تمهيد:

الفصل الاول : المتتاليات العددية (les Suites)

1. الاعداد الحقيقية
2. تعريف المتتالية العددية
3. دراسة اتجاه تغير المتتاليات
4. البرهان بالتراجع
5. دراسة تقارب متتالية عددية

الهدف من هذا الدرس هو البرهان على ان مجموعة ما.

1. الاعداد الحقيقية :

1.1.المجموعة المرتبة في R:

لتكن E مجموعة .

العلاقة $\Re$ على المجوعة E هي المجموعة الجزئية من R بحيث :

$$E \times E :\ (x, y) \in (E \times E)$$

نقول ان هناك العلاقة بين x, y ونرمز لها : $x\Re y$

نقول عن $\Re$ انها علاقة ترتيبية اذا كانت **:**

- $\Re$ انعكاسية (réflexive) اي $x \le x\ ;\ \forall x \in E$
- $\Re$ ضد متناضرة (antisymétrique) اي $(x \le y\ et\ y \le x) \to x = y\ ;\ \forall x, y \in E$
- $\Re$ متعدية (transitive) اي $(x \le y\ et\ y \le z) \to x \le z\ ;\ \forall x, y, z \in E$

نقول عن E إنها مرتبة كليا اذا كان :

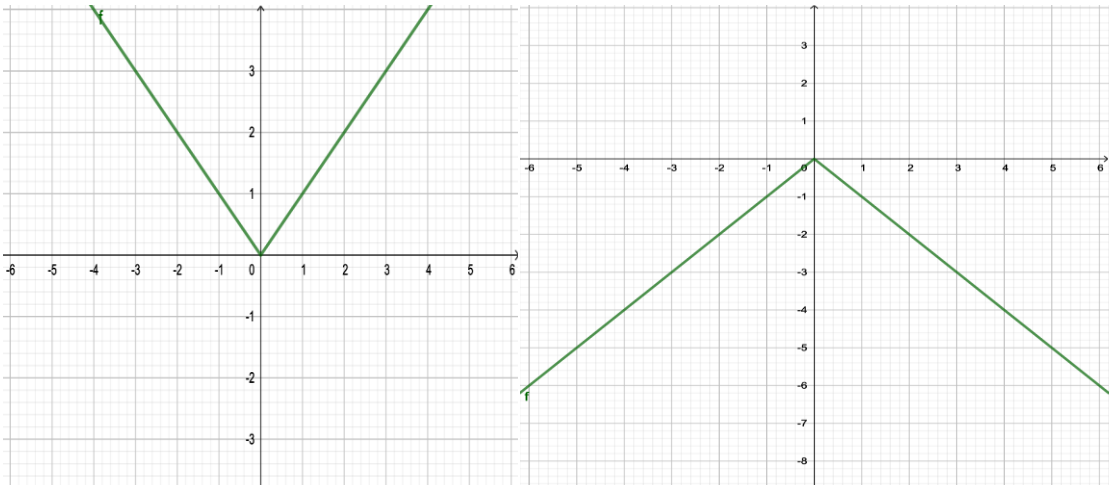
$$(x \le y\ ou\ \ y \le x)\ ;\ \forall x, y \in E$$

1.2.القيمة المطلقة (valeur absolue) :

من اجل كل عدد حقيقي x القيمة المطلق لx هي :

$$|\boldsymbol{x}|: \begin{cases} \boldsymbol{x}: \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} : \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \end{cases}$$

منحنى دالة القيمة المطلقة $|x|$; $-|x|$:



المصدر :من تاليف الكاتب بالعتماد على Geogebra

بعض الخواص :

$$\begin{cases} \forall x \in R;\ |x| \geq 0: |-x| = |x| \\ \forall x \in R;\ \sqrt{x^2} = |x| \\ \forall x \in R;\ |x.y| = |x|.|y| \\ \forall x \in R;\ |x+y| \leq |x| + |y| \end{cases}$$

2. عنصر حاد من الأعلى، حاد من الأدنى، الحد الأعلى، الحد الأدنى، القيمة العظمى، القيمة الصغرى.

تعريف :

- ليكن A جزءا من مجموعة مرتبة E $(A \subset E)$ بعلاقة ترتيب نرمز إليها بـ " $\leq$ " .

نقول عن A إنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر α من Eبحيث :

$$\forall x \in A, \quad x \leq \alpha$$

إذا كانت A محدودة من الأعلى وكان العنصر الحاد من الأعلى α ينتمي إلى A $(\alpha \in E)$فإننا نسمي α قيمة عظمى لـ A ، أي أن عنصرا α يمثل القيمة العظمى لـ A إذا حقق :

$$\alpha \in A, \forall x \in A, x \leq \alpha$$

نرمز إلى القيمة العظمى لـ A بـ $max\ A$ نقول إن لـ A حدا أعلى إذا قبلت مجموعة الحواد العليا قيمة صغرى، وتسمى هذه القيمة (عند وجودها) الحد الأعلى لـ A ،ونرمز إليه بـ supA .

ملاحظة :

جميع العناصر التي تكون اكبر من اة تساوي الحد الاعلى تسمى الحواد العليا (les majorants) M_0

اي الحد الاعلى هو اصغر عناصر الحواد العليا.

$$Sup\ A = \alpha : \begin{cases} \alpha\ est\ un\ majorant\ de\ A \\ \alpha\ est\ le\ plud\ petit\ des\ majorants \end{cases}$$

$$Sup\ A = \alpha : \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall M_0 \in R, (\forall x \in A, x \leq M_0\ ) \Rightarrow \alpha \leq M_0 \end{cases}$$

2.1.الحواد العليا و الحواد الصغري (les majorants, les minorants) :

تعريف :

A مجموعة جزئية من R ليست خالية نقول ان $M_0,$ حواد عليا اذا كانت :

$$A \neq \emptyset;\ \forall x \in A:\ \ x \leq M_0$$

A مجموعة جزئية من R ليست خالية نقول ان $m_0,$ حواد صغرى اذا كانت :

$$A \neq \emptyset;\ \forall x \in A:\ \ m_0 \leq x$$

مثال :

$$A:]-1; 1[$$

الحواد العليا :

$$M_0: [1;\ +\infty[$$

الحواد الدنيا :

$$m_0:]-\infty; -1\ ]$$

2.2.الحد الاعلى الحد لادني (borne supérieure , borne inférieure) :

نضرية :

كل مجموعة جزئية E من R $(E \subset R)$ ليست تشكل مجموعة خالية $E \neq \emptyset$ و محدودة من الاعلى فهي تقبل عنصر حاد من الاعلى $SupE$

حالة خاصة :

هذه النضرية لا يمكن تعميمها على جميع المجموعات فمثلا المجموعة $\mathbb{Q}$ اذا اخذنا مجموعة جزئية من الهذه المجوعة وغير خالية و محدودة من الاعلى وهناك احتمال عدم وجود حد اعلى ومثال على ذلك المجموعة :

$$A:\{x \in \mathbb{Q}: x^2 \leq 2\}$$

نقول عن A إنها محدودة من الأدنى إذا وجد عنصر β من E بحيث :

$$\forall x \in \ A, \qquad \beta \leq x$$

إذا كانت A محدودة من الأدنى وكان العنصر الحاد من الأدنى β ينتمي إلى A فإننا نسمي β قيمة صغرى لـ A ،أي أن عنصرا β يمثل القيمة الصغرى لـ A إذا حقق :

$$\beta \in A, \forall x \in A, \qquad \beta \leq x$$

نرمز إلى القيمة الصغرى لـ A بـ $minA$ نقول إن لـ A حدا أدنى إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا قيمة عظمى، وتسمى هذه القيمة (عند وجودها) الحد الأدنى لـ A ،ونرمز إليه بـ $infA$

نضرية :

كل مجموعة جزئية E من R $(E \subset R)$ ليست تشكل مجموعة خالية $E \neq \emptyset$ و محدودة من الاسفل فهي تقبل عنصر حاد من لادنى $infE$

ملاحضة :

جميع العناصر التي تكون اصغر من اة تساوي الحد الادنى تسمى الحواد الدنيا (les minorants) m_0

اي الحد الادنى هو اكبر عناصر الحواد الدنيا.

$$inf\ A = \beta: \begin{cases} \beta\ est\ un\ minorant\ de\ A \\ \alpha\ est\ le\ plud\ grand\ des\ minorants \end{cases}$$

$$inf\ A = \alpha: \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \\ \forall m_0 \in R, (\forall x \in A, m_0 \leq\ x) \Rightarrow m_0 \leq \beta \end{cases}$$

ملاحظة :

يمكن ألا يكون الحد الأعلى موجودا وكذلك الحال فيما يخص الحد الأدنى والقيمة العظمى والقيمة الصغرى. لكن عند وجود أي من هذه القيم فستكون وحيدة .الأمر ليس كذلك فيما يخص الحواد العليا والحواد الدنيا .

مستلزمة :

$$si\ max\ (A): \text{موجود} \Rightarrow sup(A): \text{موجود} \Rightarrow max(A) = sup(A)$$

$$si\ min\ (A): \text{موجود} \Rightarrow inf(A): \text{موجود} \Rightarrow min(A) = inf(A)$$

أمثلة :

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ محدودة من الأدنى بـ العدد 0 .

ولدينا $min\mathbb{N} = inf\mathbb{N} = 0$ ،لكنها ليست محدودة من الأعلى.

- مجموعة الأعداد الصحيحة ليست محدودة من الأدنى وليست محدودة من الأعلى.
- إذا اعتبرنا المجال $[1, \mathbf{3}]$ من$\mathbb{R}$ ، فإننا نلاحظ أن :

$$.max[-1{,}5] = sup[-1{,}5\ ] = 5\ ;\ \ min[-1{,}5]\ =\ inf\ [-1{,}5)]\ =\ -1$$

- إذا اعتبرنا المجال $]-1{,}5\ ]$ من $\mathbb{R}$، فإننا نلاحظ أن :

$$\mathrm{inf}]-1\ {,}5\ ] = -1\ ;\ \mathrm{max}]-1{,}5]\ =\ sup]-1,5\ ] = 5$$

$min\ ]-1{,}5]$ غير موجود

بعض الخواص :

$$sup(A\cup B) = max[sup(A); sup(B)]$$

$$inf(A\cup B) = min[inf(A); inf(B)]$$

$$sup(A+B) = sup(A) + sup(B)$$

$$sup(-A) = -inf(A)$$

$$\boldsymbol{sup(A\cap B) = max[sup(A); sup(B)]}$$

$$\boldsymbol{inf(A\cap B) = min[inf(A); inf(B)]}$$

تطبيق :

عين ان امكن : (sup , min , inf , max, les majorants et les minorants)

$$A{:}\left\{\sqrt{x(1-x)}\right\}\quad B{:}\{x\in R;\ \ x^2\le 4\}\quad C{:}\left\{\frac{1}{n^2}+1; n\in N^*\right\}$$

الحل :

$$A{:}\left\{\sqrt{x(1-x)}\right\}$$

لدينا :

$$x(1-x) \Leftrightarrow x\ge 0\ et\ 1-x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\in[0;1]$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'	+	0	-
f	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘ 0

من جدول تغيرات الدالة f نلاحض ان المجموعة $0 \leq A \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

اذن :

$$\boldsymbol{A \neq \emptyset \ car \ f(0) = 0}$$

$$sup\ (A) = max(A) = \frac{1}{2}$$

$$inf(A) = min(A) = 0$$

المجموعة : $\boldsymbol{B: \{x \in R;\ \ x^2 \leq 4\}}$

بمان :

$$x \in R\ ;\ \ x^2 \leq 4$$
$$x \in R;\ \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$$
$$x \in R; -2 \leq x \leq 2$$

$$\boldsymbol{B \neq \emptyset \ car \ 1 \in [-2; 2]}$$

$$sup\ (B) = max(B) = 2$$

$$inf(B) = min(B) = -2$$

المجموعة : $\boldsymbol{C: \left\{\frac{1}{n^2} + 1; n \in N^*\right\}}$

لدينا :

$$\begin{cases} n^2 \geq 1 \\ 0 < \dfrac{1}{n^2} \leq 1 \\ 1 < \dfrac{1}{n^2} + 1 \leq 2 \end{cases}$$

اذن :

$$\boldsymbol{C \neq \emptyset \ car \ u_1 = 2}$$

$$sup\ (C) = max(C) = 2$$

$$inf(C) \neq min(C) = 1$$

3. تعريف المتتالية العددية : (Suite Réelle)

متتالية عددية حقيقية uهي عبارة عن دالة ترفق بكل عدد طبيعي n , اكبر من او يساوي عدد طبيعي n_0 معطى .

نرمز لمتتالية عادة بالرمز $(U_n)_{n \geq n_0}$ او اختصارا ب (U_n) اذا كانت مجموعة تعريفها واضحة .

3.1. دراسة اتجاه تغير متتالية عددية: (sens de variation d’une suite réelle)

1.1. متتالية متزايدة : (suite croissante)

تكون متتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة او (متزايدة تماما) اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 اي $(n \geq n_0)$:

$$(U_n \leq U_{n+1}) \bigvee (U_n < U_{n+1})$$

نظرية : (théorèmes)

اذا كان : $U_n = f(n)$ و كانت الدالة المرفقة f متزايدة على المجال $[n_0; +\infty[$ في هاذه الحالة نستطيع القول بان المتتالية U_n المعرفة بالحد الاول n_0 متزايدة.

$$(\boldsymbol{U_n \leq U_{n+1}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{U_n} \nearrow$$

ملاحظة1 :

لدراسة اتجاه تغير المتتالية العددية U_n ندرس اشارة الفرق $(\boldsymbol{U_{n+1} - U_n})$ ونقارنه بالنسبة لصفر :

$$\boldsymbol{0 \leq (U_{n+1} - U_n)}$$

او ندرس قسمة $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ و نقارنه بالنسبة لواحد :

$$\boldsymbol{1 \leq \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \ / \ U_n > 0}$$

ملاحظة2 :

الامر مختلف في حالة متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

تطبيق :

بين انه من اجل كل : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

لدينا المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}^*})$ معرفة كما يلي :

$$U_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \frac{1}{n(n+1)}$$

ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}^*})$.

الحل :

$$U_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots \ldots\ldots\ldots.\ldots.. \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$U_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

اذن العبارة المختصرة لمتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}^*})$:

$$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

لدراسة اتجاه تغير المتتالية نقوم بدراسة اشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{-n-1+n+2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

اذن المتتالية متزايدة.

مثال2 :

لتكن المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}})$ معرفة كما يلي :

$$U_n = 2^{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

في هذه الحالة لدراسة اتجاه تغير المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}})$ نلاحض ان جميع حدود المتتالية موجبة $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n > 0$ وعليه نقارن نسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالنسبة ل1

اذن :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2 > 1$$

ومنه المتتالية متزايدة

3.2. متتالية متناقصة :(suites décroissante)

تكون متتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة او (متناقصة تماما) اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 اي $(n \geq n_0)$:

$$\boxed{(U_n \geq U_{n+1}) \bigvee (U_n > U_{n+1})}$$

نظرية : (théorèmes)

اذا كان : $U_n = f(n)$ و كانت الدالة المرفقة f متناقصة على المجال $]n_0; +\infty[$ في هاذه الحالة نستطيع القول بان المتتالية U_n المعرفة بالحد الاول n_0 متناقصة.

$$\boxed{(\boldsymbol{U_{n+1} \leq U_n}) \Leftrightarrow \boldsymbol{U_n} \searrow}$$

ملاحظة1 :

لدراسة اتجاه تغير المتتالية العددية U_n ندرس اشارة الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ ونقارنه بالنسبة لصفر :

$$\boxed{(U_{n+1} - U_n) \leq 0}$$

او ندرس قسمة $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ و نقارنه بالنسبة لواحد :

$$\boxed{\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \leq 1 \ \ / \ \ U_n > 0}$$

ملاحظة2 :

الامر مختلف في حالة متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

مثال*1* :

$$U_n = -2^n$$

$$U_{n+1} - U_n = -2^{n+1} + 2^n = 2^n(1-2) = -2^n$$

$$-2^n < 0 \ \Leftrightarrow U_n \searrow$$

مثال*2* :

$$U_n = 1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \cdots \ldots \ldots . \frac{1}{n^3} \quad \forall n \geq 1$$

$$U_{n+1} - U_n =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \cdots \ldots \ldots . - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \cdots \ldots \ldots . - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{(n+1)^3} < 0 \ \Leftrightarrow U_n \searrow$$

.3.3 متتالية **ثابتة :(suites constante)**

تكون متتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 اي $(n \geq n_0)$:

$$\boxed{(\boldsymbol{U_n = U_{n+1}})}$$

ملاحظة 3 :

بعض المتتاليات لا هي متزايدة و لاهية متناقصة

مثال 4 :

$$U_n = (-1)^n 2^n$$

$$U_0 = 1;\ \ U_1 = -2;\ U_2 = 4;\ U_3 = -8;\ U_4 = 16\ ;\ U_5 = -32;$$

4. البرهان بالتراجع :(démonstration par récurrence)

$p(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n

n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $p(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 $n_0 \leq n$,

يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من اجل n_0 اي $p(n_0)$.(الخاصية الابتدائية propriété initiale)
2. نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0

اي $p(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من اجل $n+1$ اي $p(n+1)$.

(الخاصية الوراثية : propriété héréditaire).

ملاحظة :

التأكد من صحة الخاصية من اجل n_0 ضروري لانه يمكن ان تكون خاصية وراثية دون ان تكون صحيحة .

مثال :

الخاصية 3^n مضاعف للعدد 5 خاصية خاطئة بالرغم من انها وراثية.

برهان :

نلاحظ انه اذا فرضنا ان الخاصية $p(n)$ صحيحة اي :

$$3^n = 5.k$$

ونتأكد من صحتها من اجل $p(n+1)$:

اذن :

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= \quad 5.k \\ 3.3^n &= 5.3.k \\ &= 5.K \end{aligned}$$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $p(n+1)$.

ولكن اذا طبقنا الخاصية الابتدائية ابي من اجل $p(0)$ فان :

$$3^0 = \quad 5.k$$
$$1 \neq 5.k$$

اذن الخاصية ليست صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n.

نتيجة :

3^n ليس من مضاعفات العدد 5

مثال :

بين بالتراجع ان :

$$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \quad ; \; \forall n \geq 2$$

من اجل : $p(2)$

$$p(2): \ln 2 \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}69 \leq 1$$
$$p(2): vraie$$

فرضية التراجع :

نفرض ان : $p(n): ln(n) \leq ln(n-1) + \frac{1}{n-1}$ صحيحية

نتحقق من صحتها من اجل : $p(n+1)$

اذن :

$$p(n+1): \ln(1+n) \leq \ln n + \frac{1}{n}$$

لدينا :

$$\ln(n+1) \leq n$$

اذن :

$$\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) \leq \frac{1}{n} \;\; \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \;\; \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

نتيجة :

$$p(n+1): \ln(1+n) \leq \ln n + \frac{1}{n}$$

$p(n+1)$ صحيحة

وعلية نعمم النتيجة

$$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \quad ; \ \forall n \geq 2$$

متباينة برنولي (Bernoulli) :

بين ان :

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

نثبت صحة الخاصية من اجل : $p(0)$

$$p(0): 1 \leq 1$$

اذن : $p(0)$ صحيحة

فرضية التراجع :

نفرض ان :

$$p(n): 1 + nx \leq (1+x)^n$$

صحيحة ونتأكد من صحة الخاصية: $p(n+1)$

$$p(n+1): 1 + (n+1)x \leq (1+x)^{n+1}$$

$$1 + (n+1)x \leq (1+x)^n(1+x)$$

لدينا :

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

$$(1+nx).(1+x) \leq (1+x)(1+x)^n$$

$$x(1+n) + 1 + nx^2 \leq (1+x)(1+x)^n$$

$$0 \leq nx^2 \ \Leftrightarrow \ x(1+n) + 1 \leq x(1+n) + 1 + nx^2$$

اذن :

$$x(1+n) + 1 \leq x(1+n) + 1 + nx^2 \leq (1+x)(1+x)^n$$

نتيجة :

متباينة برنولي محققة من اجل كل عدد طبيعي **n**

تطبيق :

p دالة كثيرة حدود معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

تحقق من اجل كل عدد حقيقي x :

$$p(x+1) - p(x) = x^2$$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in \mathbb{N}$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$$

الحل :

$$\forall x \in \mathbb{R}: p(x+1) - p(x)$$
$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1) - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right]$$

لدينا : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p(n) \in \mathbb{N}$$

نتحقق من صحة الخاصية من اجل $n = 0$:

$$p(0) = \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(0) = 0$$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n = 0$.

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل الرتبة n اي: $p(n) \in \mathbb{N}$

ونتحقق من صحتها من اجل $p(n+1)$

لدينا ايضا $p(n+1) = p(n) + n^2$:

بما ان $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^2 \in \mathbb{N}$

و لدينا من جهة اخرى $p(n) \in \mathbb{N}$ اذن :

$$(p(n) + n^2) \in \mathbb{N} \Rightarrow p(n+1) \in \mathbb{N}$$

نتيجة :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \boldsymbol{p(n)} \in \mathbb{N}$$

4. تقارب متتالية عددية : (convergence d'une suite réelle)

a. نهاية متتالية عددية: (limite d'une suite)

تعريف :

(U_n) متتاليه عددية و l عدد حقيقي.

نقول ان المتتالية (U_n) تقبل l كنهاية اذا وفقط اذا كان من اجل كل مجال مفتوح يشمل l يشمل ايضا كل حدود المتتالية (U_n) ابتداءا من رتبة معينة و نكتب :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \quad ou\ bien\ ;\ \lim_{n\to-\infty} U_n = l$$

ملاحظة :

- لا يمكن حساب نهاية المتتالية (U_n) الا عند $+\infty$.
- اذا وجد العدد الحقيقي l كنهاية للمتتالية (U_n)بجوار $+\infty$ نقول ان المتتالية (U_n) متقاربة

ملاحظة :

اذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بالشكل $U_n = f(n)$ بحيث f دالة معرفة على المجال $[\beta;\ +\infty[$

حيث β عدد حقيقي اذن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\ ;\ alors\ \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

مثال :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بالعلاقة التالية :

$$U_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

هل المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة؟

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \underset{n\to+\infty}{lim} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}}$$

نضع $_{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \underset{x\to 0}{lim} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = g'(0) : avec\ g(x) = \sqrt{1+x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$g'(0) = \frac{1}{2}$$

وعليه :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

اذن المتتالية متقاربة نحو القيمة $\frac{1}{2}$

ملاحظة :

- العكس غير صحيح

مثال :

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x\cos(2\pi x)}{x+1}$$

الدالة المرفقة بالمتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$(U_n)=\frac{n}{n+1}$$

$$(U_n)=f(n)=\frac{n}{n+1}\quad or;\ \cos(2\pi n)=1;\ \forall n\in\mathbb{N}\ /\cos(0)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=1\,;sachant\ que\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\text{غير موجودة}$$

5. متتالية محدودة : (suite bornée)

(U_n) متتالية عددية المعرفة على $\mathbb{N}$.

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة من الاعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من اجل كل عدد طبيعي n:

  $U_n\leq A$ ونقول ان A عنصر حاد من الاعلى (la borne supérieure)

$$sup(U_n)=A$$

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة من الاسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من اجل كل عدد طبيعي n:

  $B\leq U_n$ ونقول ان B عنصر حاد من الاسفل (la borne inférieure)

$$inf(U_n)=B$$

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة يعني انها محدودة من الاسفل و محدودة من الاعلى.

خاصية 1 :

- اذا كانت المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى فانها متقاربة

خاصية 2 :

- اذا كانت المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فانها متقاربة

نظرية :

كل متتالية عددية متقاربة هي متتالية محدودة ; و العكس غير صحيح .

مثال :

لتكن المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$U_n = (-1)^n$$
$$-1 \leq U_n = (-1)^n \leq 1$$

واضحة ان المتتالية محدودة ولكن غير متقاربة

كيف نثبت ان متتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$محدودة من الاسفل بعدد حقيقي B او محدودة من الاعلى بعدد حقيقي A؟

- نستعمل البرهان بالتراجع لاثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ B \leq U_n \\ \bullet\ U_n \leq A \end{array}}$$

- المقارنة بين U_n و B او $\left(U_n \text{ و } A\right)$ بدراسة اشارة الفرق بين $U_n - B$ او $(U_n - A)$.
- اذا كانت $U_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0;\ +\infty[$:

مثال :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$المتتالية معرفة بالعلاقة :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{(U_n)^2}{4}$$

بين ان :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ U_n > 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ U_n \leq 1$$

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق :

بين ان المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي انها محدودة :

$$U_n = \frac{3 - \sin n^2}{\cos\sqrt{n} + 3} \quad \forall n \in\ \mathbb{N}$$

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

اذن :

$$-1 \leq \sin n^2 \leq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,, n^2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$
$$-1 \leq -sin\, n^2 \leq 1$$
$$-2 \leq 3 - sin\, n^2 \leq 4$$
$$-1 \leq \cos\sqrt{n} \leq 1$$
$$2 \leq 3 + cos\,\sqrt{n} \leq 4$$
$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{cos\,\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{3 - sin\, n^2}{cos\,\sqrt{n}} \leq 2$$

6. المتتاليات التدريجية : (suites récurrente)

نتحدث عن متتالية تدريجية اذا كان تعريفها يعطي حدها من الرتبة n بدلالة حد او عدة حدود من رتبة اقل من n .

وتعرف المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = f(U_n)\,; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نضرية :

اذا كان f متزايدة فان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة :

- متزايدة اذا كان $f(U_0) \geq U_0$
- متناقصة اذا كان $f(U_0) \leq U_0$

اذا كان f متناقصة فان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة

تطبيق :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$المتتالية معرفة بالعلاقة :

$$U_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{(U_n)^2}{4}$$

بين ان :

$$\forall n \in \mathbb{N}\; U_n > 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\; U_n \leq 2$$

ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟ هل هي متقاربة؟

الحل :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{(U_n)^2}{4}}{U_n} = \frac{3}{4U_n} + \frac{U_n}{4}$$

لمقارنة النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ نرفق المتتالية بالدالة $f:]1;2] \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{4x} + \frac{x}{4}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4x^2} + \frac{1}{4} = \frac{-3+x^2}{4x^2}$$

x	1	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	1 ↘	$\frac{3}{2\sqrt{3}}$	↗ $\frac{7}{8}$

من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحض ان :

$$\forall U_n \in]1;2] \ \ f(U_n) < 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$متناقصة

نفرض ان المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول الى النهاية l بحيث :

$$l = \frac{3}{4} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow l - \frac{3}{4} - \frac{l^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{-l^2+4l-3}{4} = 0 \ \begin{cases} l = 1 \\ l = 3 \end{cases}$$

ومنه $l = 1$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

7. متتالية كولاتز (suite de colatz ou suite de sylacuse) :

حدسية كولاتز خاصة بالاعداد الصحيحة الطبيعية الغير معدومة وهي عبارة عن متتالية تعطى بالعبارة التالية :

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & si\ U_n\ est\ paire \\ 3U_n + 1 & si\ U_n\ est\ impaire \end{cases}$$

مثال :

لتكن المتتالية (U_n)المعرفة ما يلي :

$$U_{n+1}=\begin{cases}U_0=5\\ \dfrac{U_n}{2} & si\ U_n\ est\ paire\\ 3U_n+1 & si\ U_n\ est\ impaire\end{cases}$$

احسب الحدود العشرة الاول للمتتالية (U_n)؟

ماذا تستنتج؟

$U_0=5\ ;\ U_1=16\ ;\ U_2=\ 8\ ;\ U_3=\ 4\ ;\ U_4=2\ ;U_5=1\ ;U_6=4;$
$U_7=2\ ;U_8=1;$

نتيجة :

نلاحض انه خلال رتبة معينة تصبح قيمة المتتالية تاخذ القيمة 1

8. متتالية فيبوناشي (suite de fibonacci) :

متتالية فيبوناشي (F_n) هي متتالية تدريجية ترتبط حدودها بالدستور التراجعي والي تاخذ الشكل التالي :

$$F_{n+2}=\begin{cases}F_0=0\\ F_1=1\\ F_{n+1}+F_n\end{cases}$$

نلاحض انه في متتالية فيبوناشي كل حد يساوي مجموع الحددين السابقين له مباشرة.

$0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$

تسمى حدود المتتالية فيبوناشي باعداد فيبوناشي.

تطبيق :

بين انه في متتالية فيبوناشي فان :

F_{3n} هو عدد زوجي.

نستعمل البرهان بالتراجع :

من اجل $n=1$ فان :

$$\begin{aligned}F_3&=F_1+F_2\\ &=1+1\\ &=2\end{aligned}$$

من اجل $n=1$ اذن الخاصية $P(n)$ محققة.

من اجل $n=n+1$ فان :

نفرض ان الخاصية $p(n)$ من اجل n اي :

$$F_{3n}=2n$$

نتاكد من صحة الخاصية من اجل $n=n+1$ اي :

$$F_{3(n+1)} = 2(n)$$
$$F_{(3n+3)} = F_{3n+2} + F_{3n+1}$$
$$F_{3n+2} = F_{3n+1} + F_{3n}$$
$$F_{(3n+3)} = F_{3n+1} + F_{3n} + F_{3n+1}$$
$$F_{(3n+3)} = 2F_{3n+1} + F_{3n}$$
$$F_{(3n+3)} = 2(F_{3n+1} + n)$$

نتيجة :

اذن : F_{3n} هو عدد زوجي.

مثال :

بين ان :

$$F_1 + F_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots.. F_n = F_{n+2} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

9. المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية :

a. **المتتالية الحسابية (suite arithmétiques):**

نقول +ان المتتالية (U_n) حسابية حدها الاول U_0 و اساسها r (عددحقيقي r) اذا كان لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} - U_n = r$$

عبارة الحد العام المتتالية الحسابية :

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

مجموعة حددود متتابعة من متتالية حسابية :

$$S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots U_{n-1} + U_n = (n+1)\left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right)$$

$$S = U_p + U_{p+1} + \cdots \ldots\ldots\ldots U_{n-1} + U_n = (n-p+1)\left(\frac{U_p + U_n}{2}\right)$$

b. **المتتالية الهندسية (suite géométrique):**

نقول ان المتتالية (U_n) هندسية حدها الاول U_0 و اساسها q (عددحقيقي q) اذا كان لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

عبارة الحد العام المتتالية الهندسية :

$$U_n = U_p q^{n-p}$$

مجموعة حدود متتابعة من متتاليةهندسية :

$$S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots U_{n-1} + U_n = (U_0)\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots U_{n-1} + U_n = \left(U_p\right)\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

نهاية متتالية هندسية :

- اذا كان $q > 1$ و $U_0 > 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- اذا كان $q > 1$ و $U_0 < 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
- اذا كان $q \leq -1$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n$ غير موجودة

تطبيق :

ليكن $(U_0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ لدينا المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة كما يلي :

$$U_{n+1} = \alpha U_n + \beta$$

ما هي طبيعة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اذا كان :

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 0$$

في حالة $\alpha = 1$ نلاحض ان عبارة المتتالية :

$$U_{n+1} - U_n = \beta$$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عبارة عن متتالية حسابية

في حالة $\beta = 0$ نلاحض ان عبارة المتتالية :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \alpha$$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عبارة عن متتالية هندسية