu'elle existe, et on écrit :

$$\int_{[a,b[} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_{a}^{x} f(t)dt = \lim_{x \to b} F(x)$$

On dit aussi que l'intégrale (impropre ou généralisé de f sur [a,b[est convergente, on dit que l'intégrale est divergent si elle ne converge pas .

Remarque

On définit de la même façon l'intégrale d'une fonction sur un intervalle]a,b] semi ouvert à gauche , par :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_{x}^{b} f(t)dt$$

et d'une fonction f : $]a,b] \to R$ par :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \int_x^y f(t)dt$$

$$= \lim_{x\to a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y\to b} \int_c^y f(t)dt$$

($\int_{]a,b]} fdt \Leftrightarrow$ chacune des intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b g$ cv $\forall c \in]a,b]$)

Exemple

$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leq 1$

$I = [1,+\infty[$, $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

$$F_\alpha(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} \Big|_1^x\right) & \alpha \neq 1 \\ \log t \Big|_1^x & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) & \alpha \neq 1 \\ \log x & \alpha = 1 \end{cases}$$

et $\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$

d'où $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ cv pour $\alpha > 1$

div pour $\alpha \leq 1$

2) $I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ cv pour $\alpha > 1$

div pour $\alpha \geq 1$

Il suffit d'appliquer la définition :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha \geq 1 \\ \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge $\forall \alpha \in R$ (exercice)

Théorème

Soit f :[a,b]→ IR localement intégrale sur [a,b[, l'intégrale $\int_q^b f(t)\, dt$ converge si et seulement si $\int_q^b f(t)\, dt$ converge $\forall\ c \in [a,b[$, et an à :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Demonstration :

$$\int_a^b f(t)\ dt \quad cv \Leftrightarrow \lim \quad f(x)$$

soit $c \in [a,b[$, an a $\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$

$\forall x \in [c,b[$

$$\int_c^x f(t)\ dt = \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt = F(x)) - F(c)$$

D'où $\lim\limits_{x\to b}$ F(x) existe $\Leftrightarrow \lim \int_c^x f(t)dt$ existe

et on a $\int_c^b f(t)\ dt = \lim\limits_{x\to b}\int_c^x f(t)dt$

$$= \lim\ F(x) - F(c)$$

$$= \int_a^b f(t)dt - \int_a^c f(t)dt$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Corollaire

$\int_a^b f(t)dt$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{x\to b} R(x) = 0$

Avec R(x)=$\int_x^b f(t)dt$ le reste de l'intégrale .

Démonstration

$\int_a^b f(t)dt$ cv $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe

Soit $a \in [a,b[$ on a : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt$

=F(x) + R(x)

D'où : R(x)=$\int_a^b f(t)dt - F(x) \underset{x\to b}{\to} 0$

Théorème (Linéarité de l'intégrale)

Soit f, g : [a,b[$\to R$ localement intégrale

Si $\int_a^b fdt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent

Alors $\forall \alpha, \beta \in R \quad \int \alpha f + \beta g dt$ converge et on a

$$\int_a^b \alpha . f + \beta . g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Démonstration

Soit $x \in [a,b[$ on a :

$$\int_a^x \alpha \; f + \beta . g = \alpha \int_a^x f + \beta \int_a^x g$$

Il suffit de passer à la limite quand $x \to b$

Remarque

Ce théorème montre que l'espace de fonction intégrables sur [a,b[au sens de Riemann généralisé forme un espace vectoriel sur R et l'application

$T(f) = \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur cet espace .

2. Critères de convergence :

Critère de Cauchy :

Ce critère est une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Théorème (Cauchy)

$\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists c \in [a,b[\; : x_1, x_2 \in]c,b[\Rightarrow \left| \int_{x1}^{x2} f(t)dt \right|$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy relatif à l'existence d'une limite au point b.

Remarque

On applique ce théorème souvent pour démontrer la divergence d'une intégrale.

Exemple

$\int_0^\infty \sin x dx$ diverge .

D'après le théorème précédent on a l'équivalence

$\int_a^b f(t)\, dt$ diverge $\Leftrightarrow \exists \varepsilon>0, \forall c \in [a,b[$

$$\exists x_1, x_2 \in [c,b \quad tq \left| \int_{x1}^{x2} f(t)dt \right| \geq \varepsilon [$$

il s'agit donc de trouves un $\varepsilon>0$ vérifiant cette propriété.

on a : $\int_{2n\pi}^{(2+1)\pi} si\ t\ dt = \left| coot \right|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \Big| = 2$

donc $\exists \varepsilon>0, (\varepsilon=2) tq \quad \forall M>0 \quad \exists n_1, n_2 > M$

$n_1=2n\ \pi, n_2=(2n+1)\ \pi$

: $\left| \int_{x1}^{x2} \sin\ t\ dt \geq E \right|$

CAS DES FONCTIONS POSITIVES

Théorème (critère de comparaison)

soit f,g :[a,b[IR loc.int et positives sur [a,b[, f(t) ≥ 0 et g(t) ≥ 0 $\forall t \in [a,b[$

Tq $0 \leq f(t) \leq g(t)$ alors

1) $\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ diverge.

2) $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge .

Lemme

Si f(t) ≥ 0 $\forall t \in [a,b[$ alors

1) $\int_a^b f(t)dt$ converge sai F(x) est majorée

et $\int_a^b g(t)dt$ diverge sai $\lim\limits_{x\to b}$ F(x) 2+∞.

Démonstration

La fonction F(x) est croissante sur [a,b[

où F(y) – F(x) = $\int_x^y f(t)dt \geq 0$ (car f ≥ 0).

Donc F(x) admet une limite 2 si $\exists M>0 \colon |F(x)|<M$

Démonstration du Théorème

Soit F(x)= $\int_a^x f(t)dt, \in(x)=\int_a^x g(t)dt$

$$0 \leq f(t) \leq g(t) \Rightarrow 0\int_a^x f(x)dt \leq \int_a^2 g(t)dt$$

$$0 \leq F(2) \leq \in(x)$$

$\int_a^b g\ dt$ cv $\Leftrightarrow$ $\exists M>0$: G(x)$\leq M \Rightarrow \exists M \colon F(x)M$

$\Leftrightarrow$ $\int_a^b f(t)dt$ cv

Il suffit de prendre la négation de 1) pour montrer 2)

Exemple

$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$ cv car

$0 \leq \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ cv .

Remarque

il suffit de composer f et g au voisinage de b .

Soit f, g ≥ 0 sur [a,b[on dit que f et g sont équivalente au voisinage de b et on écrit

$f \approx$ g au v(b) si $\lim\limits_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$

Théorème : (Comparaison à la limite)

Soient f, g deux fonctions positives sur [a,b[tq $f \approx$ g au v(b) alors $\int_a^b f dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature .

$$\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists c \in [a,b[:$$

$$\forall t \in]c,b]: \ \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$; donc $\exists c \in [a,b[\ : \ \forall t \in]c,b[$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2} g(t) \ \ \forall t \in]c,b[$$

On a alors :

$$\int_a^b f dt \ \text{cv} \Leftrightarrow \int_c^b \frac{1}{2} g(t)dt \ \ \text{cv} \ \Rightarrow \int_a^b g \ \ \text{cv}$$

$$\int_a^b g(t)dt \ \ \text{cv} \ \ \Leftrightarrow \int_c^b \frac{3}{2} g(t)dt \ \ \text{cv} \ \Rightarrow \int_c^b f(t)dt \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

c.à.d que $\int f$ et $\int g$ converge simultanément et donc diverge simultanément.

Exemple

1) $\int_1^{\infty} \sin\frac{1}{x} dx$ on a $\sin\frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}$ au v(x)

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \sin\frac{1}{x} dx$ diverge car $\int_1^{a} \frac{1}{x} dx$ diverge

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ cv car $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ au v(1)

Théorème

Soit f,g deux fonctions positives sur [a,b[

Tq $\lim\limits_{\in \to b} \frac{f(t)}{g(t)}=0 \quad (f=0(g)$ an $t(b)$, alors

$\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(t)dt$ converge

Démonstration

$\lim\limits_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[tq :$

$$t \in]c,b[\Rightarrow \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leq \varepsilon.$$

soit $\varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[: \forall t \in]a,b[on \quad a :$

$$0 \leq f(t) \quad \leq \varepsilon g(t).$$

donc $\int_a^b g(t)dt \quad cv \Leftrightarrow \int_c^b g(t)dt \quad cv \Leftrightarrow \int_c^b \varepsilon g(t)dt \quad cv$

$$\Rightarrow \int_c^b f(t)dt \quad cv \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt \quad cv$$

Exemple

$$\int_0^1 \log x \ dx \quad cv \text{ car } \lim_{x\to 0} \sqrt{x} \ \log x = 0$$

et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ cv.

CAS DES FONCTIONS DE SIGNE NON CONSTANT

Théorème (critère d'Abel).

Soit f, g $[a,b[\to IR$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1) f monotone et $\lim_{x \to b} f(x) = 0.$

2) $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b[: \left| \int_a^x g(t)dt \right| < M.$

alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

Démonstration :

1) $\lim_{x \to b} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a,b[\quad tq :$

$$\forall x > c \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{< M}.$$

soit $x_1, x_2 \in]a,b[, x_1 < x_2.$

on a : $\left| \int_{x1}^{x2} g(t)dt \right| \leq \left| \int_a^{x1} g(t)dt - \int_a^{x2} g(t)dt \right|$

$$\leq \left| \int_a^{x1} g(t)dt \right| + \left| \int_a^{x2} g(t)dt \right| \leq 2M.$$

f monotone ; donc d'après le 2ème théorème de la moyenne.

on a : $\left| \int_{x1}^{x2} f(t)g(t)dt \right| = \left| f(x1)\int_{x1}^{x0} g(t)dt + f(x_2)\int_{x0}^{x2} g(t)dt \right|.$

$$\leq |f(x_1)| \left| \int_{x1}^{x0} g(t) \right| + |f(x_2)| \left| \int_{x0}^{x2} g(t)dt \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4M}.2M + \frac{\varepsilon}{4M}.2M = \varepsilon$$

Et donc d'après le critère de Cauchy $\int_a^b fgdt$ cv

Exemple :

$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ cv d'après Abel car :

1) $\left|\int_1^x \sin t dt\right| = |\cos 1 - \cos 2| \leq 2 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

2) $\frac{1}{t}$ montrons $\underset{t \to \infty}{\to} 0$

Corollaire (critère de Dirichlet)

Soit f,g : [a,b[$\to R$ telles que :

1) f est monotone et borné sur [a,b[

2) $\int_a^b g(t)dt$ converge

Alors $\int_a^b f(t)g(t)$ converge

Démonstration

Soit A= $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ (elle existe)

La fonction f-A est monotone et $\underset{x \to b}{\to} 0$

Comme $\int_a^b g(t)dt$ cv $\Rightarrow \int_a^x g(t)dt$ est bornée

Donc d'après Abel $\int_a^b (f - A)gdt$ converge et comme

$$\int_a^b (f - A)gdt + \int_a^b Agdt = \int_a^b fgdt$$

Converge

CONVERGENCE ABSOLUE ET SEMI CONVERGENCE

Définition

Soit f : $[a,b[\rightarrow R$ une fonction localement intégrable . On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Théorème

Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists c \in [a,b[tq :$

$$\forall x_1, x_2 \quad \in]c,b[\text{ on a } \int_{x1}^{x2} |f|dt < \varepsilon$$

mais $\left|\int_{x1}^{x2} f(t)dt\right| \leq \int_{x1}^{x2} |f(t)|dt \leq \varepsilon.$

Le critère de Cauchy implique que $\int_a^b f(t)dt$ cv

Remarque

La réciproque du théorème précédent est en générale fausse.

Définition

Une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Exemple :

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi convergente (exercice).

METHODE DE CALCUL DES INTEGRALES

CHANGEMENT DE VARIABLE

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ et $\alpha : I \to [a,b[$ une bijective continue, donc monotone et l'intervalle I est demi ouvert de la forme $[\alpha,\beta[$ ou $]\alpha,\beta]$ selon que ℓ soit croissante ou décroissante avec :

$$\alpha = \lim_{x\to a} \ell(x) \text{ et } \beta_2 \lim_{x\to a} \ell(x)$$

Théorème

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ localement intégrale et $\ell : [\alpha,\beta[\to [a,b[$ une bijection de classe C^1 (croissante) alors $(f_0\ell)\ell'$ est loc.int du $[\alpha,\beta[$ et l'an a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\ell(t))\ell'(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Démonstration

ℓ est croissante continue $\Rightarrow \ell'(a) = \alpha$

et $\lim_{t\to b} \ell'(t) = \beta$

soit $y \in [a,b[$ on a :

$$\int_{\alpha}^{y} f(x)dx = \int_{\ell^{-1}(\alpha)}^{\ell^{-1}(y)} f(\ell(t))\ell'(t)dt.$$

Passons à la limite quand $y \to b$ on obtient :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\ell(t))\ell'(t)dt$$

même démonstration lorsque ℓ est décroissante.

Exemple

$$\int^{\infty} Dimx^2 dx$$ converge.

$$t = x^2 \Rightarrow \qquad x = \sqrt{t} = \ell(t) \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$\int_1^{\infty} dimx^2 dx = \int_1^{\infty} \frac{Dimt}{2\sqrt{t}} dt$$

ou $\left| \int_1^c Dim\ t\ dt \right| = |cool - cooc| \leq 2$ $\left.\right\}$ Abel

$\frac{1}{\sqrt{t}}$ monotone $\overrightarrow{t \to \infty} 0$ $\Rightarrow$ converge

INTEGRATION PAR PARTIE

Théorème

soient f, g : [a,b[⍰ R de classe C^1.

1) $\lim\limits_{x \to b} f(x)g(x)$ existe.

2) l'une des deux intégrales $\int_a^b fg'dt$ ou $\int_a^b f'gdt$ converge alors l'autre intégrales converge et l'on a

$$\int_a^b fg'dt = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'gdt$$

Démonstration

soit $x \in [a,b[$ on a :

$$\int_a^x (fg)'dt = f(x)g(x) - f(a)g(a)$$

$$= \int_a^x (fg' + f'g)dt$$

$$= \int_a^x fg'dt + \int_a^x f'gdt$$

supposons que $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)\ \ \lambda$ et que $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f'fdt\ \ \lambda$

alors $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x fg'dt = \lim\limits_{x\to b} (f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_\alpha^x f'gdt)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b fg'dt = \lim_{x\to b} (f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_\alpha^b f'gdt)$$

Exemple

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty x^n (-e^{-x})dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} (-x^n e^{-x}) - 0 + \int_0^\infty nx^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Par récurrence : $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx$ cv.

I_{n-1} cv $\Rightarrow$ $I_n = n\ I_{n-1}$ cv

donc I_n cv $\forall n$

COURBES ET SURFACES

COURBES PLANES

On donne trois critères de définition d'une courbe plane:

1er critère(submersion)

Soit $\phi : IR^2 \longrightarrow IR$ une application de classe C 1 (c-à-d $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ sont continues sur IR^2),on considère l'ensemble

$$\Gamma = \phi^{-1}(\{0\}) = \{(x,y), \quad \phi(x,y) = 0\}$$

si le gradient de $\phi, \nabla\phi(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Gamma$, alors Γ définie une courbe plane de classe C^1.

$$\nabla\phi(x,y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \right) = \text{gradient de } \phi \text{ en } (x,y)$$

Exemple

1) ϕ (x,y)=a x +b y +c

$$\Gamma = \{(x,y) \in IR^2; \quad ax + by + c = 0\}$$

a) $\nabla\phi = 0 \iff (a,b) = (0,0) \iff a = b = 0$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{cases} \Phi & \text{si} \quad c \neq 0 \\ IR^2 & \text{si} \quad c = 0 \end{cases}$$

b) $\nabla\phi \neq 0 \quad \Rightarrow \Gamma = \text{droite d'équation} \begin{cases} y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \quad , \quad b \neq 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-b}{a}y - \frac{c}{a} \quad , \quad a \neq 0 \end{cases}$

2)Soit $\phi(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 \quad , \quad R \succ 0$

$\Gamma = \{(x,y) \in IR^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$ cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R.

Si $\nabla\phi(x,y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)\right) = (0,0) \Leftrightarrow x = x_0$ et $y = y_0 \Rightarrow R = 0$

R=0 contradiction, donc

$$\nabla\phi(x,y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)\right) \neq 0 \qquad \forall(x,y) \in IR^2$$

Définition

Soit $\phi : IR^2 \longrightarrow IR$ une application de classe C^1, la différentielle de ϕ En un point a = (x_0, y_0) est l'application linéaire

$$D_a\phi\,(x,y) = \langle\nabla\phi(a),(x,y)\rangle = \frac{\partial\phi}{\partial x}(a)x + \frac{\partial\phi}{\partial y}(a)y$$

Définition(espace tangent)

Soit Γ la courbe plane de classe C^1 définie par $\phi(x,y) = 0$

L'espace tangent en un point a=(x_0, y_0) est par définition le sous espace vectoriel de IR^2

$$T_a\Gamma = (D_a\phi)^{-1}(\{0\}) = \left\{(x,y) \in IR^2 : \frac{\partial\phi}{\partial x}(a)x + \frac{\partial\phi}{\partial y}(a)y = 0\right\}$$

Définition(la normale)

La normale $\vec{n}$ en un point a (x_0, y_0) de Γ est un vecteur

orthogonal $T_a\Gamma$ de norme égale à 1 .($\vec{n} \in T_a\Gamma$ et $\|\vec{n}\| = 1$)

Proposition

Si Γ est définie par $\phi(x,y) = 0$, alors la normale $\vec{n}$ en un point a est donné par $\vec{n} = \pm\dfrac{\nabla\phi(a)}{\|\nabla\phi(a)\|} = \pm\dfrac{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(a), \dfrac{\partial\phi}{\partial y}(y)\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(a)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(y)\right)^2}}$

Démonstration

$\vec{v} \in T_a\Gamma \;\Rightarrow\; \nabla\phi(a).\vec{v} = 0$ par définition de espace tangent

donc $\nabla\phi(a) \in (T_a\Gamma)^{\perp}$

$\Rightarrow \vec{n} = \alpha\nabla\phi(a)$ avec $\left\|\vec{n}\right\| = |\alpha|.\|\nabla\phi(a)\| = 1$

$\Rightarrow \alpha = \pm\dfrac{1}{\|\nabla\phi(a)\|}$ .Ceci achève la démonstration.

2eme critère(paramétrisation)

Soit $\gamma : [a,b] \subset IR \longrightarrow IR^2$ de classe C^1, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Considérons l'ensemble $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in IR^2; t \in [a,b]\} = \gamma([a,b])$.

Si la différentielle de $\gamma, D_a\gamma$ au point a=($x(t_0)$, $y(t_0)$) est non nulle quel que soit a de Γ,alors Γ définie une courbe de classe C^1 de IR^2,appelée courbe paramétrique.

Exemple

1) γ (t)= ($at+x_0$, $bt+y_0$), t∈ IR.

Γ est la droite passant par (x_0,y_0) dans la direction du vecteur

(a,b)≠ (0,0) ($\gamma^{/}(t) = (a,b)$).

2) γ (t)=(Rcos(t)+x_0 ,Rsin(t)+y_0) , $R \succ 0$ et $t \in [0,2\pi]$

$\Gamma = \gamma([0,2\pi])$ est cercle de centre (x_0 ,y_0) et de rayon égale à R.

Définition(l'espace tangent)

L'espace tangent à la courbe $\Gamma = \gamma[a,b]$ avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ en un point a =(x(t_0),y(t_0)) est par définition l'ensemble(le sous-espace vectoriel de IR^2) $T_a\Gamma = \{(x^{/}(t_0)t \ , \ y^{/}(t_0)t) \in IR^2 : t \in IR\} = \gamma^{/}(t_0)IR.$

Remarque

On remarque que $T_a\Gamma = (D_a\gamma)IR. =$ l'image directe de IR par la

différentielle de γ au point a =(x(t_0),y(t_0)), par conséquent la normale $\vec{n}$ au point a =(x(t_0),y(t_0)) est donnée par $\vec{n} = \pm \dfrac{(y^{/}(t_0) \ , \ -x^{/}(t))}{\sqrt{(x^{/}(t_0))^2 + (y^{/}(t_0))^2}}.$

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\gamma^{/}(t_0) = (x^{/}(t_0), \ y^{/}(t_0)) \ \in T_a\Gamma$ et $\left\langle \vec{n}, \gamma^{/}(t_0) \right\rangle = 0$ et

que $\left\| \vec{n} \right\| = 1$

3eme CRITERE(GRAPHE)

Soit $f : [a,b] \subset IR \longrightarrow IR$ une fonction de classe C^1 ,alors le

graphe de f définie une courbe univoque de classe C^1

$\Gamma = \text{Graph } f = \{(x,y) \in IR^2 \ : \ y = f(x) \ , \ x \in [a,b]\}$

Exemple

$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad x \in [-R, R].$

Γ est le demi-cercle supérieure de centre (0,0) et de rayon R.

Remarque

On se ramène au 1er critère par $\phi(x,y) = y - f(x)$.

et au 2eme critère par $\gamma(t) = (t, f(t)) \qquad t \in [a,b]$

SURFACE DE IR3

On donne trois critères de définitions d'une surface régulière de l'espace IR3.

1er critère

Soit $\phi : IR^3 \longrightarrow IR$ une application de classe C1 (c-à-d $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ exsistent et ils sont continues). On considère l'ensemble

$$\sum = \phi^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in IR^3 : \phi(x,y,z) = 0\}$$

si $\sum \neq \Phi$ et si $\nabla\phi(x,y,z) \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in \sum$, alors définie une $\sum$ surface de classe C1 de IR3.

Exemples

1) $\phi(x,y,z) = ax + by + cz + d$

$$\begin{aligned} \sum &= \{(x,y,z) \in IR^3 : ax + by + cz + d = 0\} \\ &= \text{plan si } \nabla\phi = (a,b,c) \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

2) $\phi(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - R^2, R \succ 0$ sphère de centre (x_0, y_0, z_0)

3) $\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ *cylindre de centré par l'axe oz, et de rayon* 1

Définition(espace tangent)

L'espace tangent à $\sum$ en un point a=(x_0,y_0,z_0) est le sous- espace vectoriel de IR3 définie par

$$T_a\sum = \left\{(x,y,z) \in IR^3 : \frac{\partial\phi}{\partial x}(a)x + \frac{\partial\phi}{\partial y}(a)y + \frac{\partial\phi}{\partial z}(a)z = 0\right\} = (D_a\phi)^{-1}(\{0\})$$

le plan tangent $\Delta_a\sum = T_a\sum + a = \{X \in IR^3 \; : \langle \nabla\phi, X - a\rangle = 0\}$

Proposition

La normale à $\sum$ en un point a=(x_0,y_0,z_0) est donnée par $\vec{n} = \pm\dfrac{\nabla\phi(a)}{\|\nabla\phi(a)\|}$

Démonstration

Soit $\vec{V} \in T_a\sum \Rightarrow \left\langle \nabla\phi(a), \vec{V} \right\rangle = 0$ par définition de $T_a\sum$ c-à-d que $\nabla\phi(a) \in (T_a\sum\ )^{\perp}$ comme dim $((T_a\sum\ ) = 2 \Longrightarrow$ dim $((T_a\sum\ )^{\perp} = 1$ et $n=\alpha\nabla\phi(a)$

et $\|n\| = 1 \Rightarrow |\alpha| = \dfrac{1}{\|\nabla\phi(a)\|} \qquad \Rightarrow \alpha = \pm\dfrac{1}{\|\nabla\phi(a)\|}$

Remarque

Les composantes des $\vec{n}$ sont les cosinus directeurs de la normale.

$$n = (n_1, n_2, n_3) = \pm\frac{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(a), \dfrac{\partial\phi}{\partial y}(a), \dfrac{\partial\phi}{\partial z}(a)\right)}{\sqrt{(\phi_x{}^{/}(a))^2 + (\phi_y{}^{/}(a))^2 + (\phi_z{}^{/}(a))^2}}$$

Remarque

On remarque qu'en chaque point de $\sum$,il y a deux normales, ce qui correspond à deux face de $\sum$, cela définie une orientation locale de la surface .En général, et de façon globale, une surface peut ne pas avoir deux faces différentes, dans le sens ou le déplacement d'une normale ,sur une courbe fermé de cette surface ne conserve pas le sens de cette normale, c'est à dire qu'on peut passer d'une face à l'autre de façon continue ou bien que la surface ne possède qu'une seule face , une telle surface est dite non-orientable par exemple la bande de MOBIUS. Dans la suite, on ne travail qu'avec des surfaces orientables, lorsqu'une surface orientable est fermée, en parle de la normale extérieure et de la normale intérieure.

2EME CRITERE(SURFACE PARAMETRIQUE)

Soit $\Omega \subset IR^2$ un ouvert, et $\gamma : \Omega \subset IR^2 \longrightarrow IR^3$ une application

de classe C^1, $\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in \Omega$. si la

différentielle $D_a\gamma$ (u,v) au point (u,v) est surjective pour tout (u ,v) de Ω (c- à- d $\frac{\partial \gamma}{\partial u}$ et $\frac{\partial \gamma}{\partial v}$ sont linéairement indépendant), alors l'image directe de Ω par $\gamma, \sum = \gamma(\Omega)$ définie une surface bidimensionnel de IR^3 de classe C^1 ,appelée surface paramétrique

Exemples

1)

$$\gamma(u,v) = (R\cos u.\cos v \ , R\cos u \sin v, R\sin u) \quad (u,v) \in \Omega =]0,2\pi] x [-\pi,\pi]$$
$R \succ 0$

$\sum = \gamma(\Omega) =$ sphere de centre 0 et de rayon R.

2)

$$\gamma(u,v) = (a_1u + b_1v + x_0, a_2u + b_2v + y_0, a_3u + b_3v + z_0)$$

si (a_1,a_2,a_3) et (b_1,b_2,b_3) sont linéairement indépendant

$\sum = \gamma(IR^2)$ sont les plans passant par (x_0, y_0, z_0)

Définition(espace tangent)

L'espace tangent a une surface paramétrique

$\sum = \gamma(\Omega)$ en un point a=$\gamma(u_0, v_0)$ est définition l'image directe de IR^2 par la différentielle de γ au point a

$$T_a\sum = \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)u + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)v, \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)u + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)v, \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)u + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)v \right\}$$
de IR^3 : $(u,v) \in IR^2$

On remarque que les vecteurs $\frac{\partial \gamma}{\partial u}$ et $\frac{\partial \gamma}{\partial v}$ appartiennent à $T_a\sum$, la normale $\vec{n}$ au point $a=\gamma(u_0, v_0)$ peut –être obtenue donc par le produit extérieur de ces deux vecteurs. $\vec{n} = \lambda\left(\vec{\gamma}_n \wedge \vec{\gamma}_r\right)$

3ème critère(graphe)

Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction de classe C^1, alors le graphe de f définie une surface univoque de classe C^1 de IR^3 $\sum = \operatorname{graph} f = \{(x,y,z) \in IR^3 : z = f(x,y)\}$, on se ramène dans ce cas au deux premiers critères $\phi(x, y, z) = z - f(x, y)$

$$\vec{n} = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \qquad \gamma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$\vec{n} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f'_u \\ 1 & 0 & f'_v \end{vmatrix} = \pm \frac{(-f'_u, -f'_v, 1)}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}}$$

Remarque

Une surface univoque est toujours orientable, elle possède deux faces, une supérieure qui correspond à la normale supérieure :

$$\vec{n}_s = \frac{(-f'_u, -f'_v, 1)}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}}$$

et une inférieure correspondante à la normale inférieure

$$\vec{n}_i = \frac{(f'_u, f'_v, -1)}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}}$$

COURBE DE IR^3

On donne deux critères de définition d'une courbe dans l'espace tridimensionnel.

1er critère (submersion)

Soit $\phi : IR^3 \longrightarrow IR^2$ une application de classe C^1, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ on considère l'ensemble $\Gamma = \{(x,y,z) \in IR^3 : \phi(x,y,z) = 0\} = \phi^{-1}(\{0\})$, si $\Gamma \neq \Phi$ et si la différentielle $D_a\phi$ au point a $=(x_0,y_0,z_0)$ de $\sum$ est surjective quel que soit a de $\sum$, alors Γ définie une courbe de IR^3 de classe C^1.

$$D_a\phi = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1(a) \\ \nabla\phi_2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial\phi_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial\phi_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial\phi_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial\phi_2}{\partial z}(a) \end{pmatrix}$$

$D_a\phi$ est surjective $\Leftrightarrow \nabla\phi_1$ et $\nabla\phi_2$ sont linéairement indépendant.

On remarque que Γ est l'intersection des deux surfaces $\sum_1$ définie par $\phi_1(x,y,z) = 0$ et $\sum_2$ définie par $\phi_2(x,y,z) = 0$ avec $\nabla\phi_1 \neq 0$ sur $\sum_1$ et $\nabla\phi_2 \neq 0$ sur $\sum_2$

2^{eme} critère(paramétrisation)

Soit $\gamma : [a,b] \subset IR \longrightarrow IR^3$ une application de classe C^1, si $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$, alors l'ensemble $\gamma([a,b])$

définie une courbe de classe C^1 de IR^3, reliant les deux points γ (a) et γ (b). si γ (a)= γ (b), Γ est dite fermée.

Définition

Une courbe orienté est la donnée d'une courbe Γ et d'un sens de parcourt sur la courbe par exemple de γ (a) vers γ (b),c'est à dire le sens indiqué par $\gamma'(t)$.

Remarque

Pour une courbe plane fermée simple (ne possédant pas de points doubles) on distingue une orientation positive (sens inverse des aiguilles d'une montre) d'une orientation négative (sens des aiguilles d'une montre).

INTEGRALE CURVILIGNE DE PREMIERE ESPECE

Soit Γ de IR^2 une courbe paramétrique plane de classe C^1 Définie par la fonction vectoriel $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ et soit $F: \Gamma \longrightarrow IR$ une fonction définie et continue sur Γ à valeur dans IR, soit $d(x_0, \ldots, x_N)$ une subdivision finie de Γ, $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{N-1} arc(X_i X_{i+1})$.

Considérons le vecteur $\Delta X_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) = (\Delta x_i, \Delta y_i)$

$= \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ et $\Delta l_i = |\Delta X_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ = longueur du segment $\overline{X_i X_{i+1}}$

soit $\delta = \max\limits_{0 \le i \le N} \Delta l_i$ pour $\overset{*}{X_i}$ de $arc(X_i X_{i+1})$ un point arbitraire on considère la somme $S = \sum_{i=1}^{N-1} F(\overset{*}{X_i}) \Delta l_i$

Remarque

Lorsque F est une densité linéaire de masse sur la courbe Γ, S représente une approximation de la masse totale de Γ.

Définition

On appelle intégrale curviligne de première espèce de F sur Γ, la limite lorsqu'elle existe de S tends vers 0

$$I = \lim_{\delta \to 0} S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} F(\overset{*}{X}) \Delta l_i = \int_{\Gamma} F(x, y) dl$$

ou dl est l'élément de longueur sur Γ.

Proposition

Si Γ est définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ et est de classe C^1, alors $\int_{\Gamma} F(x, y) dl = \int_a^b F(x(t), y(t)). \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} |dt|$.

Démonstration

Soit $d(t_0, \ldots\ldots, t_N)$, la subdivision de $[a,b]$ correspondante à la

subdivision $d(X_0, \ldots, X_N)$, c'est à dire $X_i = \gamma(t_i)$, $x_i = x(t_i)$ et $y(t_i) = y_i$ $i=0,\ldots\ldots,N$

$t_0=a$,$t_N=b$. $\gamma^{/}(t) \neq 0,\ \forall t \in [a,b] \Rightarrow t_{i+1} \geq t_i$

On a d'après la formule des accroissements finis, et d'après l'hypothèse que γ est de classe C^1 $\ni \tau_i \in \left]t_i, t_{i+1}\right[$ tel que

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x^{/}(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = x^{/}(\tau_i)\Delta\ t_i$$

d'autre part on a

$$\Delta y_i = y^{/}(\tau_i)\Delta t_i \text{ et } \Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x^{/}(\tau_i))^2 + (y^{/}(\tau_i))^2}\ |\Delta t_i|$$

et si on prend $\overset{*}{X} = \gamma(\tau_i)$, $i = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots, N-1$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F(x,y)dl &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} F(\overset{*}{x}_i, \overset{*}{y}_i)\Delta l_i \\
&= \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} F(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{(x^{/}(t))^2 + (y^{/}(t))^2}\Delta\ t_i \\
&= \int_a^b F(x(t), y(t))\sqrt{(x^{/}(t))^2 + (x^{/}(t))^2}\, dt
\end{aligned}$$

Par définition de cette dernière intégrale.

Remarque

L'intégrale curviligne de 1er espèce $\int_{\Gamma} F dl$ est indépendante de l'orientation de Γ

c'est à dire $\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} F(x,y)dl = \int_{\gamma(b)}^{\gamma(a)} F(x,y)dl$ (abus d'écriture), car l'élément de longueur

dl est toujours positive.

Remarque

Lorsque F(x,y)=1, $\forall x, y \in \Gamma$, l'intégrale $\int_\Gamma dl$ représente la longueur de Γ

$$\mathrm{long}(\Gamma) = \int_\Gamma dl = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

Exemple

$\Gamma =$ cercle de centre 0 et de rayon R strictement positive,

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad , t \in [0, 2\pi]$

$$\mathrm{long}(\Gamma) = \int_\Gamma dl = \int_a^b \sqrt{(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2}\,dt = 2\pi R$$

Corollaire

1) Lorsque Γ est définie par y=f(x), $x \in [a, b]$ alors :

$$\int_\Gamma F(x, y)dl = \int_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

2) si Γ est définie par r=r(θ), $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ (coordonnées polaires), alors

$$\int_\Gamma F(x, y)dl = \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\,d\theta$$

Démonstration

1) $\gamma(x) = (x, f(x)) \quad , \quad x \in [a, b] \Rightarrow dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$

2)

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = (r')^2 + r^2$$

d'où le résultat.

Remarque

Si Γ est une courbe paramétrique de IR ^{3} définie par

$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$ l'intégrale d'une fonction F(x,y,z) définie et continue sur Γ est donnée par

$$\int_{\Gamma} F(x,y,z)dl=\int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x^{/}(t))^2+(y^{/}(t))^2+(z^{/}(t))^2}dt$$

Propriété

L'intégrale curviligne de première espèce ne dépend pas de l'orientation de Γ

Remarque

Dans la suite on note le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par $\vec{u}\bullet\vec{v}$ au lieu de $\left\langle\vec{u},\vec{v}\right\rangle$

Exemple

Γ =l'hélice définie par x=acost, y=asint,z=ct,t $\in[0\,,\,2\pi]$

$$\begin{aligned}\text{long}\Gamma&=\int_{\Gamma}dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+c^2}dt\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+c^2}dt=2\pi\sqrt{a^2+c^2}\end{aligned}$$

INTEGRALE CURVILIGNE DU SECOND ESPECE

soit Γ une courbe paramétrique plane orienté de classe C^1 définie par $\gamma(t)=(x(t),y(t))$,$t\in[a,b]$(on suppose que Γ est orienté dans le sens de l'ordre croissant du paramètre t)

Soit $F:\Gamma\longrightarrow IR^2$ une fonction vectorielle définie et continue sur Γ. $F(x,y)=(p(x,y),q(x,y))$, $\forall(x,y)\in\Gamma$

Considérons la subdivision finie $d(x_0,x_1,\ldots\ldots,x_N\ )$ de Γ et le vecteur

$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i = (\Delta x_i, \Delta y_i) = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$, considérons aussi la

somme $S = \sum\limits_{i=0}^{N-1} F(\overset{*}{X_i}).\overrightarrow{\Delta X_i} = \sum\limits_{i=0}^{N-1} p(\overset{*}{X_i})\Delta x_i + Q(\overset{*}{X_i})\Delta y_i$ et soit $\delta = \max\limits_{0\le i\le N-} |\Delta X_i|$

Remarque

Lorsque F est une force, S représente le travail qu'elle produit lorsque un point se déplace le long de Γ de A vers B.

Définition

On appelle intégrale curviligne du second espèce de la fonction F sur Γ, la limite lorsqu'elle existe .

$$I = \lim_{\delta\to 0} = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} p(\overset{*}{X})\Delta x_i + Q(\overset{*}{Y})\Delta y_i \text{ et on note } I = \int_\Gamma p(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Proposition

Si Γ est de classe C^1 définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$

(orienté de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$) alors

$$\int_\Gamma p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (p(x(t)vy(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt$$

Démonstration

D'après la formule des accroissements finis appliquées aux fonctions x et y on a

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = x'(\tau_i)\Delta t_i$$

avec $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ et $\Delta y_i = y'(\tau_i)\Delta t_i$.

$d(t_0,..........,t_N)$ une subdivision de $[a,b]$ correspondante à $d(x_0,..........,x_N)$,(c-à-d : $x_i = \gamma(t_i)$). Si on prend $x_i^* = \gamma(\tau_i)$. on a

$$S = \sum_{i=0}^{N-1}\left[p(x(\tau_i),y(\tau_i))x'(\tau_i) + Q(x(\tau_i),y(\tau_i))y'(\tau_i)\right]\Delta t_i \xrightarrow{def}$$

$$\int_a^b \left[p(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$

Propriété

Soit Γ une courbe orientée, si on désigne par Γ' la même courbe orienté dans le sens inverse alors $\int_\Gamma \vec{F}\,\vec{dl} = -\int_{\Gamma'} \vec{F}\,\vec{dl}$

$$\int_\Gamma (\alpha \vec{F_1} + \beta \vec{F_2})\,\vec{dl} = \alpha \int_\Gamma \vec{F_1}\,\vec{dl} + \beta \int_\Gamma \vec{F_2}\,\vec{dl}$$

Si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ fini, alors $\int_\Gamma \vec{F}\,\vec{dl} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}\,\vec{dl} + \int_{\Gamma_2} \vec{F}\,\vec{dl}$

Remarque

Lorsque Γ est une courbe de IR^3 de classe C^1 définie par $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$, $t \in [a,b]$ est $f : \Gamma \longrightarrow IR^3$ une fonction vectorielle continue F=(P,Q,R) alors

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

3) Si $\Gamma \subset IR^2$ est une courbe univoque définie par y=f(x), $x \in [a,b]$

alors $\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x,f(x) + Q(x,f(x)f(x)')dx$

3)lorsque la courbe est fermée on note $\oint_{\Gamma} \vec{F}\,\vec{dl}$

FORMULE DE GREEN

Définition

On appelle disque ouvert de centre a=(x_0,y_0) et de rayon r l'ensemble de IR^2 définit par $D(a,r) = \{(x,y) \in IR^2 : x^2 + y^2 \prec r^2\}$

Définition

On appelle disque fermé de centre a=(x_0,y_0) et de rayon r l'ensemble de IR^2 définit par $\overline{D(a,r)} = \{(x,y) \in IR^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$

on remarque que le cercle C(a, r) est la frontière de D(a,r)

C(a,r)= $\overline{D(a,r)} -$ D(a,r)=Fr(D(a,r)).

Définition

Un ensemble $\Omega \subset IR^2$ est dit ouvert si $\forall a \in \Omega$, il existe r positif tel que $D(a,r) \subset \Omega$.

Définition

Un ensemble $\Omega \subset IR^2$ est dit fermé si son complémentaire dans IR^2 est un ouvert.

Définition

On appelle frontière d'un ensemble $\Omega \subset IR^2$ la différence entre le

plus petit fermé contenant Ω et le plus grand ouvert contenu dans Ω, on note fr(Ω) ou $\partial\,\Omega$.

Exemples

1) $\partial D(a,r) = C(a,r)$

2) $\partial(IR_+ xIR) = \{(x,y) \in IR^2 \quad , \quad x = 0\}$ = l'axe des y.

Définition(ensemble connexe).

Un ensemble Ω de IR² est dit connexe, si $\forall A, B \in \Omega$ il existe une courbe continue $\Gamma, (\Gamma : \gamma(t) = (x(t), y(t), \ t \in [a,b]$ avec $x(t)$ et $y(t)$ continues) reliant A et B ($\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$) et $\Gamma \subset \Omega$

Définition (domaine)

On appelle domaine de IR² un ensemble ouvert et connexe.

Définition (simplement connexe)

Un ensemble connexe Ω de IR² est dit simplement connexe si tout

courbe fermée de Ω limite une partie de Ω .

Exemple

$IR^* x IR^*$ n'est pas simplement connexe.

Théorème (Formule de GREEN)

Soit Γ une courbe fermée simple de classe C¹ limitant un domaine D simplement connexe (∂D=Γ) si F=(P,Q)est une fonction vectorielle

Continue sur $\overline{D} = D \cup \Gamma$ telle que $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ soient continues sur $\overline{D} = D \cup \Gamma$

Alors $\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial Y} \right) dxdy = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy$ avec Γ orienté positivement.

Démonstration

1^er^cas

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec Γ_1 et Γ_2 univoque par rapport à x, c-à-d :

$\Gamma_1 : y = f_1(x)$, $x \in [a,b]$ et $\Gamma_2 : y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$

on a

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b\int_{f_1}^{f_2}\frac{\partial P}{\partial y}dydx=\int_a^b P(x,f_2(x))dx-\int_a^b P(x,f_1(x))dx=-\int_{\Gamma_1}Pdx-\int_{\Gamma_2}Pdx=-\int_{\Gamma}Pdx$$

d'ou $\int_\Gamma Pdx=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$.............(1)

on suppose aussi que $\Gamma=\Gamma_3\cup\Gamma_4$ avec Γ_3 et Γ_4 univoque par rapport

à y c-à-d $\Gamma_3: x=f_3(y)$, $y\in[c,d]$ et $\Gamma_4: x=f_4(y)$, $y\in[c,d]$

on a

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_c^d\int_{f_3}^{f_4}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_c^d Q(f_4(y),y)dy-\int_c^d Q(f_3(y),y)dy=\int_{\Gamma_4}Qdy+\int_{\Gamma_3}Qdy=\int_{\Gamma}Qdy$$

d'ou $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_\Gamma Qdy$........................(2)

(1) et (2) $\Rightarrow \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial Y}\right)dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Qdy$

2^{eme}cas

supposons $\Gamma=\overline{AB}\cup\Gamma_1\cup\overline{CD}\cup\Gamma_2$

avec Γ_1 définie par $y=f_1(x)$, $x\in[a,b]$ et Γ_2 définie par $y=f_2(x)$, $x\in[a,b]$

$\overline{AB}$ définie par $x=a$, $y\in[y_A,y_B]$ et $\overline{CD}$ définie par $x=b$, $y\in[y_A,y_B]$

On a $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b\int_{f_1}^{f_2}\frac{\partial P}{\partial y}dydx=\int_a^b P(x,f_2(x))dx-\int_a^b P(x,f_1(x))dx=-\int_{\Gamma_2}Pdx-\int_{\Gamma_1}Pdx$

on remarque que $\int_{\overline{AB}}Pdx=\int_{\overline{CD}}Pdx=0$

donc $\int\limits_{\Gamma} Pdx = \int\limits_{\overline{AB}} Pdx + \int\limits_{\Gamma_1} Pdx + \int\limits_{\overline{CD}} Pdx + \int\limits_{\Gamma_2} Pdx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dydx$...........(1)

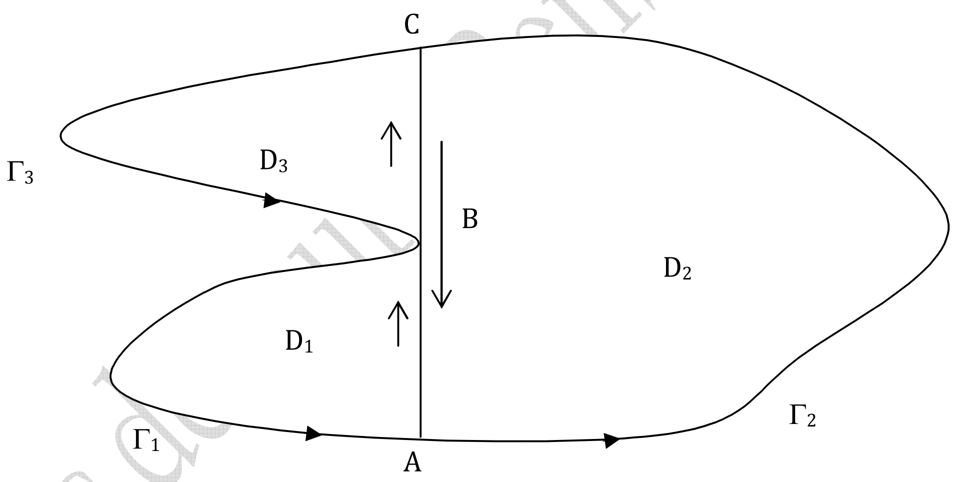
on suppose que $\Gamma = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ avec Γ_3 et Γ_4 univoque par rapport à y.

on obtient d'après le premier cas $\int\limits_{\Gamma} Qdy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dydx$...........(2)

(1) et (2) $\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$

3emecas

Γ quelconque par rapport à x (figure ci-dessous) par exemple



On a

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3, \partial D_1 = \Gamma_1 \cup \overline{AB}, \partial D_2 = \Gamma_2 \cup \overline{CA}, \partial D_3 = \Gamma_3 \cup \overline{BC}$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial D \quad , \quad \overline{AC} = \overline{AB} \cup \overline{BC}$

$$\iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{D_i} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\partial D_i} Pdx + Qdy$$
$$= \int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overline{AB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overline{CA}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\Gamma_3} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overline{BC}} Pdx + Qdy$$
$$= \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

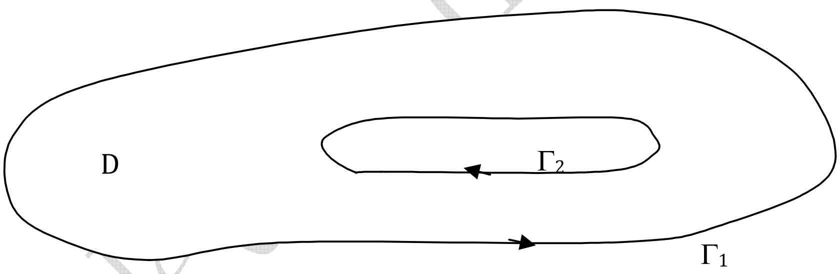
d'ou la formule de GREEN $\Rightarrow \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

Proposition

Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes fermées simples telles que Γ_2 soit intérieure à Γ_1(avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$), soit D le domaine compris entre Γ_1 et Γ_2 (figure ci-dessous), si F=(P,Q) est une fonction continue sur $\overline{D} = D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ telle que $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ soient continues sur $\overline{D}$

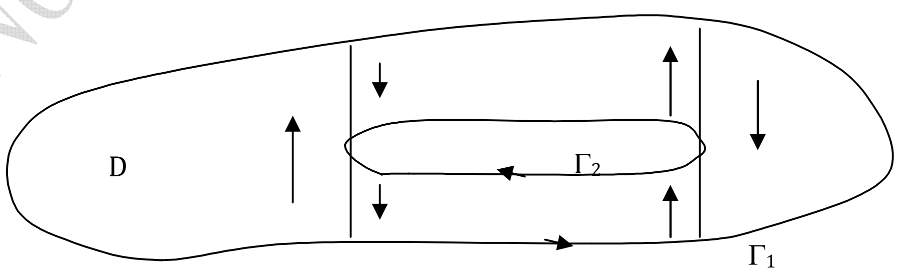
alors $\iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_{\partial\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_1^+} Pdx + Qdy + \int_{\Gamma_2^-} Pdx + Qdy$

avec Γ_1 orienté positivement et Γ_2 orienté négativement



Démonstration

On décompose D en réunion de quatre domaines $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$



On procède de la même manière que dans le théorème précédent sur chaque domaine, en remarquant que les intégrales sur les segments s'annulent deux à deux.

Théorème

Soit D un domaine borné de frontière C^1, alors l'aire de D est donnée par

$$\text{Aire}(D) = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \int_{\partial D} \frac{x^2}{2} d\left(\frac{y}{x}\right)$$

∂D Orienté dans le sens positif.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\text{Aire}(D) = \iint_D dx\,dy$ et d'appliquer la formule de GREEN aux différentes fonctions F=(0,x), F=(-y,0)

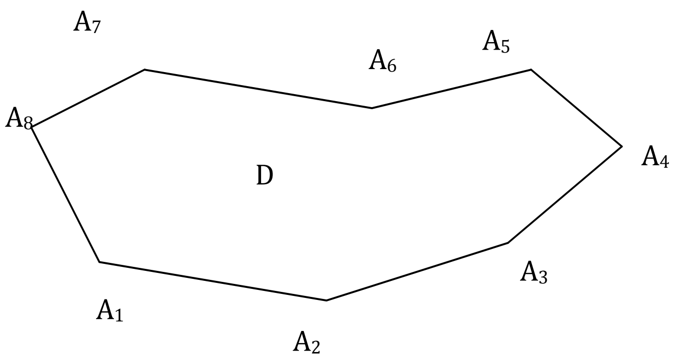
F=(-y/2,x/2).Pour la dernière formule on a

$$\frac{x^2}{2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{2}\left[\frac{-y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right] = \frac{1}{2}\left[-y\,dx + x\,dy\right]$$

on obtient ainsi la troisième formule.

Exemple

Soit D un domaine polygonal de sommets A_i, i=1,……,N



telle que $A_i=(x_i, y_i)$, i=1,…….,N

posons $A_{N+1}=A_1$, on a $\text{Aire}(D)=\oint_{\partial D} x\,dy=\sum_{i=1}^{N}\int_{\overline{A_iA_{i+1}}} x\,dy$

Paramétrisation de $\overline{A_iA_{i+1}}$:

$\gamma(t)=(1-t)A_i+tA_{i+1} \qquad t\in[0,1]$

$=((1-t)x_i+tx_{i+1},(1-t)y_i+ty_{i+1}) \qquad t\in[0,1]$

On a

$$\int_{\overline{A_iA_{i+1}}} x\,dy=\int_0^1 x(t)y'(t)dt=\int_0^1((1-t)x_i+tx_{i+1})(y_{i+1}-y_i)dt=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})(y_{i+1}-y_i)$$

c-à-d

$$\text{Aire}(D)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i+x_{i+1})(y_{i+1}-y_i)$$

FORMULE D'INTEGRATION PAR PARTIE DANS IR²

Théorème

Soit D un domaine simplement connexe de frontière de classe C^1

$u,v\ \overline{D}:\longrightarrow IR$ deux fonctions de classe C^1 sur $\overline{D}$, on a les formules d'intégration suivantes

$$\iint_D \frac{\partial u}{\partial x}v\,dxdy=\int_{\partial D} uv.n_1dl-\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy\ ,\ \iint_D \frac{\partial u}{\partial y}v\,dxdy=\int_{\partial D} uv.n_2dl-\iint_D u\frac{\partial v}{\partial y}dxdy$$

avec $n=(n_1, n_2)$ est la normale extérieure à ∂D (les intégrales curvilignes sont de première espèce).

Démonstration

Supposons que ∂D est définie par $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$. On sait que la normale extérieure est donnée par

$$n=(n_1,n_2)=\frac{\left(y'(t),-x'(t)\right)}{\sqrt{\left(\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\right)}}$$

d'autre part on a

$$I_2=\int_{\partial D^+}Pdx+Qdy=\int_{\partial D^+}\left[P(\gamma(t))x'(t)+Q(\gamma(t))y'(t)\right]dt$$
$$=\int_{\partial D}\left[-P(\gamma(t)n_2+Q(\gamma(t)n_1\right]\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$
$$=\int_{\partial D}\left[Qn_1-Pn_2\right]dl=I_1$$

ainsi l'intégrale curviligne du second espèce I_2 est ramenée à une intégrale de première espèce, on remarque que ce passage reste valable même sur une courbe orienté. Soit F=(0,uv), avec u, v deux fonctions $C^1(\overline{D})$, on a d'après la formule de GREEN

$$\int_{\partial D^+}Pdx+Qdy=\int_{\partial D^+}uvdy=\int_{\partial D}uv\,n_1\,dl=\iint_D\left(\frac{\partial uv}{\partial x}-0\right)dxdy.$$
$$\Rightarrow\int_{\partial D}uv\,n_1\,dl=\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u\right)dxdy.$$
$$\Rightarrow\iint_D\frac{\partial u}{\partial x}vdxdy.=\int_{\partial D}uv\,n_1\,dl-\iint_D\frac{\partial v}{\partial x}udxdy.$$

De la même façon on montre la deuxième formule avec F=(uv,0).

Remarque

Soit $u\in C^2(\overline{D})$, on a la formule $\iint_D\Delta u\,dxdy=\int_{\partial D}\nabla u\,n\,dl$ c à d

$$\left[\iint_D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy\right]=\int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_1+\frac{\partial u}{\partial y}n_2\right)dl=\int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl$$

Il suffit de prendre $F=\left(-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ et d'appliquer la formule de GREEN.

Théorème

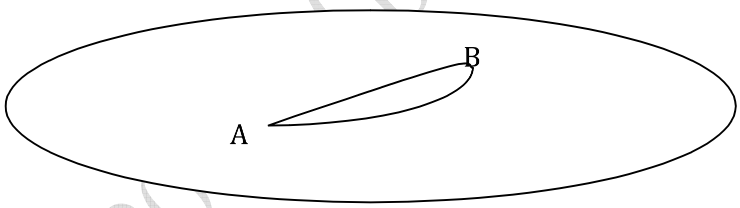
Soit D un domaine simplement connexe et F=(P,Q),continue telle que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ soient continues sur D, pour que l'intégrale

$\int_A^B Pdx + Qdy$ soit indépendante du chemin suivi de A vers B il faut et il suffit que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{sur} \quad D$$

Démonstration

Soient A et B deux points de D, Γ_1 et Γ_2 deux chemins reliant A et B orienté de A vers B.



Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ orienté positivement, on a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ est fermée et

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$
$$= \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\Gamma_2^-} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy - \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$$

donc l'intégrale est indépendante du chemin suivi entre A et B.

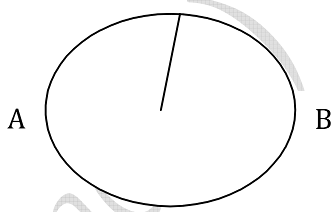
La condition est nécessaire, supposons que l'intégrale est indépendante du chemin et qu'il existe (x_0,y_0) de D tel que

$$0 + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Q.0 = \Delta x\, P(x_1, y) \quad , \quad x_1 \in [x, x+\Delta x]$$

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\succ 0$, en vertu de la continuité de la fonction $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ il existe un certain disque de centre (x_0,y_0) tel que $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\geq \alpha \succ 0$ sur le disque $D((x_0,y_0),\varepsilon)$, donc

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \geq \alpha \text{Aire}(D) \succ 0 \Rightarrow \int_{C((x_0,y_0),\varepsilon)} Pdx+Qdy \succ 0$$

$$\Rightarrow \int_{A(\Gamma_1)}^{B} Pdx+Qdy+\int_{B(\Gamma_2)}^{A} Pdx+Qdy \succ 0$$



contradiction car $\int_{A(\Gamma_1)}^{B} Pdx + Qdy = \int_{A(\Gamma_2)}^{B} Pdx + Qdy$

Proposition

Si F=(P,Q) est une fonction $C^1(D)$ sur un domaine simplement connexe tel que $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ sur D alors il existe une fonction U(x,y) de classe C^1 sur D telle que $dU = Pdx+Qdy=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$, dans ce cas

on a $\int_A^B Pdx+Qdy = U(B)-U(A)$

U est unique à une constante additive près.

Démonstration

Pour (x_0,y_0) fixé de D, on considère la fonction

$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ car cette intégrale ne dépend que de x et y on a

$$U(x+\Delta x,y)-U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy-\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy$$

(Théorème de la moyenne)

$$\Rightarrow \frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=P(x_1,y) \qquad (x_1=x+\vartheta\Delta x.,\ 0\le\vartheta\le 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=P(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}(x,y).$$

même démarche pour montrer que $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$

Exemple

$$I=\int_{\Gamma} y^2dx+2xydy$$

ou Γ est un chemin quelconque reliant A=(0,0) et B=(1,1).

On remarque que l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi

car $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2y$ sur IR^2. On sait qu'il existe fonction $U:IR^2\longrightarrow IR$

telle que $\frac{\partial U}{\partial x}=P=y^2$ et $\frac{\partial U}{\partial y}=Q=2xy$

$$\Rightarrow U(x,y)=y^2x+c(y)\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y}=2xy+c'(y)=2xy\Rightarrow c'(y)=0$$

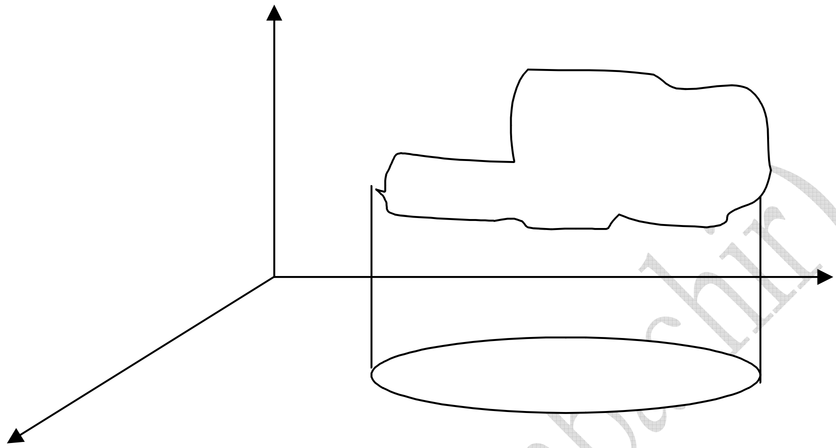
d'ou $I=\int_A^B y^2dx+2xydy=\int_A^B dU=U(B)-U(A)=U(1,1)-U(0,0)=1$

INTEGRALE DE SURFACE DE PREMIERE ESPECE

Soit $\sum\ \subset IR^3$ une surface de classe C^1 définie par le graphe d'une

fonction $f:D\subset IR^2\longrightarrow IR$, c'est à dire

$\sum = \{(x,y,z) \in IR^3, z = f(x,y) \text{ et } (x,y) \in D\}$,ou D est un domaine formé de IR^2 , D=Proj $_{oxy} \sum$. Soit $d(s_1,\ldots\ldots, s_n)$ une décomposition de $\sum$ en n partie telles que la projection de s_i sur le plan oxy est un rectangle D_i de D.



tel que les longueurs des cotés de D_i sont Δx_i et Δy_i (on néglige les parties de la frontière).Soit p_i un point de s_i $p_i = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ et $(x_i, y_i) \in D$ et T_i la partie du plan tangent a la surface $\sum$ au point p_i, telle que Proj $_{oxy}T_i = D_i$.

Lemme

Si n_s est la normale supérieure à s_i au point p_i(c'est la normale au plan T_i), on a la relation suivante

$$\text{Aire}(T_i) = \frac{\text{Aire}(D_i)}{\cos(n,z)} = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos(n,z)}$$

Démonstration :

1[ere]cas

T= a x +c figure 1

on a

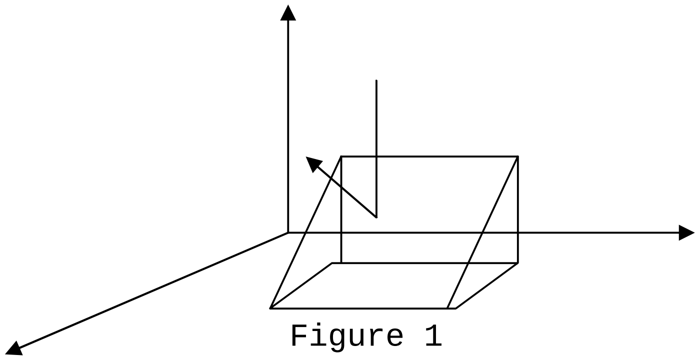


Figure 1

$$\text{Aire}(T) = \overline{AD}.\overline{AC}$$
$$\text{Aire}(D) = \overline{AB}\,\overline{AD}$$

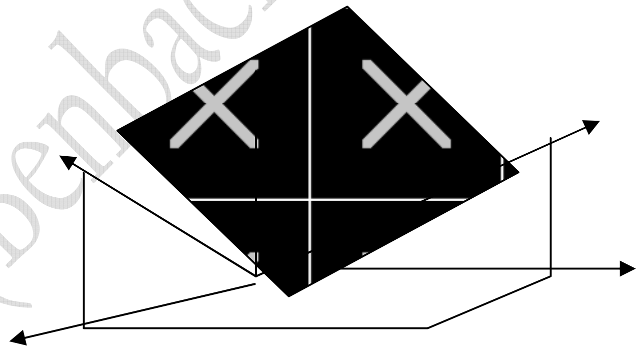
$\overline{AB} = \overline{AC}\cos(\alpha)$ tq: $\alpha = \arg(n, z)$

donc $\text{Aire}(T) = \dfrac{\overline{AB}}{\cos\alpha}.\overline{AD} = \dfrac{\text{Aire}(D)}{\cos(n,z)}$

même chose lorsque T est définie par z=by+c

2^{eme} cas

T_i définie par z=ax+by+c, (x,y) de D_i on se ramène a l'origine (c=0) figure 2



$\vec{A} = (\Delta x_i, 0, a\Delta x_i)$.

$\vec{B} = (0, \Delta y_i, b\Delta y_i)$.

par définition le produit vectoriel

de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de IR^3

est un vecteur perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$, et son longueur (en norme) est l'aire

du parallélogramme de coté $\vec{A}$ et $\vec{B}$ c'est à dire $\text{Aire}(T_i) = \left\| \vec{A} \wedge \vec{B} \right\|$, mais $\vec{A} \wedge$

$$\vec{B} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$=(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

$$= (-a\Delta x_i\Delta y_i, -b\Delta x_i\Delta y_i, \Delta x_i\Delta y_i) = \Delta x_i\Delta y_i\ (-a, -b, 1)$$
$$\Rightarrow \text{Aire}(T_i) = \Delta x_i\Delta y_i\ \sqrt{1 + a^2 + b^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

T_i=ax+by $\Leftrightarrow \Phi(x,y,z) = z - ax - by = 0$

et dont la normale supérieure est donnée par

$$n = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{(-a,-b,1)}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = (\cos(n,x),\cos(n,y),\cos(n,z))$$

c'est à dire $\cos(n,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$ ....(2)

d'après (1) et (2) on a $\text{Aire}(T_i) = \dfrac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos(n,z)}$

soit $F : \sum \longrightarrow IR$ une fonction réelle définie et continue sur $\sum$.

Considérons la somme $S = \sum_{i=1}^{N} F(p_i)\Delta s_i$ et $\delta = \max_{1\le i\le N} \Delta s_i$

Remarque

Si F est une densité de masse sur $\sum$, alors S représente une approximation de la masse totale de $\sum$.

Définition

On appelle intégrale de surface de la fonction F sur la surface $\sum$, la limite lorsqu'elle existe de S quand δ tend vers zéro, et on note

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\delta = \lim_{\delta\to 0} S = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{N} F(p_i)\Delta s_i$$

Proposition

Soit $\sum$ de IR^3 une surface de classe C^1, définie par le graphe d'une fonction $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ avec $D=\text{Proj}_{oxy} \sum$ est un domaine borné de IR^2, et $F : \sum \longrightarrow IR$ une fonction continue sur $\sum$ alors l'intégrale de surface de première espèce de F sur $\sum$ est donnée par

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Démonstration

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} F(p_i)\Delta s_i = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} F(x_i,y_i,f(x_i,y_i)\Delta T_i$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} F(x_i,y_i,f(x_i,y_i)\frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos(n,z)}$$

n est normale à T_i (qui n'est rien d'autre que la normale à s_i au point p_i).

Comme s_i est définie par $\phi = z - f(x,y) = 0 \quad \text{pour}(x,y) \text{ de} D_i$

alors

$$n = \pm\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} = \pm\left.\frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)}{\sqrt{\left(+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1\right)}}\right|_{p_i}$$

, le signe + pour la normale supérieure).C'est à dire $\cos(n,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(f_x^{/}\right)^2+\left(f_y^{/}\right)^2}}$

$\Rightarrow$

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} F(x_i,y_i,f(x_i,y_i))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}\,\Delta x_i\Delta y_i$$

$$= \iint_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Remarque

Si F est une densité superficielle de masse, alors l'intégrale $\iint\limits_{\Sigma} F d\sigma$ représente la masse totale de Σ .

Pour F=1, on obtient l'aire de Σ , c'est à dire

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy.$$

Propriétés

1) $\iint\limits_{\Sigma} (\alpha F_1 + \beta F_2) d\sigma = \alpha \iint\limits_{\Sigma} F_1 d\sigma + \beta \iint\limits_{\Sigma} F_2 d\sigma$,

$\forall \alpha, \beta \in IR, \forall F_1, F_2 \in C^0(\Sigma), \forall \Sigma$ de classe C^1

2)Si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ tel que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ n'est pas une surface

alors $\iint\limits_{\Sigma} F d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} F d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} F d\sigma$

L'intégrale de surface de première espèce ne dépend pas de l'orientation de Σ (c'est à dire du choix de la normale).

Exemples

1) Calculer l'aire de la sphère du centre (0,0,0) et de rayon $R \succ 0$. $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in IR^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

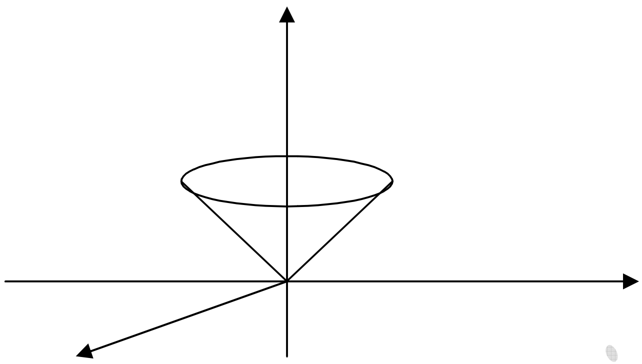
$\Sigma_1 : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $x^2 + y^2 \leq R^2$

$\Sigma_2 : z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $x^2 + y^2 \leq R^2$

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = 2\iint\limits_{\Sigma_1} d\sigma = 2 \iint\limits_{D(0,R)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = 2R \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R \int_0^{R} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 4\pi R^2$$

2) Calculer l'aire du cône $z = a\sqrt{x^2 + y^2} \qquad 0 \le z \le h$



$$\text{Aire}(\Sigma\ ) = \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{a^2x^2}{x^2+y^2} + \frac{a^2y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{h/a} \sqrt{1+a^2r^2}\,drd\theta = 2\pi \int_0^{h/a} \sqrt{1+a^2r^2}\,dr = \frac{\pi}{4}\left[\text{Argsh}(h) + h\sqrt{1+h^2}\right]$$

INTEGRALE DE SURFACE DU SECOND ESPECE

Soit $\sum$ de IR^3 une surface orientable bornée de classe C^1, et $\vec{F} : \sum \subset IR^3 \longrightarrow IR^3$ une fonction vectorielle définie et continue sur $\sum$, $\vec{F}$ =(P,Q,R). Si on choisit sur $\sum$, une normale $\vec{n}$ (c'est à dire une orientation de $\sum$) et on considère la fonction calaire $L : \sum \longrightarrow IR$ définie par

$L = \vec{F} . \vec{n} = Pn_1 + Qn_2 + IR\,n_3$.

ou $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\cos(n,x), \cos(n,y), \cos(n,z))$ est la normale choisie

(L est continue sur $\sum$), on a la définition suivante.

Définition

L'intégrale de surface de la seconde espèce de la fonction $\vec{F}$ sur la surface Σ est par définition l'intégrale de première espèce de L sur Σ $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$

Remarque

Dans les intégrales de surface de première espèce $d\sigma$ est toujours positive, c'est à dire que la formule est

$$\iint_{\Sigma} F d\sigma = \iint_{D} F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(f_x^{/}\right)^2 + \left(f_y^{/}\right)^2} \, |dxdy|$$

mais la valeur absolue de dxdy est enlevée car on intègre dans le sens croissant des variables x et y.

Proposition

Si Σ est définie par $\phi(x,y,z)=0$ et $\nabla\phi \neq 0$ sur Σ alors

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\Sigma} \vec{F} \, \vec{n} \, d\sigma = \pm \iint_{\Sigma} \frac{\vec{F} . \nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} d\sigma = \pm \iint_{\Sigma} \frac{P\phi_x^{/} + Q\phi_y^{/} + R\phi_z^{/}}{\sqrt{\phi_x^{/2} + \phi_y^{/2} + \phi_z^{/2}}} d\sigma$$

Exemple

Soit Σ définie par $x^2+y^2+z^2=1$

Calculer $\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$.

On a $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

$\vec{n} = \pm \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} = \pm \frac{2(x, y, z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,le signe + correspond à la face extérieure

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma = 2\iint\limits_{D} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\, dxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{rdrd\vartheta}{\sqrt{1-r^2}} = 4\pi$$

Proposition

Supposons que $\sum$ est univoque par rapport à z , $\sum$ définie par z=f(x,y) avec (x,y) de D, alors

$$\iint\limits_{\Sigma} Rdxdy = sign(\cos(n,z))\iint\limits_{D} R(x,y,f(x,y)dxdy \qquad \text{où} \quad D = proj_{oxy}\sum$$

on a de même lorsque $\sum$ est définie par y= g(x,z), (x, z) de $\text{proj}_{xoz}\sum$

$$\iint\limits_{\Sigma} Qdxdy = \text{sign}(\cos(n,y)) \iint\limits_{\text{proj}_{oxy}\Sigma} Q(x,g(x,y),z)dxdy$$

et lorsque $\sum$ est définie par x=h(y,z) de $\text{proj}_{yoz}\sum$

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz = \text{sign}(\cos(n,x) \iint\limits_{\text{proj}_{yoz}} P(h(y,z),y,z)dydz$$

Démonstration

$$\iint\limits_{\Sigma} Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} R\cos(n,z)d\sigma = \iint\limits_{D} R(x,y,f(x,y)\frac{\cos(n,z)}{|\cos(n,z)|}|dxdy|$$

$$= \iint\limits_{D} R(x,y,f(x,y))\sin g(\cos(n,z)|dxdy| = \sin g(\cos(n,z)\iint\limits_{D} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

car cos(n,z) ne change pas de signe sur la surface univoque par rapport à z. Même raisonnement pour les deux autres cas.

Exemple

$\sum \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$ face extérieure

$$I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy.$$

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma} xdydz = \iint\limits_{\Sigma_1} xdydz + \iint\limits_{\Sigma_2} xdydz$$

avec $\sum_1 : \quad x = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad , \quad y^2 + z^2 \leq 1$

$\sum_2 : \quad x = -\sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad , \quad y^2 + z^2 \leq 1$

sur $\sum_1 \quad 0 \leq \text{angle}(n, x) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos(n, x) \geq 0$

sur $\sum_2 \quad \frac{\pi}{2} \leq angle(n, x) \leq \pi \quad et \quad cos(n, x) \leq 0$

et par la suite on a

$$I_1 = \iint\limits_{y^2 + z^2 \leq 1} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz + \iint\limits_{y^2 + z^2 \leq 1} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, rdrd\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Sigma} ydxdz = \iint\limits_{\Sigma_3} ydxdz + \iint\limits_{\Sigma_4} ydxdz$$

avec $\sum_3 : \quad y = \sqrt{1 - x^2 - z^2} \quad , \quad x^2 + z^2 \leq 1$

$\sum_4 : \quad y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2} \quad , \quad x^2 + z^2 \leq 1$

$$I_2 = \iint\limits_{x^2 + z^2 \leq 1} \sqrt{1 - x^2 - z^2}\, dydz + \iint\limits_{x^2 + z^2 \leq 1} \sqrt{1 - x^2 - z^2}\, dydz$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, rdrd\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{\Sigma_5} zdxdy + \iint\limits_{\Sigma_6} zdxdy$$

avec $\sum_5 : \quad y = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 1$

$\sum_6 : \quad y = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 1$

$$I_3 = \iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy + \iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi$$

Propriétés

1) $\iint_{\Sigma}\alpha\omega_1 + \alpha\omega_2 = \alpha\iint_{\Sigma}\omega_1 + \beta\iint_{\Sigma}\omega_2$

avec $\omega_i = P_i dydz + Q_i dxdz + R_i dxdy \qquad i = 1,2$

4) Si $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ *et* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ n'est pas une surface

alors $\iint_{\Sigma}\omega = \iint_{\Sigma_1}\omega + \iint_{\Sigma_2}\omega$

5) L'intégrale du second espèce dépend de l'orientation de Σ et on a $\iint_{\Sigma}\vec{F}\,\vec{n}_1\,d\sigma = -\iint_{\Sigma}\vec{F}\,\vec{n}_2\,d\sigma$ avec $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les deux normales de Σ extérieure et intérieure.

FORMULE D'OSTROGRADESKI

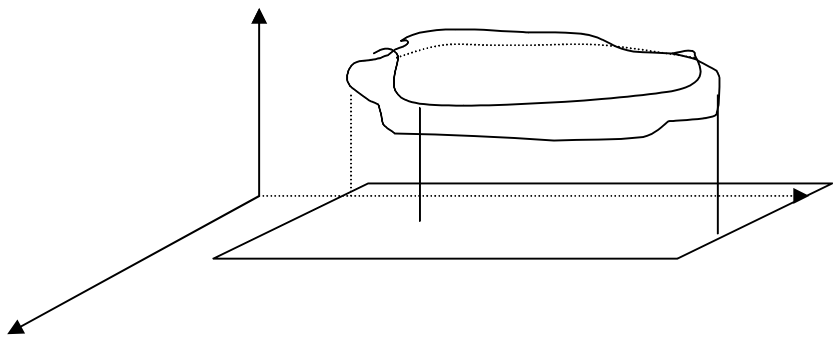
Soit V un domaine de IR^3 limité par une surface fermée Σ de classe C^1. Supposons que Σ est décomposable en deux sous-surfaces univoques par rapport à z $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ telles que

Σ_1 définie par $z=f_1(x,y)$, (x, y) appartient à D

Σ_2 définie par $z=f_2(x,y)$, (x, y) appartient à D

Soit $F : V \cup \Sigma \longrightarrow IR^3$ une fonction vectorielle de classe C^1.

F=(P,Q,R) telles que P,Q,R de classe $C^1(V \cup \Sigma)$



Définition

On appelle divergence de F la fonction scalaire

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Théorème

Si $\sum$ vérifie les mêmes propriétés par rapport à x et y que celle de z alors on a la formule suivante dite d'OSTROGRADESKI

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

ou sous la formule suivante

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{F}\,dv \qquad (\vec{n} \text{ est la normale sortante , } dv \text{ élement de volume})$$

Démonstration

$$\iiint_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy$$
$$= \iint_{D} (R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y)) dxdy$$

$$= \operatorname{sign}(\cos(n_2, z)) \iint_{proj_{xoy}\Sigma} R(x, y, f_2(x, y)dxdy + \operatorname{sign}(\cos(n_1, z)) \iint_{proj_{xoy}\Sigma} R(x, y, f_1(x, y)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma_1} Rdxdy + \iint_{\Sigma_2} Rdxdy = \iint_{\Sigma} Rdxdy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

de la même façon on montre que

$$\iiint_v \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{\Sigma} Qdxdz \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\iiint_v \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_{\Sigma} Pdydz \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (3)$$

(1),(2)et (3) découlent sur l'égalité $\iint_{\Sigma} \vec{F}\,\vec{n}\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv$

Exemple

Soit Σ définie par $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$I = \iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$$

$\Sigma = \partial(B(0,R)$ = Frontière de la boule de centre 0 et de rayon R

$$I = \iiint_{B(0,R)} (1+1+1)dxdydz = 3 \iiint_{B(0,R)} dxdydz = 3\text{volume}(B(0,R)) = 3\frac{4\pi}{3}R^3 = 4\pi R^3$$

Corollaire (formule d'intégration par partie dans IR^3)

Soit u,v:$V \cup \Sigma \longrightarrow$ R deux fonctions de classe C^1,On a alors les formules

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial x} vdxdydz = \iint_{\Sigma} uvn_1 d\sigma - \iiint_V u\frac{\partial v}{\partial x} dxdydz$$

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial y} vdxdydz = \iint_{\Sigma} uvn_2 d\sigma - \iiint_V u\frac{\partial v}{\partial y} dxdydz$$

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial z} vdxdydz = \iint_{\Sigma} uvn_3 d\sigma - \iiint_V u\frac{\partial v}{\partial z} dxdydz$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule d'OSTROGRADESKI au fonction

$\vec{F_1} = (uv, 0, 0)$, $\vec{F_2} = (0, uv, 0)$, $\vec{F_3} = (0, 0, uv)$, convenablement choisi avec $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

Corollaire

Soit $u : v \cup \Sigma \longrightarrow R$ une fonction de classe C^2 sur $v \cup \Sigma$ on a

$$\iiint_V \Delta u dxdydz = \iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

Ou bien $\displaystyle \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2} \right) dxdydz = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u}{\partial y} n_2 + \frac{\partial u}{\partial z} n_3 \right) d\sigma$

Démontration

Il suffit d'appliquer la formule d'OSTOGRADESKI à la fonction

$$\vec{F} = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Corollaire (calcul de volumes)

Soit $V \subset R^3$ un domaine borné limité par une surface Σ de classe C^1 alors le volume de V est donnée par

$$Vol(V) = \iiint_\Sigma z dxdy$$

Démonstration

$$\iiint_\Sigma z dxdy = \iiint_V div(0,0,z) dxdydz = \iiint_V dxdydz = Vol(V)$$

FORMULE DE STOKES

Soit Γ une courbe de R^3 de classe C^1 limitant une surface Σ

de classe C^1, et soit $F:\Sigma\cup\Gamma \longrightarrow R^3$ une fonction vectorielle de classe C1, F=(P,Q,R).

Définition (Rotationnel)

On apppelle rotationnel de la fonction vectorielle F, la fonction vectorielle Rot F définie par

$$\mathrm{RotF} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$$

Théorème

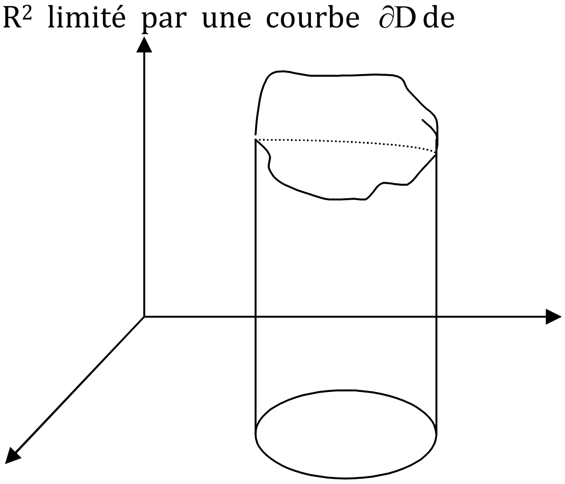
Si on choisit sur $\sum$ une normale et on oriente Γ positivement par rapport à rapport à la face choisie on a la formule suivante dite de STOKES

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

ou sous la forme $\int_{\Gamma} \mathrm{Fdl} = \iint_{\Sigma} \mathrm{RotF.n}\, d\sigma$

Démonstration

On démontre le théorème dans le cas ou la surface est univoque pour chacune des variables. à titre d'exemple $\sum$ est définie par le graphe d'une fonction $f: D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ ou D est le domaine de IR^2 limité par une courbe ∂D de classe C^1.



$\sum \; : z = f(x,y) \quad ,(x,y)\in D$

c'est à dire que si ∂D est définie par

alors Γ est définie par

$$\begin{cases} x = x(t = \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \\ t \in [a,b] \end{cases}$$

on a $I=\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx=\int_{a}^{b} P(x(t),y(t),f(x(t),y(t))x^{/}(t)dt$

posons $p_1(x,y)=p(x,y,f(x,y))$,

on a $\int_{\partial D} p_1(x,y)dx=\int_{a}^{b} p(x(t),y(t),f(x(t),y(t))x^{/}(t)dt=\int_{\Gamma} p(x,y,z)dx=I$

et d'après la formule de GREEN

$$I=\int_{\partial D} p_1 dx+0dy=-\iint_{D}\frac{\partial p_1}{\partial y}dxdy=-\iint_{D}(\frac{\partial p}{\partial y}(x,y,f(x,y))+\frac{\partial p}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y})dx$$

Σ étant définie par z-f(x,y)=0, la normale supérieure est donnée par

$$n=\frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}=\left(\cos(n,x),\cos(n,y),\cos(n,z)\right)$$

d'ou $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\cos(n,y)}{\cos(n,z)}$ ce qui implique

$$I=\iint_{D}\left(\frac{\partial p}{\partial z}(x,y,f(x,y))\cos(n,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y,f(x,y))\cos(n,z)\right)d\sigma \text{ car } d\sigma=\frac{dxdy}{\cos(n,z)}$$

donc $I_1=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z)\cos(n,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y,z)\cos(n,z)\right)d\sigma=\int_{\Gamma} p(x,y,z)dx$

de la même façon on montre que

$$I_2=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)\cos(n,z)-\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)\cos(n,x)\right)d\sigma=\int_{\Gamma} Q(x,y,z)dy$$

$$I_3=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)\cos(n,x)-\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)\cos(n,y)\right)d\sigma=\int_{\Gamma} R(x,y,z)dz$$

ceci achève la démonstration.

Exemple

Soit Γ l'intersection du cylindre $x^2+y^2=1$ et du plan z=x.

Calculer l'intégrale $\int_\Gamma - ydx + xdy + xydz$

on prend comme surface $\sum$ limitée par la courbe Γ la partie du plan z=x intérieure au cylindre $x^2+y^2=1$

$$\sum \ : z - x = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$
$$\Rightarrow n = \pm \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} = \pm \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$$

le signe + correspond à la normale supérieure.

INTEGRALES MULTIPLES

$I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$, Ω borné

Ω est régulier.

Ω borné $\Rightarrow$ on peut le délimiter par un rectangle . $\forall$ la droite il a l'axe y droit couper Ω en deux points. $\forall$ la droite il à l'axe des x doit couper Ω en deux points (au plus pour les deux cas).

Ω irrégulier.

$$I = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Exercice

Calculer

a) $\iint_\Omega |xy| dxdy$, $\Omega = \{(x,y) \in R^2 ; 4x^2 + y^2 = R^2\}$

$$I = \iint_{\Omega 1} |xy| dxdy + \iint_{\Omega 2} |xy| dxdy + \iint_{\Omega 3} |xy| dxdy + \iint_{\Omega 4} |xy| dxdy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$$

$$I_1 = \iint\limits_{\Omega 1} xydxdy$$

$$I_1 = \int_0^{R/2} dx \int\limits_0^{R\sqrt{1-\frac{4x2}{R2}}} xydy \quad (y_I = \sqrt{R^2 - 4x^2}$$

puisque $y > 0 \Rightarrow Dy = +\sqrt{R^2 - 4x^2}$

$$I_1 = \int\limits_0^{R/2} \left[\frac{xy^2}{2}\right]^{R\sqrt{1-\frac{4x^2}{R^2}}} dx = \frac{R4}{32}$$

$$I_2 = -\int\limits_{-R/2}^{0} dx(\int\limits_0^{R\sqrt{1-\frac{4x^2}{R^2}}} xydy) = -\frac{R^4}{32}$$

$$I_3 = -\int\limits_{-R/2}^{0} dx \int_{-R\sqrt{1-\frac{4x^2}{R^2}}}^{0} = -\frac{R^4}{32}$$

$$I_4 = -\int\limits_0^{R/2} dx \int\limits_{-R\sqrt{-1\frac{4x^2}{R^2}}}^{0} xydy) = \frac{R^4}{32}$$

Alors: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

$$b = \iint\limits_{\Omega} Cos(x^2 + y^2)dxdy \ ; \ \Omega = \{(x,y) \in R^2, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

Domaine irrégulier

$$I = \iint\limits_{\Omega} = \iint\limits_{\Omega 1} + \iint\limits_{\Omega 2} + \iint\limits_{\Omega 3} + \iint\limits_{\Omega 4}$$

On utilise les coordonnées polaires. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow r = 1$$
$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow r = 2$$

$$I_1 = \iint_{\Omega 1} \cos(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \cos r \;\; .rdr.d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta . \int_1^2 (\cos r^2)rdr$$

Remarque: Changement de variable.

$$f.. \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

$r \in [1,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$

$(r,\theta) \xrightarrow{f} (x,y)$

$f : R \times [0,2\pi] \longrightarrow R^2$

1) f est bijective

2) f $\in C^1$

3) $J \neq 0$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_0} f(r,\theta)|J|drd\theta$$

tq $\quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$

dans ce cas : J=r

I= $\iint_{\Omega_0} \cos r^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r\cos r^2 dr$

= $\int_0^{\pi/2}\int_1^2 + \int_{\pi/^2}^{\pi}\int_0^2 + \int_{\pi/^2}^{3\pi/^2}\int_0^2 + \int_{3\pi/^2}^{2\pi/^1}\int_1^2$

C) $\iint_{\Omega}(x+y)dxdy$ ou Ω domaine limité par :

$$x^2 + y^2 = x + y.$$

$$x^2 - x + y^2 - y = 0 \quad \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2} = rCos\theta \\ y - \dfrac{1}{2} = rSim\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = rCos\theta + \dfrac{1}{2} \\ y = rSim\theta + \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad |J| = 1$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{1/\sqrt{2}} [1 + r(\cos\theta + \sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{1/\sqrt{2}} r + r^2(\cos\theta + \sin\theta d) dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}(\cos\theta + \sin\theta)\ \right]_0^{1/\sqrt{2}} dr = \frac{\pi}{2}$$

d) $\iint_\Omega (x^2 + y^2) dxdy \qquad \Omega : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta$$
$$y = \frac{1}{2} + r\sin\theta \qquad |J| = r$$

$$I = \iint (r^2 \cos\theta^2 + \frac{1}{4} + r\cos\theta + r^2\sin^2\theta + \frac{1}{4} + r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\int_0^{1/\sqrt{2}} (r^3 + r_2 + r^2(\sin\theta + \cos\theta)) dr) d\theta . = \frac{3}{8}\pi$$

e) $\int_0^1 \int_0^1 xydxdy = \int_0^1 (\int_0^1 xydx) dy = 1/4$

f) $\int_1^2\int_1^2 y\ell^{xy}dxdy = \int_1^2\left[\ell^{xy}\right]_{x=1}^{x=2}dy = \frac{\ell^4}{2} - \frac{3}{2}\ell^2 + \ell$

INTEGRALES TRIPLES

$$I = \iiint_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{3^2}{c^2}}\,dxdydz$$

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in R^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \in 1\right\}$$

Coordonnées polaires dans R³ :

« Coordonnées sphériques »

$$\theta = \left(\overrightarrow{oP}, \overrightarrow{oM}\right), \varphi = \left(\vec{x}, \overrightarrow{oP}\right)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\varphi \in [0,2\pi[, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0,+\infty[$$

on pose : $\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta\cos\varphi \\ \dfrac{y}{b} = r\cos\theta\sin\varphi \\ \dfrac{z}{c} = r\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow |j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = abcr^2\cos\theta$$

$$[0,+\infty[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi[\to \Omega$$

$$(r,\theta,\varphi) \to (x(r,\theta,\varphi), y(r,\forall,\varphi), z(r,\forall,\varphi))$$

cette transformation est une :

*bijection, de C[1] , avec $\left|J\right| \neq 0 \quad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$I = \iiint_{\Omega 1} f(x(r,\theta,\varphi); y(r,\theta,\varphi); z(r,\theta,\varphi)\left|J\right|.drd\theta d\varphi$$

$$I = \iiint_{\Omega_1} \sqrt{1-r^2}\, abcr^2 Cos\theta ddr\theta d\varphi =$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\varphi \iint r^2\sqrt{1-r^2})_{\cos\theta}.drd\theta$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Cos\theta d\theta.\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= 4\pi abc.\frac{\pi^2}{16}$$

b) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz, \Omega$ limité par : $x^2+y^2-2z=0$ et $z=2$

$$x^2+y^2-2z=0 \Rightarrow, z = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

$$z=2$$

$$z = \frac{x^2+y^2}{2} \quad \forall (x,y) \in R^2$$

1) si $y=0 \rightarrow z = \frac{x^2}{2}$

2) si $x=0 \rightarrow z = \frac{y^2}{2}$

3) si $x \neq 0, y \neq 0$

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$$

Les coordonnées cylindriques :

$$x = rCos\varphi$$
$$y = rCos\varphi$$
$$z = z$$

$$\left|J\right| = \det(\begin{vmatrix} Cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & rCos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}) = r.$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz = \iiint_{\Omega_0} r^2 r dr d\varphi dz$$

$$z = \frac{r^2}{2} \to z = 2$$
$$r = 0 \to r = 2$$
$$\varphi = 0 \to \varphi = 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\int_0^2 (\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^3 dz) dr) d\varphi = \frac{16}{3}\pi$$

soit Ω partie bornée de R^3, volume Ω :

$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$, soit Ω la partie délimitée par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 - z \\ z = 0 \end{cases}$$

<u>Les cordonnées cylindriques</u>

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$; $\left|J\right| = r$

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r dr \int_{4-r^2}^{4} dz =$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = 1 \to r = 1$$

$x^2 + y^2 = 4 - z = 0 \quad r^2 = 4 - z = 0 \Rightarrow r = 2$

$r = 1 \rightarrow 2$

$z = 4 - r^2 \qquad z = 0 \rightarrow (4 - r^2)$

LES INTEGRALES CURVILIGNES

$$I = \int_c f(x, y)ds$$

$$J = \int f(x)dx$$

Pour: dx est une partie d'une droite.

Pour I : ds est une partie d'une courbe q.c.q

(c) peut être données de (3) façon.

(1) : (c) donnée sous forme explicite : y=f(x)

Dans ce cas : $ds = \sqrt{1 + f^{2'}(x)}dx$ (1)

(2) : (c) est donnée sous la forme paramétrique c-à-d,

$$(c): \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$$

Dans ce cas : $ds = \sqrt{x^{2'}(t) y^{2'}(t)}dt$ (2)

(3) (c) est donnée en coordonnées polaires c-à-d :

$r = r(\theta) \quad \theta \in I$

Dans ce cas on a : $ds = \sqrt{r^2(\theta) + r^{2'}(\theta)}d\theta$

Exercice :

1- Etablir les formules (1) et (2) et (3)

2- Etude des fonctions données en coordonnées polaires et en coordonnées paramétriques.

Exercice:

a) $\int_{c}(x^{4/3}+y^{4/3})ds$, (c) : $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

Si on prend y=f(x) on obtiendra une expression très compliquée.

$$(x^{1/3})^2+(y^{1/3})^2=(a^{1/3})^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=R^2$$

$$\begin{cases} x^{1/3}=x^{1/3}(t)=a^{1/3}Cos\ t \\ y^{1/3}=y^{1/3}(t)=a^{1/3}Sin\ t \end{cases}$$

$$(x^{1/3})^2+(y_{1/3})^2=(a^{1/3}\cos t)^2+(a^{1/3}\sin t)^2=a^{2/3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x(x)=aCos^3t \\ y=y(t)=aSin^3t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{\sin\ t}{\cos\ t}\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{\sin\ t}{\cos\ t}\xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{}+\infty$$

$$ds=(x^{2'}(t)+y^{2'}(t))dt$$

$$x'(t)=-3aCos^2t\bullet Sin\ t$$
$$y'(t)=3aSin^2t\bullet Cos\ t$$

$$\Rightarrow x^{2'}(t)+y^{2'}(t)=9a^2\cos^2t\ \sin^2t$$

$$\Rightarrow ds=3a|\cos t\ \sin t|dt$$

$$I=\int_{C}\left[(a\ \cos^3t)^{3/4}+(a\ \sin^3t)^{3/4}\right]3a\ \cos t\ \sin t\ dt \quad ; \quad car\ ds\succ 0$$

$$I=\int_0^{2\pi}(a^{4/3}\cos^4 t+a^{4/3}\sin^4 t)3a\ \cos t\ \sin t\ dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$I=3a\ a^{4/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\ \cos t\ dt$$

$$=a^{7/3}\Rightarrow I=4.a^{7/3}$$

b) $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds$

(c) Limitée par $r=a$, 4=0 , $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$$a.\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos(+\frac{\pi}{4})$$

$$(c)=[0A]+[\gamma]+[B0]$$

$$[0A]=\{(x,y)\in R^2\ /\ y=0 et x\in[0,a]\ \}$$

$$[\partial]=\left\{(r,\theta)\in R^*\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right],r=a\right\}$$

$$[0\beta]=\left\{(a,y)\in R^2\ /\ y=x\ \ et\ \ x\ \in\left[0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]\right\}$$

$$I=\int_{[0A]}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds+\int_{[\partial]}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds+\int_{[0\beta]}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds$$

Remarque

Pour les intégrales curvilignes du 1er espèce le sens du parcourt'n'est pas nécessaire, par contre pour le 2éme espèce le sens est très important

$Sur[0 \quad A]: \quad ds = dx$.

$sur[\partial]: \quad ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r^3(\varphi)}\ d\varphi$

$= \sqrt{a^2 + a^2}\ d\varphi = a\ d\varphi$

Sur[0 B]

$ds = \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\ dx = \sqrt{1 + 1^2}\ dx \Rightarrow ds = \sqrt{2}\ ds$

$$\int_{0A} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds = \int_0^a e^{\sqrt{x^2}}\ dx = \int_0^a e^x dx = e^a - 1$$

$$\int_{\partial} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds = \int_{\partial} e^{\sqrt{r^2(\varphi)}} a\ d\varphi = a\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{a^2}}\ d\varphi = ae^a \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi$$

$$= \frac{ae^a \pi}{4}$$

$$\int_{0\beta} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dS = \int_0^{a\frac{\sqrt{2}}{2}} \ell^{\sqrt{2x2}} \sqrt{2}\ dx = \int_0^{a\frac{\sqrt{2}}{2}} \ell^{x\sqrt{2}}.\sqrt{2}\ dx = \ell^a - 1$$

donc : $I = \ell^a - 1 + \dfrac{a\ell^a \pi}{4} + \ell^a - 1.$

C) $\int_c |y| ds$ ou © est lemniscate : $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

$x(t)= r \cos t$

$y(t)= r \sin t$

$x^2+y^2=r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=r^4$

$(x^2-y^2)=r^2(\cos^2 t-\sin^2 t)=r^2\cos 2t$

$\Rightarrow r^4 =a^2\, r^2 \cos 2\, t$

$\Rightarrow$ r² = a² cos 2 t $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$ds = \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)}dt$$

$$= \sqrt{a^2 \cos 2t + a.\frac{\sin^2 2t}{\cos 2t}}dt \Rightarrow ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}dt$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (r \sin t) a. \sqrt{\frac{1}{\cos 2t}} dt$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{ar \sin t}{\sqrt{\cos 2t}} dt = -a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Essai :

d) $\int_c xds$ ou c : partie de la spirale logarithmique $r\ell\varphi$.

$r = a\ell$ limité par le cercle de centre 0 et de rayon.

$$a. = ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi = \sqrt{a^2\ell^{2K\varphi} + a^2k^2\ell^{2K\varphi}}d\varphi$$

$$ds = a\ell^{k\varphi}\sqrt{1+K^2}d\varphi$$

x = r cos φ

$$\Rightarrow I = \int_c r \cos\varphi \; a\ell^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$= \int_c a\ell^{k\varphi} \cos\varphi \; a\ell^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1+K^2} \quad \int_0^{2\pi} \ell^{2K\varphi} \cos\varphi d\varphi$$

d) $I = \int_c x ds$

c : spirale logarithmique : $r(\varphi) = a\ell^{k\varphi} \quad \varphi \in \underset{k<0}{[0,+\infty[}$

limitée par cercle C(0,a) :

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

$$x = r\cos\varphi = a\ell^{k\varphi}\cos\varphi \Rightarrow r^2(\varphi) = (ak\ell^{k\varphi})^2$$

$$ds = a\ell^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

SERIES D'EXERCICES ET EPREUVES

Série d'exercice n°1

Exercice 1 :

Factoriser les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix},\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ c & a & 0 \\ b & c & a \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2 :

Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

En calculant d'abord Δ^2

Exercice 4

Résoudre et discuter sur IC le système

$$\begin{cases} x - ay + a^2 z = a \\ ax - a^2 y + az = 1 \\ ax + y - a^3 z = 1 \end{cases}$$

Epreuve de Rattrapage

Exercice N °1 :

Etudier la nature des séries suivantes

$$u_n = n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$$

$$w_n = \frac{\lambda^n}{\lambda^{2n} + \lambda^n + 1} \qquad ou \quad \lambda \geq 0$$

Exercice N °2 :

Soit la série de terme général $u_n = x(1-x)^n$.

Etudier convergence simple et uniforme.

Exercice N °3 :

Calculer cosinus et sinus transformation de Fourier de la fonction f(x) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & si \ x \geq 0 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

Exercice N °4 :

Résoudre moyennant la transformée de Laplace l'équation

$$x'' - x = e^t \ ; x(0) = x'(0) = 1$$

Epreuve de Synthèse

Exercice 1 (5pts)

Résoudre moyennant la transformée de Laplace :

Le système :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + y = 1; \quad x(0) = x'(0) = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :

On a moyennant la transformée de Laplace

$$\begin{cases} p^2 L(x) + L(y) = \dfrac{1}{p} \\ p^2 L(y) + L(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{1}{4}e^{-t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{1}{4}e^{-t} + 1 \end{cases}$$

Exercice N°2(8pts)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ positives continués sur l'intervalle $[-1 \;\; 1]$. On suppose que:

1) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = 1$

2) Et que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers zéro sur les intervalles $[-1,-C]$, $[C,+1]$ pour tout C positif.

Soit g une fonction continué sur l'intervalle $[-1 \;\; 1]$ montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} g(x) f_n(x)dx = g(0)$$

Solution :

La condition $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_{-1}^{1} f_n(x)dx = 1$ montre que $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_{-1}^{1} g(0)f_n(x)dx = g(0)$.

Pour obtenir $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_{-1}^{1} g(x)f_n(x)dx = g(0)$, il suffit donc de montrer que :

$\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_{-1}^{1}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx = 0$ .On décompose l'intervalle [-1, 1] en la réunion de trois sous intervalles disjoints [-1,-C], [-C,C] et [C,1]

La convergence uniforme de $(f_n(x))_n$ sur [-1, -C] entraîne celle de $[g(x)-g(0)]f_n(x)$,la fonction limite étant encore nulle,il en résulte que l'intégrale $\int_{-1}^{-C}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini ;de même pour $\int_{C}^{1}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx$.

Pour $\int_{-C}^{C}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx$ on choisit C de sorte que : $\forall x$, $x\in[-C, C], |g(x)-g(0)| \prec \varepsilon$ ce qui est possible en vertu de la continuité, on a alors : $\left|\int_{-C}^{C}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx\right| \le \varepsilon\left|\int_{-C}^{C} f_n(x)dx\right| \le \varepsilon\left|\int_{-1}^{1} f_n(x)dx\right|$

Car $(f_n(x))_n$ est positive, mais $\underset{n\to+\infty}{Lim}\int_{-1}^{1} f_n(x)dx = 1$

donc $\int_{-C}^{C}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

et par conséquence l'intégrale étudiée :

$\int_{-1}^{1}[g(x)-g(0)]f_n(x)dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Exercice N°3(7pts)

Soit la série de terme général $(-1)^n u_n(x)$.On suppose que sur l'intervalle A de IR, les conditions suivantes sont réalisées pour tout x et pour tout n

$u_n(x) \succ 0$, $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$, $u_n(x) \leq a_n$

la suite a_n tendant vers zéro.

Montrer que la série est uniformément convergente sur A.

Solution

La série considérée est alternée, car $\mathbf{u_n}$ est positive et l'on va utiliser les propriétés classiques de ces séries. Les conditions données assurent la convergence simple sur A. d'où la somme S(x).

On sait aussi majorer le reste : $|S(x)-S_n(x)| \leq u_{n+1}(x)$

On a donc uniformément sur A.

$|S(x)-S_n(x)| \leq a_n$ tend vers zéro, d'où la convergence uniforme.

Série numérique

Exercice 1 : (3points*5)

Déterminer la nature de :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{e^n},\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \sin^2(n)}{n},\qquad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n^2},$$

$$\sum_{n\geq 1}\left((a+\frac{1}{n}\right)^n, a\in IR$$

Exercice 2 : (5 points)

Soit u_n une série convergente à termes positifs

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente (ind : $\left(\frac{1}{n}-\sqrt{u_n}\right)^2 \geq 0$)

2) Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 1}(\log(1+u_n)$

Suites et Séries de fonctions

Exercice 1

Soit

$$f_n(x)=\frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2},\quad \text{sur IR} \qquad\qquad f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^{2n}},\quad \text{sur } [0,1]$$

$$f_n(x)=x^{2-\alpha}e^{-nx},\quad \text{sur IR}^+ \qquad\qquad f_n(x)=\begin{cases}(n-1)x & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 1-x & \text{si } \frac{1}{n}\prec x\le 1\end{cases}$$

1) Etudier la convergence simple et uniforme.

2) Pour le dernier exemple, comparer $\int \lim f_n(x)dx$ et $\lim \int f_n(x)dx$

Exercice 2

Soit $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Sinkx}{k^3}$

1) Etudier la CS et la CU.

2) Même chose $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k^2}$

Exercice 3

Etudier la convergence simple et uniforme de

$$1)\sum \frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\quad sur\ \ IR_*^+ \qquad\qquad 2)\sum \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}\quad sur\ \ IR$$

$$3)\sum \frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\quad sur\ \ IR_*^+$$

Séries de FOURIER

Exercice N°1

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[-\pi,0] \\ 2x & \text{si } x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Exercice N°2

1) Développer en série de Fourier en sinus dans l'intervalle $[0,\pi]$ la fonction $f(x)=1$

2) En déduire la somme $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice N°3

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ la fonction

$f(x)=x^2$

Exercice N°4

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ la fonction

$$f(x)=\begin{cases} -\left(\frac{\pi+x}{2}\right) & \text{si } x\in[-\pi,0[\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & \text{si } x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Exercice N°5

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ la fonction

$f(x)=\mathrm{Cos}(px)$ pour $x\in[-\pi,\pi]$, p un réel non entier .

Appliquer le résultat pour $x=\pi, x=0$

Transformation de FOURIER

Exercice N°1

Soit la fonction

$$A(x) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de A.

2) Déterminer la transformée de Fourier.

Exercice N°2

Soit la fonction (signal porte) notée π est définie par

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 \qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la transformée de Fourier.

Exercice N°3

On reprend la fonction A

$$A(x) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer la dérivée de A et exprimer $A^{/}$ à l'aide de la fonction π.

2) Appliquer à la relation obtenue l'opérateur de Fourier à A.

3) Vérifier que A= $\pi * \pi$.Retrouver le résultat de la question 2.

Exercice N°4

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos xt dt$ et on déduire la valeur de $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt$

Exercice N°5

Résoudre l'équation intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 & \text{si } \quad \alpha \succ 0 \end{cases}$$

dans la quelle f est la fonction inconnue.

Epreuve de Moyenne Durée n°3

Exercice N°1(7pts)

Calculer la transformée de Laplace pour les fonctions suivantes:

1) f(t)=1 (t positif) ,2) $g(t) = e^{-\alpha t}$

3) h(t)=sin(at) ,4) k(t)=cos(at)

Exercice N°2(5pts)

Résoudre moyennant la transformée de Laplace :

1) L'équation : $x' + x = 1 \quad avec \quad x(0) = 1$

2) Le système :

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} + 2x + \dfrac{dy}{dt} = 1; x(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0; y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice N°3(8pts)

Calculer le rayon de convergence de:

$$\sum \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^n \qquad \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

$$\sum Sin(nx) x^n \qquad \sum e^{-n} x^n$$

Rappels

On a : $\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{(p+a)} + \dfrac{C}{(p+b)}, Lf(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$

Epreuve de Moyenne Durée n°2

Exercice N°1

Soit la suite de fonction de terme générale $\mathbf{u_n = e^{-nx}, x \geq 0}$

1) Etudier convergence simple et uniforme.

2) Comparer $\int \lim f_n(x)dx$ et $\lim \int f_n(x)dx$

Exercice N°2

Etudier la convergence simple et uniforme ainsi que la dérivabilité de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ *sur* *IR*

Exercice N°3

Soit $f(x) = e^{-|x|}$

1) Déterminer la transformée de Fourier de f.

2) En déduire la valeur $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt$

Exercice N°4

Développer en série de Fourier en sinus la fonction

$f(x) = Cos(rx)$, *pour* $x \in [0, \pi]$ $\qquad r \in IN$