المحاضرة الرابعة :

توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

يحتاج الباحث في اغلب الدراسات لمعرفة نسبة ظاهرة معينة في المجتمع محل الدراسة، كنسبة المدخنين في مدينة ما، نسبة الذكور في جامعة ما، نسبة الوحدات التالفة في إنتاج مصنع معين، ... الخ، ففي كل هذه الحالات نجد أن المجتمع محل الدراسة منقسم إلى قسمين، قسم تتوافر فيه الظاهرة محل الدراسة (الخاصية المدروسة) والقسم الثاني لا تتوافر فيه الظاهرة المدروسة، ومجتمعات من هذا النوع يكون فيها المتغير وصفيا أي نوعيا لا نستطيع قياسه كميا، ونتعامل في هذا النوع من المجتمعات مع نسبة الظاهرة محل الدراسة في المجتمع، ويرمز لها بالرمز P ويطلق عليها نسبة المجتمع وهي تحسب كتالي:

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{N}} = P$$

X: عدد مفردات المجتمع التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة

N: العدد الكلي لمفردات المجتمع.

وبالتالي فإن P تمثل إحتمال ظهور هذه الظاهرة في المجتمع، ويرمز لاحتمال عدم ظهور هذه الظاهرة في المجتمع بالرمز q، حيث أن حدث ظهور الظاهرة وحدث عدم ظهورها هما حدثان لبعضهما البعض أي p+q=01.

وتعتبر النسبة P من أهم معالم المجتمع التي يرغب الباحث في معرفتها ليستطيع وصف المجتمع محل الدراسة وصفا جيدا، ولكن في الكثير من الأحيان لا نستطيع تحديد نسبة المجتمع لعدم توافر بيانات لدينا عن كل مفردات المجتمع، ولذلك نقوم بالاستدلال عليها، أي استنتاجها باستخدام نسبة الظاهرة محل الدراسة في العينة العشوائية المسحوبة من هذا المجتمع، ويرمز لنسبة العينة بالرمز $\hat{p}$ وتحسب كما يلي:

$\hat{\mathrm{p}} = \frac{x}{\mathrm{n}}$ / حيث: x تمثل عدد مفردات العينة التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة و n تمثل العدد الكلي لمفردات العينة.

نسبة العينة $\hat{p}$ ، كأي إحصائية تتغير قيمتها من عينة إلى أخرى وبالتالي فهي متغير عشوائي له توزيع احتمالي يطلق توزيع المعاينة لنسبة العينة، مما يعني أن سلوك هذه النسب هو سلوك متغير عشوائي، وبالتالي فإن لهذا المتغير توزيع احتمالي متوسطه:

$$\mu_{\hat{\mathrm{p}}} = E(\hat{p}) = p$$

أما تباينه فيكون حسب الحالات التالية:

	التوزيع الاحتمالي	تباين النسبة في العينة
P معلومة	$\hat{p} \to N(p, \sigma_{\hat{p}}^2)$	$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$
P مجهولة		$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$

حيث:

P: نسبة تواجد الصفة في المجتمع الإحصائي.

q: عدم توافر الصفة في المجتمع الإحصائي مع p=1-q.

$\hat{p}$: نسبة تواجد الصفة في العينة العشوائية.

$\hat{q}$: عدم توافر الصفة في العينة العشوائية مع $\hat{p} = 1 - \hat{q}$

وسوف نتطرق إلى مختلف حالات توزيع المعاينة للنسبة كما هو موضح في الجدول التالي:

توزيع النسبة للعينة $(\hat{p})$		
	التوزيع الاحتمالي	حساب احتمال المتغير العشوائي
السحب بالارجاع و $n \geq 30$	$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$	$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$
السحب بدون ارجاع و $n \geq 30$	$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$	$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} \sim N(0,1)$

توزيع التباين للعينة (S^2)	
توزيع المعاينة (التوزيع الاحتمالي)	حساب احتمال المتغير العشوائي .
$c = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$	$c = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

توزيع النسبة بين تباين عينتين $\left({S_1^2}/{S_2^2}\right)$	
توزيع المعاينة (التوزيع الاحتمالي)	حساب احتمال المتغير العشوائي .
$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - n_2 - 1)$	$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

مثال1: مصنع ينتج عادة 25% عبوات كبيرة الحجم سحبت من إنتاجه عينة حجمها 2200 عبوة.

- اوجد توزيع النسبة للعبوات.

- احسب احتمال أن المصنع ينتج أقل من 22% من العبوات الكبيرة في فترة إجراء البحث في حالة السحب وبدون إرجاع علما أن حجم المجتمع N=8000.

مثال2: سحبت عينة عشوائية بحجم 20 مشاهدة من مجتمع طبيعي التوزيع تباينه يساوي 9

احسب احتمال أن يزيد تباين العينة عن 15.

مثال3: سحبت عينة حجمها 13 من مجتمع طبيعي تباينه 9 وسحبت عينة أخرى حجمها 21 من مجتمع طبيعي تباينه 25 مستقل عن المجتمع الأول.

- أوجد احتمال النسبة بين تبايني العينتين أقل من 0.8.