المحاضرة الخامسة :

إن الغرض الأساسي من استخدام نظرية المعاينة هو القيام بعملية التقدير ويعرف التقدير على أنه استنتاج معلمات المجتمع المجهولة بالاعتماد على خصائص عينة مأخوذة من هذا المجتمع، حيث أن العينة تعتبر صورة مصغرة من المجتمع فإنه يتم اللجوء إلى حساب ما يقابل معالم المجتمع في العينة من مقاييس، وذلك من بيانات العينة، ويمكن استخدام هذه المقاييس كتقدير للمعلمة المناظرة لها في المجتمع (p, μ, σ) مثلا: يمكن استخدام متوسط العينة $\bar{x}$ لتقدير متوسط المجتمع μ، ونميز بين نوعين من التقدير: التقدير النقطي، التقدير بمجال.

التقدير النقطي:

وهو تقدير معلمة من معالم المجتمع المجهولة بقيمة واحدة أو بعدد واحد، مثلا: إذا قدرنا متوسط علامات الطلاب في مادة ما بـ 13.5، نكون قد قدرنا علامات الطلاب نقطيا، أو كأن نقول أن نسبة البدانة في عينة عشوائية من المراهقين تقدر بـ 25% نكون قد قدرنا نسبة البدانة في مجتمع ما نقطيا.

وعليه يمكن القول أن متوسط العينة $\bar{X}$ مقدرا لوسط المجتمع μ ، وقيمة مفردة للمتوسط $\bar{X}$ هو تقدير بنقطة لوسط المجتمع μ، وبالمثل فإنه يمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة s كمقدر للانحراف المعياري للمجتمع σ، والقيمة المفردة للانحراف المعياري S كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع σ، وكذلك يمكن استخدام النسبة في العينة كمقدر للنسبة P في المجتمع، والقيمة المفردة للنسبة يمكن استخدامها كتقدير للنسبةP.

التقدير بمجال:

نادرا ما يتساوى تقدير النقطة والمعلمة المراد تقديرها، لذلك يتم بدلا من ذلك تحديد فترة أو مجال، ويشير التقدير بفترة إلى مدى يبين مجالا من القيم التي يحتمل أن تقع القيمة الفعلية المجهولة ضمنها، أي تقدير معلمة المجتمع بنقطتين يحددان مجال لقيمة المعلمة، مثال: يكون تقدير بمجال إذا قلنا أن متوسط علامات الطلاب تساوي 13.5 ±2.5 أي ان متوسط علامات الطلاب في المجتمع يتراوح بين 11 و16، ومجال الثقة (فترة الثقة) معرف بحدي الثقة، الحد الأدنى الذي يرمز له بالرمز L، والحد الأعلى الذي يرمز له بالرمز U وبشكل عام لتحديد فترة الثقة لأي معلمة كانت، ولتكن B لابد من إيجاد هذين الحدين والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

$$P(L \leq B \leq U) = P\left(\hat{b} + ME \leq B \leq \hat{b}ME\right) = 1 - \alpha$$

حيث أن:

L: الحد الأدنى لمجال الثقة.

U:الحد الأعلى لمجال الثقة

$\alpha - 1$: معامل الثقة حيث أن $(\alpha - 1)$. 100% هي درجة أو مستوى الثقة، وتجدر الإشارة إلى أنه كلما زاد هذا المقدر كلما كانت فترة الثقة أكثر طولا، وأن تكون فترة الثقة أكثر كولا لا يعني بالضرورة أن تكون أفضل، وذلك لأنه إذا زاد طول مجال أو فترة التقدير عن حد معين تصبح الفائدة العلمية لها دون جدوى.

ME: ويسمى هامش الخطأ وهي مقدار أو قيمة تأخذ في الحسبان تقلبات معاينة المقدر $\hat{b}$ ومعامل الثقة $(1 - \alpha)$.

α: احتمال الخطأ ويسمى أيضا مستوى المعنوية.

مثال:

على فرض أن متوسط علامات الطلاب في مادة ما ينتمي إلى المجال [11، 16] بمستوى معنوية 5% أي أن:
α= 5% مستوى المعنوية، أو احتمال الخطأ.

$1-\alpha$= 95% مستوى الثقة.

11 و16: حدود الثقة (11 الحد الأدنى، 16 الحد الأعلى).

[11، 16]: مجال الثقة، أو فترة الثقة.

مجال الثقة للمتوسط:

نقطيا يقدر متوسط المجتمع μ من خلال الإحصائية المقابلة في العينة $\bar{X}$، ومن أجل إنشاء مجال الثقة حول متوسط المجتمع نميز بين حالتين.

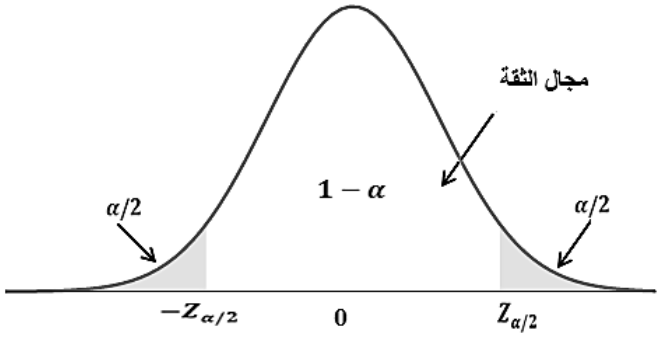
تقدير متوسط المجتمع μ باستخدام التوزيع الطبيعي (حالة σ معروف).

بهدف تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع المجهول μ، نسحب عينة عشوائية حجمها n، وعلى فرض أن المجتمع الذي سحبت منه العينة موزع طبيعيا وتباينهσ^2 معلوم، أو في حالة العينات الكبيرة ($n \geq 30$) حسب نظرية النهاية المركزية فإن $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{X}})$$

أي أن: $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0,1)$

ومني مكن تمثيل هذا التوزيع بيانيا كما يلي:



من الشكل أعلاه: $P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq +Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

وبما أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$

ومنه فإن:

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq +Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu_X \leq +Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

وعليه يمكن تكوين فترة الثقة لمتوسط (حول متوسط) المجتمع 100 (1-α)μ % كما يلي:

$$\bar{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq= \mu_X \leq \bar{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

ويسمى المقدار $ME = Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ بهامش الخطأ ويمكن كتابة مجال ثقة لمتوسط المجتمع كما يلي:

$$P(\bar{X} - ME \leq \mu_X \leq \bar{X} + ME) = 1-\alpha$$

مثال: مجتمع موزع طبيعيا انحرافه المعياري $\sigma = 3.75$، ومتوسطه μ، انطلاقا من عينة عشوائية من ذات المجتمع حجمها n=15، ومجموع مفرداتها $\sum X_i = 2400$، قدر فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ المجهول عند مستوى معنوية α=5%.

الحل: العينة المسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم $\sigma = 3.75$، نستخدم التوزيع الطبيعي لتقدير فترة الثقة للمتوسط:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\sum X_{\mathrm{i}}}{\mathrm{n}} = \frac{2400}{15} = 160$$

$$\mathrm{Z}_{1-\alpha/2} = \mathrm{Z}_{1-0.05/2} = \mathrm{Z}_{0.925} = 1.96$$

$$\left[160 - (1.96).\left(\frac{3.75}{\sqrt{15}}\right); 160 + (1.96).\left(\frac{3.75}{\sqrt{15}}\right)\right]$$

[158 ; 162] أي أن $158 < \mu < 162$ عند مستوى ثقة 95%.