الدوال الاصلية (les fonctions primitives):

1. تعريف الدالة الاصلية لدالة على مجال
2. مجموع الدوال الاصلية لدالة
3. حساب الدوال الاصلية
4. التكامل المعتل

1. تعريف الدالة الاصلية :

تعريف:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$: $f: I \to \mathbb{R}$.

نسمي دالة اصلية للدالة f على مجال I كل دالة F قابلة لاشتقاق على I مشتقتها F' هي :

$$F: I \to \mathbb{R}$$
$$F'(x) = f'(x)\ \forall x \in I$$

مثال :

الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$F: x \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = x^3 - |x| - 3$$

هي دالة اصلية على $\mathbb{R}$ لدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$F': x \to \mathbb{R}$$
$$F'(x) = 3x^2 - x = f(x) \quad si\ x > 0$$
$$F'(x) = 3x^2 + x = f(x) \quad si\ x < 0$$

مجموعة الدوال الاصلية لدالة :

خواص :

اذا كان f دالة مستمرة على مجال I فان f تقبل دوال اصلية على المجال I.

اذا كان F دالة اصلية للدالة f على مجال I فان كل الدوال الاصلية للدالة f على المجال I تكتب من الشكل :

$$F: x \to I$$
$$F(x) + k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

مثال :

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f: x \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x - 3$$

كل دالة تاخذ الشكل :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 3(x) + \mathrm{k} \quad \mathrm{k} \in \mathbb{R}$$

تعبر دالة اصلية لدالة f

خاصية :

f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$: $f : I \to \mathbb{R}$. x_0 و α اعداد حقيقية من I

اذا تحقق الشرط : $F(x_0) = \alpha$

اذن توجد دالة اصلية وحيدة F لدالة f على المجال I

مثال :

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل :

$$f(x) = x - \sin x$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

الدالة الاصلية لدالة f :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + k$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$1 = \frac{\pi^2}{8} + k$$
$$k = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - cos\, x + 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

حساب الدوال الاصلية :

$f(x)$	$F(x)$	I
α (عدد حقيقي)	$\alpha x + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\mathbb{R} - \{0\}$

$\frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n+1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

المصدر : من تاليف الكاتب

2. الدوال الصلية و العمليات على الدوال :

$\boldsymbol{f}$	**Fonction primitive**	**Condition sur $\boldsymbol{u}$**
$\boldsymbol{u'u}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}u^2 + k}$	
$\boldsymbol{u'u^n\ (n \in \mathbb{N}^*)}$	$\boldsymbol{\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k}$	
$\boldsymbol{\frac{u'}{u^2}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{u} + k}$	$\boldsymbol{\forall x \in I\ u(x) \neq 0}$
$\boldsymbol{\frac{u'}{u^n}\ (n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq 2)}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k}$	$\boldsymbol{\forall x \in I\ u(x) \neq 0}$
$\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$	$\boldsymbol{2\sqrt{u} + k}$	$\boldsymbol{\forall x \in I\ u(x) > 0}$
$\boldsymbol{u'e^u}$	$\boldsymbol{e^u}$	
$\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$	$\boldsymbol{\ln u}$	$\boldsymbol{u \neq 0}$

امثلة :

3. حساب التكامل (les intégrales):

تعريف :

f دالة مستمرة على مجال $a, b. I$ عددين حقيقيان $(a,b) \in I$

يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ التكامل من a الى b للدالة f و نرمز له :

$$\int_a^b f(x)dx$$

نقرء التكامل من a الى b للدالة $f(x)$ تفاضل x

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3.1. خواص التكامل :

a. علاقة شال(relation de chasles) :

f دالة مستمرة على مجال $a, b, c. I$ اعداد حقيقية $(a, b, c) \in I$ ومنه :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\ &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a)\end{aligned}$$

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$$

اذن :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

مثال :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} \sqrt{(x^2-1)^2}\, dx &= \int_{-2}^{1} |x^2-1|\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\, dx + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

خاصية :

f دالة مستمرة على مجال $a, b.\ I$ اعداد حقيقية $(a, b) \in I\ et\ a \neq b$ ومنه :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

برهان :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

b. الخطية :

التطبيق : $\begin{cases} I \to R \\ f \to \int_a^b f(x)dx \end{cases}$ خطي معناه :

اذا كان الدالتين $g\ et\ f$ دالتين معرفتين على مجال I و k عدد حقيقي من اجل كل عددين حقيقين $(a\ et\ b) \in I$ لدينا :

$$\forall (f,g) \in I^2, \qquad \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\forall f \in I, \forall k \in R, \qquad \int_a^b (k)f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

c. المقارنة :

لتكن الدالتين f,g المعرفتين على المجال I $(f,g) \in I^2$

(a,b) اعداد حقيقية بحيث : $a < b$ اذن :

$$si\ \forall x \in [a,b];\ \ 0 \le f(x), alors\ 0 \le \int_a^b f(x)dx$$

$$si\ \forall x \in [a,b];\ \ g(x) \le f(x), alors\ \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

d. المقارنة و القيمة المطلقة (inégalité et valeur absolue) :

$$\forall f \in I, \qquad a < b\ ; \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

مبرهنة :

من خواص القيمة المطلقة لدينا :

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

بتطبيق خاصية المقارنة لدينا :

$$-\int_a^b |f(x)| \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b |f(x)|$$

اذن :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

e. بعض الخواص الاضافية :

f دالة مستمرة على مجال I .$-a, a$ اعداد حقيقية $(-a, a) \in I$ ومنه :

اذا كانت الدالة f زوجية اذن :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

برهان :

لبرهنة هذه الخاصية نستعمل خاصية مشتق الدالة الفردية هي دالة زوجية

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2[F(a) - F(0)]$$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= F(0) - F(-a) + F(a) + F(0) \\ &= -F(0) + F(a) + F(a) - F(0) \\ &= 2[F(a) - F(0)]\end{aligned}$$

مثال :

اذا كانت الدالة f فردية اذن :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

برهان :

لبرهنة هذه الخاصية نستعمل خاصية مشتق الدالة الزوجية هي دالة فردية

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= F(a) - F(-a) \\ &= F(a) - F(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

مثال :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos -\pi = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin^3 x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\ c'est\ une\ fonction\ paire$$

$$\sin^n x \begin{cases} si\ n = 2n & elle\ est\ paire \\ si\ n = 2n+1 & elle\ es\ impaire \end{cases}$$

3.2. القيمة المتوسطة (la valeur moyenne) :

القيمة المتوسطة لدالة على مجال :

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a;b]$. نرمزلها بالرمز μ هي العدد الحقيقي :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

حصر القيمة المتوسطة :

4. بعض طرق حساب التكامل :

4.1. المكاملة بالتجزئة (intégration par partie):

لتكن الدالتين $f\ et\ g$ دالتين قابلتين لاشتقاق على المجال I من ℝ بين ان :

$$\int f'(x).g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

لدينا :

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$\int [f(x).g(x)]'\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$
$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$
$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

مثال :

$$\int \ln(x+1)\,dx$$

نفرض ان :

$$u(x) = \ln(x+1) \qquad u'(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$V(x) = \int dx \qquad V(x) = x$$

$$\int f(x)\,dx = u(x).V(x) - \int u'(x)V(x)dx$$

$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$
$$= x\,ln(x+1) - \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= x\,ln(x+1) - \int dx + \int\left(\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + k$$

4.2.طريقة الاسهم :

هذه الطريقة تسمح لنا بحساب التكاملات لدوال من الشكل :

$$\int x^n \sin ax\,dx\ ;\ \int x^n \cos ax\,dx\ ;\ \int x^n e^{ax}\,dx\ ;\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx\ ;$$

$$\int e^{ax}\,cos(bx)\quad ;n\in\mathbb{N}^+;a,b\ \in\mathbb{R}$$

مثال :

$$\int x^2\cos 2x\,dx$$

$(x^2)^n$		$\int \cos 2x\,dx$
x^2	+	$\cos 2x$
$2x$	-	$\frac{1}{2}\sin 2x$
2	+	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
0		$\frac{1}{8}\sin 2x$

$$\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + k$$
$$= \left(x^2+\frac{1}{2}\right)\frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{2}cos\,2x + k$$

حالة خاصة :

حساب تكامل الدوال الدورية (Primitives des fonctions périodiques):

اذا كانت الدالة تاخذ شكل من الاشكال التالية :

$$\int \cos\beta x.e^{\alpha x}\,dx\quad ;\ \int \sin\beta x\,.e^{\alpha x}dx$$

الدالة الاصلية تحسب بالطريقة التالية :

$$I = \int \cos\beta x . e^{\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos\beta x . e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha}\sin\beta x . e^{\alpha x} - \int cos\,\beta x . e^{\alpha x}\, dx$$

$$I = \frac{1}{\alpha}\cos\beta x . e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha}\sin\beta x . e^{\alpha x} - I$$

$$2I = \frac{1}{\alpha} cos\,\beta x . e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha} sin\,\beta x . e^{\alpha x}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha} cos\,\beta x . e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha} sin\,\beta x . e^{\alpha x}\right]$$

مثال :

احسب التكامل اللمعرف ب :

$$I = \int \sin x . e^{x} dx$$

$$I = \int \sin x . e^{x} dx = \sin x . e^{x} - \cos x . e^{x} - \int sin\,x . e^{x} dx$$

$$I = \int sin\,x . e^{x} dx = sin\,x . e^{x} - cos\,x . e^{x} - I$$

$$2I = sin\,x . e^{x} - cos\,x . e^{x}$$

$$I = \frac{1}{2}[sin\,x . e^{x} - cos\,x . e^{x}]$$

4.3.المكاملة بالتعويض :

مثال :

$$\int \sqrt{x-5}\, dx$$

نفرض :

$$u = x - 5 \qquad du = dx$$
$$\int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$
$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$
$$\int \sqrt{x-5}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + k$$

مثال :

$$\int_1^e \frac{1}{1 + x\ln x} dx$$

نضع :

$$t = \ln x\,; \qquad dt = \frac{1}{x} dx$$
$$\ln 1 = 0$$
$$\ln e = 1$$
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$$

مثال :

$$\int \tan x\, dx$$

لدينا :

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

نضع :

$$\cos x = t; \qquad -\sin x\, dx = dt$$
$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{t} dt = -\ln t + k$$
$$\int \tan x\, dx = -\ln(\cos x) + k$$

4.4.حساب التكامل بطريقة التراجع (méthode par récurrence):

التكامل بطريقة التراجع هو التكامل الذي يكون بدلالة العدد الطبيعي n يعتمد على العلاقة التراجعية في تحديد العبارة الخاصة به.

مثال :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \quad ; \quad n \in N^*$$

$$\int_0^1 x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$I_n = -\frac{1}{e} + \frac{1}{n} I_{n-1} \Leftrightarrow I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{n+1} I_n$$

مثال :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \quad ; \quad n \in N^*$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n \left[\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx\right]$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n\right]$$

من اجل $n = 1$

$$I_1 = [Arctanx]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

5. تكامل وليس (intégrale de Wallis) :

تكامل وليس هو التكامل الذي ياحذ الشكل :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \; ; \; \forall n \in N$$

اذن :

$$W_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$W_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 x\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$W_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$W_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}dx=\left[\frac{-3\cos x}{4}+\frac{\cos 3x}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$W_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n x\,.\sin x\,dx$$

$$W_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx=[-\cos x\,.\sin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.sin^{n-1}x\,dx$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\sin^2 x]sin^{n-1}x\,dx=n\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-1}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n+1}x\,dx\right]$$

$$W_{n+1}=nW_{n-1}-nW_{n+1}\Leftrightarrow W_{n+1}=\frac{n}{n+1}W_{n-1}$$

.6 حساب تكامل الدوال الناطقة (intégrale des fonctions rationnelle) :

الدوال الناطقة هي الدوال التي تكتب من الشكل :

$$f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$$

بحيث الدالتين $N(x);D(x)$ هي عبارة عن دوال كثيرة حدود.

لحساب الدالة الاصلية هناك عدة حالات :

اذا كان $N(x)\geq D(x)$ نستعمل القسمة الاقليدية :

$$N(x)=Q(x).D(x)+R(x)$$

$$f(x)=\frac{Q(x).D(x)+R(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

مثال :

$$\int\frac{x^3-1}{x^2-1}dx=\int\left[x+\frac{x-1}{x^2-1}\right]dx=\int xdx+\int\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}x^2+\ln x+1+c$$

اذا كان $N(x)\leq D(x)$ نستعمل التحليل الى جداء عوال بسيطة :

a. التحليل الى جداء عوامل اساسية من النوع الاول (la décomposition en élément simple de première éspèce) :

$$\frac{a}{(x-x_0)}+\frac{b}{(x-x_0)^2}+\cdots\ldots\ldots\ldots..\frac{k}{(x-x_0)^n}$$

$$\frac{b_1x+c_1}{(x^2+\beta x+\gamma)}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots\ldots\ldots\ldots..\frac{b_nx+c_n}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

في هذه الحالة نبحث عن قيم المجهولة ل $(b_1,c_1,,,,,,b_n,c_n)$ et $(a,bc,,,,,,k)$ ثم نكامل بطرق التكامل المعروفة.

مثال :

$$\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}dx$$

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $a=2;b=-3$

$$\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$\int \left(\frac{2}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}\right)dx=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{-3}{(x+1)^2}dx$$

$$=2\ln x+1+\frac{3}{x+1}+c$$

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}dx=2\,ln\,x+1+\frac{3}{x+1}+c$$

مثال :

$$\int \frac{x^3+x^2-1}{(x^2-1)^2}dx$$

$$\frac{x^3+x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{ax+b}{x^2-1}+\frac{cx+d}{(x^2-1)^2}$$

بالمطابقة نجد $a=1; b=1; c=1; d=0$:

$$\frac{x^3+x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

$$\int \left(\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x}{(x^2-1)^2}\right)dx=\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx+\int \frac{x+1}{x^2-1}dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-1}dx=\int \frac{x}{x^2-1}dx+\int \frac{1}{x^2-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+arctangx+c$$

$$\int \frac{x^3+x^2-1}{(x^2-1)^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-1}\right]+\frac{1}{2}ln(x^2-1)+arctangx+c$$

حالة خاصة :

اذا كان المقام عبارة عن جداء عوال غير مكررة

مثال :

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

بالمطابقة نجد :

$$a=\frac{1}{3}; b=-\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx=\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}[\ln(x-1)-\ln(x+2)]=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}+c$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx=\frac{1}{3}ln\frac{x-1}{x+2}+c$$

b. قاعدة بيوش (la formule de bioche) :

تستعمل هذه القاعدة خاصة في الدوال المثلثية الكسرية :

$$f(x)=R(\sin x\,;\ \cos x)$$

$$\int f(x)=\int R(\sin x\,;\ \cos x)$$

واذا كانت الدالة القابلة لتكامل تحقق مايلي :

$$si\ f(-x)=f(x)\ on\ pose\ alors, t=\cos x$$
$$si\ f(\pi-x)=f(x)\ on\ pose\ alors, t=\sin x$$
$$si\ f(\pi+x)=f(x)\ on\ pose\ alors, t=\tan x$$

تذير ببعض خوا الدوال المثلثية :

$$\cos(-x)=\cos(x)\quad cos(\pi-x)=-cos(x)\quad cos(\pi+x)=-cos(x)$$
$$\sin(-x)=-\sin(x)\quad sin(\pi-x)=sin(x)\quad sin(\pi+x)=-sin(x)$$

مثال :

$$\int \frac{-\sin^3 x}{\cos x-\cos^2 x}dx$$

لدينا :

$$f(-x)=f(x)$$

اذن نضع : $t=\cos x \Leftrightarrow dt=-\sin x\, dx$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\int \frac{1-t^2}{t-t^2}dt=\int \frac{1}{t(1+t)}dt+\int \frac{-t}{1-t}dt$$

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{1+t}$$

بالمطابقة نجد : $a = 1; b = -1$

$$\int \frac{1}{t(1+t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln t + \ln(1+t)$$

$$\int \frac{-t}{1-t} dt = \int \frac{-t-1+1}{1-t} dt = \int dt - \int \frac{1}{1-t} dt$$
$$= t + \ln(1-t)$$
$$\int \frac{1-t^2}{t-t^2} dt = \ln t + \ln(1+t) + t + \ln(1-t) + \mathrm{c}$$

7. التكامل المعتل (intégrale impropre):

التكامل المعتل هو التكاملات التي تكون على الشكل $\int_a^b f(x)\,dx$ بحيث :

$$a = \infty \,; ou\ b = \infty$$
$$ou\ bien\ a = \infty \,; et\ b = \infty$$

أي أن أحد حدود التكامل أو الأثنين معاً لا نهائي ويسمى التكامل في هذه الحالة بالتكامل اللانهائي.

$$\int_{\infty}^{b} f(x)dx \,; \int_{a}^{\infty} f(x)dx \,; \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx$$

7.1. التكامل المتقارب (Intégrale Convergente):

اذا كان لدينا: $\lim_{\substack{a\to\infty \\ ou \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ موجودة و تساوي عدد حقيقي l في هذه الحالة نقول ان التكامل المعتل متقارب و منه :

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\infty}^{b} f(x)dx = l$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{a}^{\infty} f(x)dx = l$$

7.2. التكامل المتباعد (Intégrale divergente) :

اذا كان لدينا: $\lim_{\substack{a\to\infty \\ ou \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ غيرموجودة او تساوي ∞ في هذه الحالة نقول ان التكامل المعتل متباعد و منه :

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\infty}^{b} f(x)dx = \infty$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^{\infty} f(x)dx = \infty$$

مثال :

ادرس تقارب التكامل الاتي :

$$\int_{\infty}^{\pi}\cos x\, dx$$

$$\int_{\infty}^{\pi}\cos x\, dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^{\pi}\cos x\, dx = \lim_{a\to\infty}\sin x$$

نعلم ان الدالة $\sin x$ لا تقبل نهاية بجوار ∞ اذن التكامل متباعد.

مثال :

ادرس تقارب التكامل الاتي :

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

اذن التكامل متقارب .

8. دراسة طبيعة التكامل المعتل باسعمال بعض المعايير المرجعية المعروفة (la nature de l'intégeale impropre selon les critères) :

8.1.تكامل ريمان (intégrale de Riemann) :

تكامل ريمان هو التكامل الذي ياخذ الشكل :

$$I = \int_0^1\frac{1}{x^n}dx + \int_1^{\infty}\frac{1}{x^n}dx$$

8.1.1. تكامل ريمان من الدرجة الاولى : (intégrale de Riemann de première éspèce)

نضرية (Riemann):

تكامل الدالة f من الشكل : $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ يكون متقارب او متباعد حسب قيمة α

$$\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}dx : \begin{cases}\alpha < 1 : \text{التكامل متقارب} \\ \\ \alpha \geq 1 : \text{التكامل متباعد}\end{cases}$$

مثال :

$$\int_0^1\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = -1 + \lim_{t\to 0} -\frac{1}{t} = -\infty$$

8.1.2. تكامل ريمان من الدرجة الثانية : (intégrale de Riemann de seconde éspèce)

نضرية :

تكامل الدالة f من الشكل : $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx$ يكون متقارب او متباعد حسب قيمة n

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{b^{n-1}}\right)$$

$$\begin{cases} \int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{b^{n-1}}\right); \quad si\ \ n\le 1 \text{ التكامل متباعد} \\ \int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{b^{n-1}}\right) = \frac{1}{n-1}\ \ si\ n>1 \text{ التكامل متقارب} \end{cases}$$

اقتراح :

التكامل الذي يكون من الشكل :

$$\int_a^b \frac{1}{|x-b|^\alpha}dx$$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx\ ou \int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}dx$$

متقارب اذا و فقط اذا كان : $\alpha < 1$

مبرهنة :

لتكن الدالة f المعرفة و المستمرة على المجال $[a;[$ بالشكل :

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

اذا كان :

$$\alpha < 0\ ;\ \forall x \in [a;b]$$

اذن :

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt = \left[-\frac{1}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}\right]_a^x$$
$$= \frac{1}{\alpha-1}\left[(b-x)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right]$$

$$si\ \alpha<1 \Leftrightarrow \lim_{x\to b}\frac{1}{\alpha-1}\left[(b-x)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right] = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$si\ \alpha > 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to b} \frac{1}{\alpha - 1}[(b-x)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}]$$
$$= \lim_{x\to b}(b-x)^{1-\alpha}$$
$$= +\infty$$

$$si\ \alpha = 1 \Leftrightarrow \int_a^x \frac{1}{(b-t)} dt = [-\ln(b-t)]_a^x$$
$$= -\ln(b-x) + \ln(b-a)$$
$$= \lim_{x\to b} -ln(b-x) = +\infty$$

ومنه التكامل متقارب فقط في حالة $\alpha < 1$:

8.2. معيار المقارنة (critère de comparaison) :

قبل ان نتطرق الى نضرية المقارنة يجب ان نعرف قاعدة التزايد (la règle de vitesse)
فيما يخص تسارع بعض الدوال والتي نستطيع التعبير عنها بالمتراجحة التالية :

$$(\ln x)^\alpha \le x^\alpha \le e^{\alpha x} \le x^x$$

نضرية :

لتكن f و g دلتان معرفتان على مجال I من $\mathbb{R}$ اذا كان لدينا :

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

- اذا كان $\int_a^\infty g(x)\,dx$ متقارب اذن $\int_a^\infty f(x)\,dx$ كذلك متقارب .
- اذا كان $\int_a^\infty f(x)\,dx$ متباعد اذن $\int_a^\infty g(x)\,dx$ كذلك متباعد .

مثال :

هل التكامل التالي متقارب :

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+e^x} dx$$

نلاحض ان :

$$\frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{e^x}$$

بمان :

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{e^b} = \frac{1}{e}$$

اذن : التكامل

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+e^x} dx$$

متقارب.

مثال :

التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$ متقارب؟

لدينا : $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x}$

بما ان : $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$ متباعد

اذن : التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$ متباعد

مثال :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x + x^2}\, dx$$

$$x^2 \le x^2$$

$$x^2 \le x^2 + \ln x$$

$$\frac{1}{x^2 + \ln x} \le \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \ln x}\, dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \Rightarrow \alpha > 1$ التكامل متقارب

اذن :

التكامل : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\ln x}\, dx$ متقارب.

نتيجة :

التكامل الاسي الذي ياخذ الشكل : $\int_a^{\infty} e^{-\tau x}\, dx$ حيث τ عدد حقيقي.

اذن نقول ان التكامل يتقارب على حسب قيمة τ :

$\int_a^{\infty} e^{-\tau x}\, dx \,; si \; > 0$ متقارب

$\int_a^{\infty} e^{-\tau x}\, dx \,; si \; < 0$ متباعد

خاصية :

نقول عن التكامل $\int_a^{b} f(x)\, dx$ متقارب اذا كان كل من التكاملات : $\int_a^{c} f(x)\, dx$

و $\int_c^b f(x)\,dx$ متقاربة

نقول عن التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعد اذا كان احدى التكاملات : $\int_a^c f(x)\,dx$

او $\int_c^b f(x)\,dx$ متباعد .

مثال :

التكامل : $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$ متباعد لان التكامل : $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ متباعد

$$\int_0^t \sin x\,dx = -[\cos x]_0^t = -\lim_{t\to+\infty} \cos t + 1$$

مع العلم ان الدالة $\cos t$ لاتقبل نهاية بجوار الملانهاية .

8.3.معيار المقاربة (critère d'équivalence):

نضرية :

اذا كانت الدالة f ذات اشارة ثابت بالقرب من b $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ اذن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ و

$\int_a^b g(x)dx$ من نفس الطبيعة .

بانسبة لمعيار المقاربة يجب ان تكون :

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

تكافئ دالتين : (équivalence des fonctions usuelles)

لدينا الدالتين $f\ et\ g$ معرفتين على المجال $I \subset R$.

من اجل : $x_0 \in R$ نقول ان الدالتين متكافئتين بجوار x_0 اذا وفقط اذا كان :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

و نعبر عن ذلك ب : $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$

مثال :

ادرس تقارب التكامل التالي :

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx$$

مثال :

ادرس تقارب التكامل التالي :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - x + \sqrt{x} + 3}{x^3 - a^2 + 2x} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^3}\right) \left[\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{a^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}\right] dx$$

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \left[\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{a^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}\right] dx$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \sqrt{x} + 3}{x^3 - a^2 + 2x} \sim g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

اذن التكامل

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - x + \sqrt{x} + 3}{x^3 - a^2 + 2x} dx$$

متباعد.

8.4. معيار ابال (critère d'Abel) :

اذا كان التكامل المعتل من الشكل :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

بحيث الدالة f تحقق الشروط التالية :

- ان تكون اشارة الدالة f كيفية : اي مرة موجبة مرة سالبة على المجال $[a; +\infty[$
- يمكن تجزئتها الى دالتين : $g\ et\ h$ بحيث هاتين الدالتين مستمرتين على المجال $[a; +\infty[$

وتحققان الشروط التالية :

$$g(x) \geq 0$$
$$g(x) \searrow$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$
$$\left| \int_a^x h(x) dx \right| \leq M$$

اذا تحققت هذة الشروط نقول ان التكامل :

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

هو تكامل متقارب.

مثال :

ادرس تقارب التكامل التالي :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

نتاكد هل شروط Abel متحققة :

الدالة $\frac{\sin x}{x}$ دالة كيفية الاشارة على المجال $[1;+\infty[$

نضع : $g(x) = \frac{1}{x}$ و $h(x) = \sin x$

لدينا :

$$\frac{1}{x} \geq 0$$

$$\frac{1}{x} \searrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\left|\int_{1}^{+\infty} \sin x\,dx\right| \leq 1$$

اذن التكامل :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

هو تكامل متقارب .

9. تكامل فورير (intégrale de fourier) :