الدوال العددية : (les fonctions)

1. الدالة و مجموعة التعريف (domaine de définition)
2. النهاية و الاستمرارية (limite et continuité)
3. الاشتقاقية (la dérivabilité)
4. بعض النضريات شهيرة

1. الدالة ومجوعة التعريف :

تعريف:

اذا كانت D هي مجموعة تعريف الدالة f فان f ترفق بكل عدد حقيقي x من D نرمز له بالرمز $f(x)$.

ونقول ان $f(x)$ هي صورة x بالدالة f

مجموعة تريف الدالة f هي مجموعة الاعداد الحقيقية x التي يكون من اجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

a. العمليات الجبرية لدوال :

ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$ ، ولتكن ، $f: D_f \to \mathbb{R}$ و ، $g: D_g \to \mathbb{R}$ دالتين. نعرف مجموع ، f +

$g: D_{f\cap} \to \mathbb{R}$وجداء الدالتين ، $f.g: D_{f\cap g} \to \mathbb{R}$ وجداء دالة في عدد λ

، $\lambda.f: D_f \to \mathbb{R}$ و نسبة الدالتين $\frac{f}{g}: D_{f\cap g: g(x)\neq 0} \to \mathbb{R}$ (في حالة عدم انعدام g) بالعلاقات :

$$\forall x \in D_{f\cap g} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in D_{f\cap g} \quad (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\forall x \in D_{f\cap g} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad avec\ g(x) \neq 0$$

$$\forall x \in D_f \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\forall x \in D_f \quad (f+k)(x) = f(x) + k$$

b. تركيب الدوال (la décomposition des fonctions) :

تعريف :

f و g دلتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب بحيث :

$D_f\ ; D_g \subset \mathbb{R}$

من اجل كل عدد حقيقي x من D_f, $f(x)$ ينتمي الى D_g :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \in D_g$$

نعرف دالة التركيب f متبوعة بالدالة g الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ و المعرفة ***على*** D_f :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

مثال :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $D_f: [0; +\infty[$ و $D_g: [1; +\infty[$:

$$g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

عرف $f \circ g \ \ et \ g \circ f$

مجال تعريف الدالتين $f \circ g$ et $g \circ$

- لدينا :

$$\forall x \in D_g : [1 ; +\infty[\quad g(x) \geq 0 \ donc \ g(x) \in D_f$$

ومنه :

$$D_{f \circ g}: [1; +\infty[$$

- لدينا :

$$\forall x \in D_f : [0 ; +\infty[\quad f(x) \geq 1 \ donc \ f(x) \in \boldsymbol{D_g}$$

ومنه :

$$D_{g \circ f}: [0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= \sqrt{(2x^2+1)-1} \\ &= \sqrt{2x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] \\ &= 2\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

.2 الدالة الزوجية و الفردية (fonction paire et impaire):

ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ ، متناظرا بالنسبة لـ 0 ، $f: D \to \mathbb{R}$

نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان :

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

خاصية :

مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية

مبرهنة :

$$f'(-x_0) = \lim_{x\to -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0}$$
$$= -\lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= -f'(x_0)$$

نقول عن الدالة f إنها فردية إذا كان :

$$\forall x \in D \ \ f(-x) = -f(x)$$

خاصية :

مشتقة الدالة فردية هي دالة الزوجية

مبرهنة :

$$f'(-x_0) = \lim_{x\to -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0}$$
$$= \lim_{x\to -x_0} \frac{-f(x) + f(x_0)}{-x + x_0}$$
$$= \lim_{x\to -x_0} \frac{-[f(x) - f(x_0)]}{-[x - x_0]}$$
$$= f'(x_0)$$

امثلة :

الدلتان f و g المعرفتان على المجال $D_f \ et \ D_g$:

$f(x) = \cos x \quad g(x) = |x|$ دالتان زوجيتان

* الدالتان f و g المعرفتان على $D_f \ et \ D_g$:

$f(x) = \sin x \quad g(x) = x^3$ دالتان فرديتان

الدالتان f و g المعرفتان على $D_f \ et \ D_g$:

$$f(x) = \cos x + \sin x \quad g(x) = x + |x|$$

دالتان غير زوجيتين وغير فرديتين.

3. النهايات (les limites):

تعريف :

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة α. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة α إذا تحقق الشرط:

اي $\lim_{x\to\alpha} f(x) = c$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 > 0 : \forall x \in D_f \ |x - \alpha| < \alpha_0 \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

a. نظرية (وحدانية النهاية):

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة α. إذا قبلت الدالة f نهاية فهي وحيدة.

ملاحظة:

- نتحدث عن النهاية من اليمين إذا استبدلنا الكتابة $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ بالكتابة

$$\lim_{\substack{x>\alpha \\ x\to\alpha}} f(x)$$

أي أن x يقترب من α من جهة اليمين على المحور الحقيقي.

- ونتحدث عن النهاية من اليسار إذا استبدلنا الكتابة $\lim_{\substack{x>\alpha \\ x\to\alpha}} f(x)$ بالكتابة

$$\lim_{\substack{x<\alpha \\ x\to\alpha}} f(x)$$

أي أن x يقترب من α من جهة اليسار على المحور الحقيقي.

b. حالات عدم تعيين :

هناك في حساب النهايات حالات لا نتمكّن فيها من تحديد النهاية إلا بالمزيد من التحري كالحالات الموالية المسماة حالات عدن تعيين :

- حالة عدم تعيين من الشكل: 1^{∞}

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

يجب تحويلها الى دالة نسبية :

اذن :

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

بوضع:

$$X=\frac{1}{x};si\ x\to+\infty;alors\ X\to 0$$

$$\lim_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$$

$$\lim_{X\to 0}\left(\frac{ln(1+X)}{X}\right)=f'(0);avec\ f(x)=\ln(1+X)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$f'(0)=1$$

اذن: $\lim_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e$

- حالة عدم تعيين من الشكل: 1^{∞}

مثال :

احسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\sin x)^x$$

نضع : $y = (\sin x)^x$

$$\ln y = \ln(sin\, x)^x$$
$$\ln \mathrm{y} = \mathrm{x} \ln(\sin \mathrm{x})$$
$$\ln \mathrm{y} = \frac{\ln(\sin \mathrm{x})}{\frac{1}{\mathrm{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin \mathrm{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\cos x}{\sin x}$$

$$= -\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\mathrm{x}^2.\cos \mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x - x^2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\ln(\sin \mathrm{x})}{\frac{1}{\mathrm{x}}}$$

بمان : $\ln \mathrm{y} = \ln(\sin \mathrm{x})^{\mathrm{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 0$$

$$\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\sin x)^x$$

- حالة عدم تعيين من الشكل: $0.\pm\infty$
-

مثال :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

بوضع :

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} & x > 0 \\ t^2 = x \end{cases}$$

$$si\ x \to +\infty \quad alors\ t \to +\infty \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t^2}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\ln t}{t}=0, car,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{ln\, t}{t}=0$$

مثال :

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{-7}{2}}e^{\frac{1}{|x|}}$$

بوضع :

$$\begin{cases} t=\dfrac{1}{x} \qquad x>0 \end{cases}$$

$$si\ x\to 0^+ \quad alors\ t\to+\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac{-7}{2}}}e^t=\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{7}{2}}e^t=+\infty$$

- $\frac{\infty}{\infty}$

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}-\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}-\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$
$$=0$$

- $\frac{0}{0}$

مثال :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{3x-2x^4}-x\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\left(x\sqrt{3x-2x^4}-x\sqrt[5]{x}\right)'}{\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)'}=\frac{\left((3(x)^3-2x^6)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{6}{5}}\right)'}{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)'}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}(9x^2-12x^5)(3(x)^3-2x^6)^{-\frac{1}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}\right)}=\frac{\frac{-3}{2}-\frac{6}{5}}{-\frac{2}{3}}=\frac{81}{20}$$

مثال :

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+2}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})(\sqrt{2x+2}+2)}{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{2x+2}+2)(x+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-x)(\sqrt{2x+2}+2)}{(2x-2)(x+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}{2(x-1)(x+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(\sqrt{2x+2}+2)}{2(x+\sqrt{x})}=1$$

- $\infty-\infty$

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^3}{x-1}-x^2\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^3-x^3+x^2}{x-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$$

c. خاصية العدد المشتق :

احسب النهاية : $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$

$$\lim_{x\to0}\cos x=1$$

لازالة هذه حالة عدم التعيين نلجاء الى طريقة العدد المشتق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \cos x$

بمان الدالة الدالة f قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

اذن من تعريف العدد المشتق لدينا :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

4. نضرية اوبتال : (théorème de l'hopital-bernoulli)

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على مجال $I = [a; b]$ من $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

اذا كانت الدالتين : $h(x)\ et\ g(x)$ قابلتين لاشتقاق على المجال : $]a; b[$

لدينا : $\alpha \in [a; b]$ عدد حقيقي .

في حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ يمكن حساب النهاية بالطريقة التالية :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

مبرهنة :

$$\frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha}}{\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha}} = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) - h(\alpha)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) - g(\alpha)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} f(x)$$

$$h(\alpha) = 0\ ;\ g(\alpha) = 0$$

مثال :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1 - \cos x)}{x^2 + x^3};\quad \lim_{x\to 0} x^2 \ln x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1 - \cos x)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1 - cos\, x) + e^x(\sin x)}{2x + 3x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-cos\,x)+e^x(\sin x)}{2x+3x^2}$$
$$=\underset{x\to 0}{lim}\frac{e^x(1-cos\,x)+e^x(sin\,x)+e^x(sin\,x)+e^x\cos x}{2+6x}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-\cos x)}{x^2+x^3}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}[x^2]=0$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=0$$

4.1 نضرية اوبتال عند اللانهاية: (théorème de l'hopital-bernoulli)

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على مجال $I=[a;+\infty[$ من $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$$

اذا كانت الدالتين : $h(x)\ et\ g(x)$ قابلتين لاشتقاق على المجال : $]a;+\infty[$

في حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ يمكن حساب النهاية بالطريقة التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h'(x)}{g'(x)}\quad \forall x\in\,]a;+\infty[\ \ g'(x)\neq 0$$

مثال :

احسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2}$$

نلاحض ان الدالةf ليست من الشكل : $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

ولكن نستطيع تحويلها الى دالة نسبية.

اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=0$$

.5 نضرية الحصر : (théorème des gendarmes)

لتكن الدوال التالية f, g, h معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall x \in I \;\; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

لدينا :

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = l \;\; alors \;\; \lim_{x \to \alpha} g(x) = l$$

لتكن الدالتان f, g معرفتان على المجال I من $\mathbb{R}$ بحيث $]m; +\infty[$:

اذا كان : $g(x) \leq f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

اذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

اذا كان : $g(x) \leq f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

اذن : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

ملاحضة :

يمكن تطيق نص النضرية فيما يخص المتتاليات

يمكن تطيق نص النضرية فيما يخص $\pm\infty$ او عدد حقيقي.

6. المستقيم المقارب المائل :

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة :

$$y = ax + b$$

القول ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $\pm\infty$ يعني :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

a. البحث عن المستقيم المقارب المائل :

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة :

$$y = ax + b \;\; (a \neq 0)$$

نفرض ان :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; ; \;\; \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \; ;$$

$$ou \; bien$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

نفرض ان (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f)عند $+\infty$.

ومنه حسب التعريف :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

نضع :

$$g(x) = f(x) - (ax + b)$$

ومنه

$$f(x) = g(x) + (ax + b)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x) + (ax + b)}{x} = \frac{1}{x}g(x) + a + \frac{b}{x}$$

بما ان :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}g(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = a$$

كما لدينا ايضا :

$$f(x) - ax = g(x) + b\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax)] = b$$

نتيجة :

اذا كان المستقيم (Δ) ذو المعادلة :

$$y = ax + b\ (a \neq 0)$$

مستقيما مقاربا ل (C_f) عند $+\infty$.

فان : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a \quad et\ \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax)] = b$

7. الاستمرارية (la continuité):

تعريف :

f دلة مجموعة تعريفها D_f و α عدد حقيقي غير معزول من D_f :

القول ان الدالة f مستمرة عند α يعني ان نهاية الدالة f عند α هي $f(\alpha)$.

f مستمرة عند القيمة α يعني :

$$\lim_{x\to\alpha}(x) = f(\alpha)$$

ملاحضة :

إذا استبدلنا في التعريف السابق العلاقة :

$$\lim_{x\to\alpha}(x) = f(\alpha)$$

بالعلاقة:

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ >}} f(x) = f(\alpha)$$

نقول إن f مستمر من اليمين عند α.

وإذا استبدلنا تلك العلاقة بالعلاقة :

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ <}} f(x) = f(\alpha)$$

نقول إن f مستمر من اليسار عندα .

ملاحضة :

القول ان الدالة f مستمرة على مجال I يعني ان f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

خواص تقبل من دون برهان :

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .
- الدوال كثيرة حدود, $sin\ et\ cos$, مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود) مستمرة على مجال من مجموعة تعريفها.

مثال :

ادرس استمرارية الدالة g المعرفة كما يلي عند القيم المرفقة بها :

$$g(x)\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & si\ |x| < 1 \qquad : -1 < x < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1\ \ : 1 \leq x\ et\ x \leq\ -1 \end{cases}$$

الدالة g هي مركب دوال مرجعية مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن لكي تكون g مستمرة على $\mathbb{R}$

ندرس استمرارية g عند القيمة $x_0 = 1, \text{et}\ , x_0 = -1$, ومنه نقوم بحسساب النهاية عند هذه القيم.

دراسة الاستمرارية عند القيمة $x_0 = 1$:

لكي تكون g مستمرة عند القيمة 1 يجب ان تكون النهاية على يمين 1 تساوي النهاية على يسار 1في هاذي الحالة نقول g مستمرة عند القيمة 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq 1}} g(x)$$

اذنg مستمرة عند$x_0 = 1$

ومنه g مستمرة على $\mathbb{R}$

دراسة الاستمرارية عند القيمة $x_0 = -1$,

لكي تكون g مستمرة عند القيمة -1 يجب ان تكون النهاية على يمين -1 تساوي النهاية على يسار -1في هاذي الحالة نقول g مستمرة عند القيمة -1.

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} e^{\frac{1}{0^-}} = 0 = g(-1)$$

اذن g مستمرة عند $\boldsymbol{x_0 = 1}$

7.1.الامتداد بالستمرارية (prolongement par continuité):

لدينا $I \subset \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$ نقول ان الدالة f : $f: I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ امتداد بالستمراريةعند القيمة x_0 اذا قبلت الدالة f نهاية l عند القيمة x_0 :

$$f(x)\begin{cases} g(x) : \ \forall\, I - \{x_0\} \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

مثال :

$$f: x \to \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$D_f: \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

اذن :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \mathbb{R} - \{2\} \\ 4 & si\ x = 2 \end{cases}$$

8. الاشتقاقية (la dérivabilité):

تعريف :

نقول عن الدالة f انها تقبل الاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ اي $I \subset \mathbb{R}$ اذا وفقط اذا قبلت الاشتقاق عند جميع النقط من المجال I . و نقول اذا ان الدالة f تقبل الاشتقاق و نرمز لها بالرمز f' بحيث :

$$f': I \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)$$

كما نرمز لها ايضا :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

خواص تقبل دون برهان :

- كل دالة كثير حدود (fonction polynome) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- الدوال المثلثية (fonction trigonométrique) $\sin x$, $\cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

- الدالة قيمة مطلقة (fonction valeur absolue) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_-^*$; $\mathbb{R}_+^*$
- الدالة الجذرية (fonction racine carré) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$
- الدالة الناطقة (fonction rationnelle) قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

a. العدد المشتق (le nombre dérivé):

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$. $a\ et\ h+a$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$ $\big((a; a+h) \subset I\big)$

نقول ان f تقبل الاشتقاق عند a اذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h الى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $'(\ \ )$.

لدينا :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\boldsymbol{x = a + h}$$

ملاحظة :

اذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I $(\forall x \in I)$نقول انها تقبل الاشتقاق على I

و تسمى الدالة :

$f'\colon x \to f'(x)$ الدالة المشتقة لدالة f

تعريف :

لتكن الدالة $\boldsymbol{f}$ معرفة على مجال $\boldsymbol{I}$ و ليكن $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$ نقول ان الدالة $\boldsymbol{f}$ من الفئة $\boldsymbol{C^1}$ على مجال$\boldsymbol{I}$ ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{f \in C^1(I, R)}$ اذاكانت الدالة $\boldsymbol{f}$ قابلة للاشتقاق على مجال $\boldsymbol{I}$

ومشتقتها $\boldsymbol{f'}$ مستمرة على مجال $\boldsymbol{I}$

b. المشتقات المتتابعة (la dérivé nième):

تعريف :

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$

اذا قبلت الدالة f' الاشتقاق على المجال I فان دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية لدالة f و نرمز لها f''. اذا قبلت الدالة f'' الاشتقاق على المجال Iفان دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة لدالة f و نرمز لها f'''.

اذن :

$$f', f'', f''', \dots \dots \dots . . f^{(n)}$$

تسمى المشتقات المتتابعة لدالة f .

مشتقة الدالة f من الرتبة $n+1$ نرمز لها بالرمز :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \quad \forall n \in N$$

و نقبل ان : $f^{(0)} = f$

اذا كانت المشتقة من الرتبة n لدالة f مستمرة على المجال I نقول ان الدالة f من الفئة n

ونرمز لها بالرمز : $f \in (C^n; I)$

ملاحضة :

- اذا كانت الدالة f من الفئة C^0 معناه ان الدالة f مستمرة
- اذا كانت الدالة f من الفئة C^1 معناه ان الدالة f قابلة للاشتقاق و الدالة f' مستمرة

c. قاعدة ليبنيز (règle de liebniz) :

قاعدة ليببنيز تسمح لنا بحساب مشتقة جداء دالتين من الرتبة n وتتقارب عبارة ليبنيز الى عبارة نيوتن.

غالبا ما تستعمل عبارة ليبنيز في حساب المشتقات المتتابعة من الدرجة n لجداء دالتين بحيث تنعدم احدى الدالتين من اجل رتبة معينة.

اذا كانت الدالتين f, g معرفتين على مجال I و $x_0 \in I$

اذا قبلت الدالتين المشتقة من الرتبة n ل x_0

اذن: $(f.g)$ تقبل المشتقة من الرتبة n ل x_0 وتعطي بالعبارة التالية :

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

مع :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ادذا طبقنا هذه القاعدة على المشتقة من الرتبة 1لدالة $f.g$ نجد :

$$(f.g)^{(\prime)}(x_0) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{0} f^{(0)}(x_0) g^{(1-0)}(x_0)$$

$$(f.g)^{(\prime)}(x_0) = \binom{1}{0}f^{(0)}(x_0)g^{(1-0)}(x_0) + \binom{1}{1}f^{(1)}(x_0)g^{(1-1)}(x_0)$$
$$= f^{(\prime)}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{(\prime)}(x_0)$$

وهي نفس العبارة المشهورة التي نعرفها :

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

من اجل $p(n+1)$:

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left((f)^{(k)}(g)^{n+1-k}\right)$$

$$(f.g)^{(n+1)} = ((f.g)^n)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((f)^{(k)}(g)^{n-k}\right)'$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((f)^{(k)}(g)^{n-k}\right)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[(f^k)'.g^{n-k} + f^k.(g^{n-k})']$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[(f)^{k+1}.g^{n-k} + f^k.(g)^{n+1-k}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[(f)^{k+1}.g^{n-k}] + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^k.(g)^{n+1-k}]$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}[f^k.(g)^{n+1-k}] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^k.(g)^{n+1-k}] +$$

مثال :

احسب المشتقة من الدرجة n لدالة التالية :

$$f^n(x) = (x^2+1)e^{2x}$$

نلاحض ان f جداء دالتين قابلتين لاشتقاق من الدرجة n على مجال تعريفهما اذن :

f قابلة للاشتقاق من الرتبة n

بوضع : $h(x) = x^2 + 1 \quad et \quad g(x) = e^{2x}$

$$g(x) = e^{2x}$$
$$h(x) = x^2 + 1 \qquad g'(x) = 2e^{2x}$$
$$h'(x) = 2x \qquad g'' = 2.2e^{2x}$$
$$h'' = 2 \qquad g''' = 2.2.2e^{2x}$$
$$h''' = 0$$
$$\vdots$$
$$g^n = 2^n e^{2x}$$

نلاحض ان مشتقة الدالة h تنعدم من اجل الرتبة $n = 3$

اذن يمكن استعمال عبارة ليبنيز.

$$f^n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k g^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
f^n(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{0} h^0 g^n \\
&= \binom{n}{0} h^0 g^n + \binom{n}{1} h' g^{n-1} + \binom{n}{2} h'' g^{n-2} \\
&= (x^2+1)2^n e^{2x} + \frac{n!}{(n-1)!} 2x.\,2^{n-1}e^{2x} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} 2.\,2^{n-2}e^{2x} \\
&= (x^2+1)2^n e^{2x} + \frac{n.\,(n-1)!}{(n-1)!} x.\,2^n e^{2x} + \frac{n.\,(n-1).\,(n-2)!}{2!\,(n-2)!}.\,2^{n-1}e^{2x} \\
&= (x^2+1)2^n e^{2x} + nx.\,2^n e^{2x} + \frac{n.\,(n-1)}{4}.\,2^n e^{2x} \\
&= 2^n e^{2x}\left(x^2 + 1 + nx + \frac{n.\,(n-1)}{4}\right)
\end{aligned}$$

9. الاشتقاقية و الاستمرارية :

اذا قبلت الدالة f' الاشتقاق على المجال I فانها مستمرة على المجال I.

ملاحضة :

عكس هذه الخاصية ليس دائما محقق.

مثال :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f: x \to |x|$$

f مستمرة عند 0 ولكن غير قابلة لاشتقاق عند 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -\mathbf{1}$$

مثال :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f: x \to \sqrt{|x|}$$

f مستمرة عند 0 ولكن غير قابلة لاشتقاق عند 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{-x}}{x} = \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$$

تطبيق :

لدينا الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$$f(x): \begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

هل الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

احسب $f'(x) \quad / \ x \in \mathbb{R}$

هل $'(x) \quad / \ x \in \mathbb{R}$ مستمرة على $\mathbb{R}$

هل $\boldsymbol{f \in C^1(I, R)}$

الحل :

من اجل $x \neq 0$ الدالة $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة لاشتقاق لانها مركب دوال مرجعية قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ اذن $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

لكي تكون الدالة f قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ ندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0 = 0$:

نحسب نهاية النسبة :

$$\lim_{x_0\to 0} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} = \lim_{x_0\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x_0\to 0} xsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$-1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x \leq x\, sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

اذن الدالة f قابلة لاشتقاق عند القيمة $x_0 = 0$ و العدد المشتق هو 0

$$f'(x) = 0$$

حساب الدالة المشتقة :

$$f'(x):\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

لكي تكون الدالة f' مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب ان تكون مستمرة عند القيمة $x_0=0$:

الدالةf' مستمرة عند القيمة $x_0=0$ معناه نهايةf' عند $x_0=0$ موجودة اذن :

$$\lim_{x\to 0} 2x\,sin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}$$

$$-1\leq -cos\frac{1}{x}\leq 1$$

$$-2x\leq 2x\,sin\frac{1}{x}\leq 2x$$

$$-2x-1=h(x)\leq 2x\,sin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}\leq 2x+1=g(x)$$

$$\lim_{x\to 0}(2x+1)=1\neq \lim_{x\to 0}(-2x-1)=-1$$

اذن نهاية الدالة f'غير موجودة ومنه f' مستمرة على $\mathbb{R}^*$

ومنه ليستf من الفئة ^{1}

تطبيق :

اوجد المشتق من الدرجة n $f^n(x)$ لدوال التالية :

$$f(x)=xe^x$$

بين ان :

$$f^n(x)=ne^x+f(x)$$

الحل :

$$f(x)=xe^x$$
$$f'(x)=e^x+e^x+xe^x$$
$$f''(x)=e^x+e^x+xe^x$$
$$f'''(x)=e^x+e^x+e^x+xe^x$$
.
.
.
.
.
$$f^n(x)=ne^x+f(x)$$

لنبرهن ان $f^n(x)=ne^x+f(x)$صحيحة نستعمل البرهان بالتراجع :

من اجل $n=1$:

$$f'(\quad) = e^x + f(x)$$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n و نتحقق من صحتها من اجل $n+1$:

$$f^{n+1}(x) = (n+1)e^x + f(x)$$

$$f^{n+1}(x) = \left(ne^x + f(x)\right)' = ne^x + e^x + f(x) = (n+1)e^x + f(x)$$

a. القيم الحرجة (les points critiques) :

تعريف :

نقول عن القيمة c انها قيمة حرجة لدالة f اذا كانت تنتمي الى مجال تعريف الدالة f اي : $c \in D_f$ و كانت المشتقة عند القيمة c معدومة $f'(c) = 0$ او غير موجودة او كانت القيمة c طرفية اي :

$$\boldsymbol{f'(c) = 0}$$
$$\boldsymbol{ou}$$
$$\boldsymbol{f'(c) =} \text{غير موجودة}$$

مثال :

اوجد القيم الحرجة للدالة التالية :

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

الخطوة الاولى مجال تعريف الدالة $\boldsymbol{f}$ $\boldsymbol{D_f}$:

الدالة f معرفة على المجال : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

الخطوة الثانية حساب المشتقة $\boldsymbol{f'}$:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x-4)}{(x+2)^2}$$

لايجاد القيم الحرجة نقم بحل المعادلة : $f'(x) = 0$

$$\frac{2x(x-4)}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-4) = 0 & \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4 \end{cases} \\ (x+2)^2 = 0 & \Rightarrow \ x = -2 \end{cases}$$

نلاحض ان : $c_1 = 0 \in D_f \,; et \;\; c_2 = 4 \in D_f ;\; c_3 = -2 \notin D_f$

اذن مجموع القيم الحرجة :

$$\begin{pmatrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 4 \end{pmatrix}$$

مثال : 2

اوجد القيم الحرجة للدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

نلاحض ان مجال تعرف الدالة هو : $D_f = \mathbb{R}$

اذن نبحث عن المشتقة من الرتبة 1 :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 & \Rightarrow x = 0 \quad x > 1 \\ 2 \neq 0 & x < 1 \end{cases}$$

من اجل القيمة $]\!-\!\infty;1[$ $c_1 = 0 \notin$ اذن القيمة $c_1 = 0$ ليست قيمة حرجة

من اجل القيمة $]\!-\!\infty;1[$ $c_2 = 1 \in$ اذن لمعرفة هل القيمة $c_2 = 1$ قيمة حرجة نقوم بحساب العدد المشتق للقيمة $c_2 = 1$ اذا كان العدد المشتق موجود نقول عن القيمة انها ليست قيمة حرجة واذا كانت المشتقة غير موجودة فان القيمة هي قيمة حرجة

$$\begin{cases} f'(1)^+ = 2 \\ f'(1)^- = 2 \end{cases}$$

اذن العدد المشتق للدالة f عند القيمة $c_2 = 1$ موجود اذن الدالة لا تقبل قيم حرجة.

b. القيم الحدية المحليه (extremum local):

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$. و α عدد حقيقي من المجال I.

- القول ان $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية عضمى للدالة f يعني انه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I, $(I' \subset I)$ يشمل α بحيث من اجل كل x من المجال I', $[\forall x \in I']$:

$$f(x) \leq f(\alpha) = M$$

- القول ان $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني انه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I, $(I' \subset I)$ يشمل α بحيث من اجل كل x من المجال I', $[\forall x \in I']$:

$$f(\alpha) = m \leq f(x)$$

القول ان $f(\alpha)$قيمة حدية محلية ل f يعنى $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية عضمى او صغرى.

مستلزمة :

- f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$. α عدد حقيقي من I
- اذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند القيمة α مغيرة اشارتها اذن $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية
- اذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية (صغرى او كبرى) عند القيمة α فان: $f'(\alpha) = 0$
- العكس غير صحيح اي انعدام المشتقة لا يعني بضرورة وجود قيمة حدية محلية .

مثال :

$$f: x \to x^3$$
$$f': x \to 3x^2$$
$$f': 0 \to 0$$

نلاحض ان المشتقة تنعدم عند القيمة 0 ولكن القيمة 0 ليست قيمة حدية محلية.

نضرية :

اذا كانت الدالة f معرفة و قابلة لاشتقاق من الدرجة $n = 2$على مجال I من $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $f: I \to$.بحيث

$f'(\alpha) = 0$ اذن :

- اذا كان : $f''(\alpha) < 0$ اذن الدالة تقبل قيمة حدية محلية كبرى.
- اذا كان : $f''(\alpha) > 0$ اذن الدالة تقبل قيمة حدية محلية صغرى.

ملاحضة :

اذا كان لدينا : $f'(\alpha) = 0 \;\; et \; f''(\alpha) = 0$

لا يمكن استنتاج ان الدالة تقبل قيمة حدية محلية و لكن يمكن الجوء الى طرق اخرى.

c. البحث عن القيم الحدية :

ادا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و نريد معرفة القيم الحدية لدينا شرطين :

الشرط الاول (condition d'ordre 1) :

البحث عن القيم الحرجة اي :

$$f'(x) = 0$$

في هذه الحالة وجود القيم التي تعدم المشتق نقول عنها انها قيمة مرشحة $(points\ critiques)$

الشرط الثاني (condition d'ordre 2) :

- اذا كان : $f''(c) > 0$ اذن نقول عن القيمة c قيمة حدية صغرى .
- اذا كان : $f''(c) < 0$ اذن نقول عن القيمة c قيمة حدية كبرى.

تطبيق :

اوجد القيم الحدية ان امكن للدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

الخطوة الاولى :

البحث عن القيم الحرجة :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2-x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

القيم $(0;2)\in D_f$ اذن هي قيم حرجة للدالة f

الخطوة 2 :

$$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}-e^{-x}(2x-x^2)$$

بتعويض :

$$f''(0)=2>0 \ \Leftrightarrow 0\ est\ un\ min$$

$$f''(2)=-2e^{-2}<0 \ \Leftrightarrow 0\ est\ un\ max$$

الدوال العكسية (les fonctions inverses) :

d. نظرية القيم المتوسطة (théorème des valeurs intermédiaires):

لتكن الدالة f معرفة و مستمرة على مجال I .

لدينا $a\ et\ b$ عددين حقيقين من I $[(a;b)\in I]$

من اجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)\ et\ f(b)$, يوجد على الاقل عدد حقيقي c محصور بين $(a\ et\ b)$ $(a\le c\le b)$ بحيث : $f(c)=k$

e. نضرية رول (théorème de rolle):

f دالة معرفة على مجال $[a;b]$ من $\mathbb{R}$ $([a;b]\subset\mathbb{R})$: $f:[a;b]\to\mathbb{R}$.

تحقق الشروط التالية :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$.
- f قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$.
- $f(a)=f(b)$.

اذن يوجد على الاقل عدد حقيقي c ; $c\in\ ]a;b[$. بحيث :

$$c\in\ ]a;b[\ \Rightarrow\ f'(c)=0$$

برهان :

مثال :

ادرس وحدانية c في الحالة التالية :

$$f(x)=|x^2-3x| \qquad x\in[0;3]$$

الدالة f مستمرة وقابلة لاشتقاق على المجال $[0;3]$

$$f(0)=f(3)=0$$

اذن يمكننا تطبيق نضرية رول وعليه :

$$\exists c \in]0;3[\quad f'(c) = 0$$

$$f'(x) = -2x + 3$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow -2c + 3 = 0 \Leftrightarrow -2c = -3 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

بما ان : $c = \frac{2}{3} \in [0;3]$

وعليه اثبتنا وحدانية القيمة c

ملاحضة 1:

نضرية رول لا تثبت وحدانية القيمة c

مثال :

طبق نضرية رول على الدالة التالية :

$$f(x) = x(x^2 - 4) \qquad x \in [-2;2]$$

الدالة f مستمرة وقابلة لاشتقاق على المجال $[-2;2]$

$$f(-2) = f(2) = 0$$

اذن يمكننا تطبيق نضرية رول وعليه :

$$\exists c \in]-2;2[\quad f'(c) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3c^2 = 4 \Leftrightarrow c^2 = \frac{3}{4}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-2;2]$$

$$c_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \in [-2;2]$$

و عليه يوجد قيمتين ل c التي من اجلهما تنعدم المشتقة .

ملاحضة 2 :

شروط نضرية رول كافية وغير لازمة.

مثال :

الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^3 \qquad \forall x \in [-1;1]$$

نلاحظ ان الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]-1;\ 1[$

لدينا :

$$f'(0) = 0 \quad 0 \in [-1;1]$$

و لكن :

$$f(1) = 1 \neq f(-1) = -1$$

f. نضرية التزايدات المنتهية (théorème des accroissements finis) :

f دالة معرفة على مجال $[a\,;b]$ من $\mathbb{R}$ $\left([a\,;b] \subset \mathbb{R}\right)$: $f: [a;b] \to \mathbb{R}$

تحقق الشروط التالية :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$.
- f قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$.

اذن يوجد عدد حقيقي c ; $c \in\ ]a;b[$. بحيث :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

مبرهنة :

نعتبر الدالة $\varphi(x)$ المعرفة على المجال $[a;b]$ بالعلاقة :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x)$$

- φمستمرة على المجال $[a;b]$. لان مستمرة
- φ قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$. لان f مستمرة
- وتحقق الشرط :
- $$\varphi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a)=\frac{bf(a)-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$
$$\varphi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b)=\frac{bf(b)-af(b)-bf(b)+bf(b)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$
$$\varphi(a)=\varphi(b)$$
- اذن شروط رول محققة على الدالة φ ومنه :

$$\exists c \in\ ]a;b[\ :\ \varphi'(c) = 0$$

اذن :

$$\varphi'(x) = \left(f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x)\right)' = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x)\right)'$$
$$= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تطبيق :

ليكن : $(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}\ avec\ \alpha \neq 0$

f دالة معرفة على مجال $[a;b]$ كما يلي :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta$$

طبق نضرية التزايدات المنتهية على الدالة f

الحل :

الدالة f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن فها مستمرة على $[a;b]$

الدالة f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ اذن فها للاشتقاق على $[a;b]$

ومنه حسب نضرية التزايدات المنتهية :

$$\exists c \in]a;b[\ ;\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اذن المشتقة من الرتبة $n = 1$ لدالة هي :

$$f'(x) = 2\alpha x + \beta$$
$$f'(c) = 2\alpha c + \beta$$
$$f(b) = \alpha b^2 + \beta b + \delta$$
$$f(a) = \alpha a^2 + \beta a + \delta$$

$$2\alpha c + \beta = \frac{\alpha b^2 + \beta b + \delta - \alpha a^2 - \beta a - \delta}{b-a} = \frac{\alpha(b^2-a^2) + \beta(b-a)}{b-a}$$

$$= \alpha(b-a) + \beta$$

$$2\alpha c + \beta = \alpha(b-a) + \beta$$

$$c = \frac{b+a}{2}$$

g. متباينة التزيدات المنتهية (théorème inégalités des accroissements finis):

تعريف :

لتكن الدالة f قابلة لاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ اي $I \subset \mathbb{R}$ اذا وجد عددين حقيقين $(m,M) \in I$ بحيث :

$$m \leq f'(x) \leq M$$

اذن من اجل كل عددين حقيقيين $(a,b) \in I$ بحيث : $a < b$ اذن :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \quad \forall x \in]a;b[$$

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M \quad \forall x \in]a;b[$$

مثال :

نضرية :

f دالة معرفة على مجال $[a\,;b]$ من $\mathbb{R}$ $\left([a\,;b] \subset \mathbb{R}\right)$: $f: [a;b] \to \mathbb{R}$

تحقق الشروط التالية :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$.
- f *قابلة* الاشتقاق على المجال $]a;b[$.

اذا كان لدينا :

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a;b[$$

اذن نقول ان الدالة رتيبة على المجال $[a;b]$

h. نضرية داربو (théorème de darboux) :

- لدينا الدالة f المعرفة على المجال $I: [a;b]$
- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I: [a;b]$
- $f'(a) \neq f'(b)$
- $\lambda \in R$ عدد حقيقي محصور تماما بين : $f'(a) < \lambda < f'(b)$ او $f'(b) < \lambda < f'(a)$.
- اذن يوجد $c \in [a;b]$ بحيث $f'(c) = \lambda$

10. الدالة الجزء الصحيح (la fonction partie entière):

تسمى الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث :

$$\forall n \in \mathbb{Z};\ \forall x \in [n; n+1[\Leftrightarrow n \leq x < n+1$$
$$E(x) = n$$
$$\forall x \in \mathbb{R};\ E(x) \leq x < E(x) + 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(n+x) = E(x) + n$$

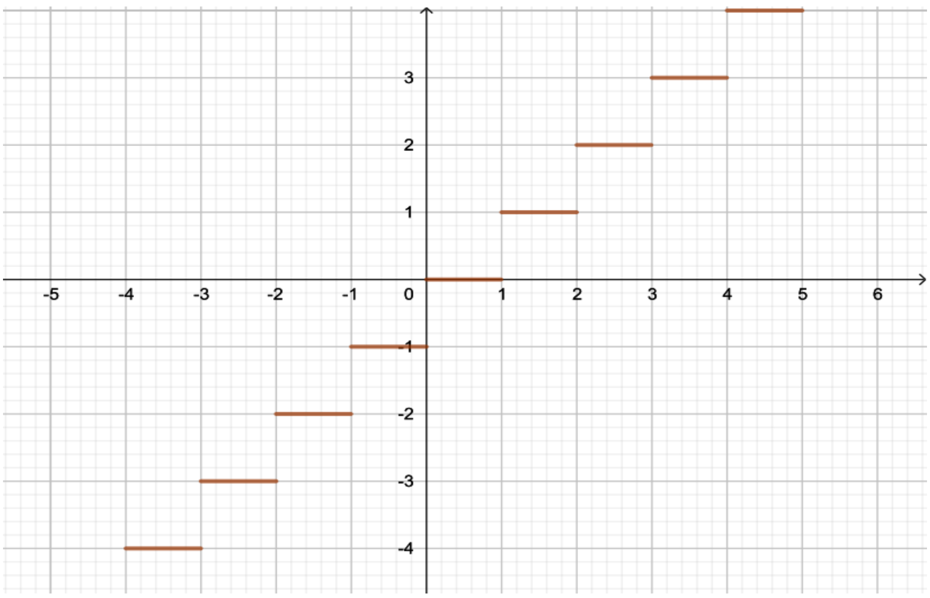
$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$
$$x \to E(x)$$

امثلة :

$$E(0{,}25) = 0: \qquad 0 \leq 0{,}25 < 1$$
$$E(-0{,}25) = -1: \quad -1 \leq -0{,}25 < 0$$
$$E(3{,}25) = 3: \qquad 3 \leq 3{,}25 < 4$$
$$E(-3{,}25) = -4: \quad -4 \leq -3{,}25 < -3$$
$$E(0) = 0: \qquad 0 \leq 0 < 1$$
$$E(-5) = -5: \quad -5 \leq -5 < -4$$

منحنى الدالة الجزء الصحيح (courbe représentative) :

$$\boldsymbol{f(x) = E[x]}$$



المصدر : من تاليف الكاتب يالاعتماد على Geogebra

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1; 2[$ ب :

$$f(x) = xE(x) + 1$$

عين عبارة $f(x)$ على المجلات التالية :

$$x \in [-1; 0[$$
$$x \in [0;\ 1[$$
$$x \in [1; 2[$$

ارسم منحنى الدالة $f(x)$

هل الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[-1; 2\ [$

الحل :

$$x \in [-1; 0[\quad E(x) = -1; \quad f(x) = -x + 1$$
$$x \in [0;\ 1[\quad E(x) = 0; \qquad f(x) = 1$$
$$x \in [1; 2[\quad E(x) = 1; \qquad f(x) = x + 1$$

لكي تكون الدالة مستمرة على المجال $]-1; 2[$ يجب ان تكون مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$

دراسة استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x <}} (-x + 1) = 1$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq}} (1) = 1$$

اذن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$

دراسة استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0 = 1$:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} (1) = 1$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} (x + 1) = 2$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} (1) = 1 \neq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} (x + 1) = 2$$

اذن الدالة f غير مستمرة عند القيمة $x_0 = 1$

نتيجة :

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة على المجال $]-1; 2[$