المحاضرة الثانية:

المحور الثاني: توزيع المعاينة:

نفترض أنه لدينا مجتمعا من المفردات N يتبع توزيعا احتماليا معينا و أننا بصد سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع، بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحد يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو n من المفردات.

لإيجاد عدد العينات المكنة والمسحوبة من المجتمع N هناك حالتين في حالة السحب بالإرجاع وفي حالة السحب بدون إرجاع:

- في حالة السحب بالإرجاع فإن عدد العينات الممكنة يساوي N^n.
- في حالة السحب بدون إرجاع $C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$

1– توزيع المعاينة لمتوسط حسابي من مجتمع طبيعي التوزيع:

عند أخذ جميع العينات الممكنة ذات الحجم n المجتمع حجمه N ثم حساب الوسط الحسابي لكل منها نجد أن كل قيمة من قيم الاوساط الحسابية للعينات تختلف عن الأخرى لذلك فإن سلوكها يأخذ سلوك متغير عشوائي يرمز له بالرمز نسمي توزيع المتغير العشوائي بتوزيع المتوسط الحسابي للعينة .

نظرية:

إذا كان متغير عشوائي يمثل مجتمع ما و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\bar{X})$ يكتب كما يلي: $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$

أما تباين الاوساط الحسابية للعينات العشوائية والمتساوية الحجم، فنرمز له بالرمز σ^2 وهو يحسب بعدة قوانين حسب الحالة الموافقة له، والجدول الموالي يلخص أهم الحالات كالآتي:

	توزيع الوسط الحسابي	قيمة تباين الوسط الحسابي		قيمة تباين الوسط الحسابي في حالة السحب بدون ارجاع	
التباين σ^2 معلوم	$\bar{X} \to N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2)$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$		$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	
التباين σ^2	$\bar{X} \to N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2)$	$n \geq 30$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n}$	$n \geq 30$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

مجهول	$\bar{X} \to t(n-1)$	n<30	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n-1}$	n<30	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n-1}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

حيث:

n: حجم العينة

μ: تباين المجتمع وهو نفسه تباين الوسط الحسابي $\bar{X}$

$\sigma_{\bar{x}}^2$: تباين الةسط الحسابي $\bar{X}$

σ^2: تباين المجتمع.

S^2: تباين العينة، حيث $S^2 = \frac{(X-\bar{X})^2}{n-1}$

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$: معامل الارجاع

لايجاد توزيع المتغير العشوائي $\bar{X}$ نستعمل التوزيع الطبيعي المعياري z حيث: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ في جميع الحالات ما عدا حالة واحدة وهي إذا كان σ^2 (تبيان المجتمع) مجهول وكان n<30، حيث في هذه الحالة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستيودنت t حيث: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to t_{(n-1)}$

مثال: إذا كان عدد سائقي سيارات الأجرة في مدينة ما هو 1500 سائق، وعلمت أن أعمارهم تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي قدره 45 سنة، وانحراف معياري قدره 7 سنوات، فإذا سحبنا مع عدم الإرجاع من هذا المجتمع عينة عشوائية بها 16 سائقا. أوجد:

- أوجد توزيع المعاينة لمتوسط أعمار سائقي سيارات الأجرة؟
- أحسب احتمال أن يكون متوسط العمر لهذه العينة أكبر من 48 سنة؟

توزيع المعاينة لمتوسط حسابي من مجتمع غير طبيعي التوزيع:

إذا سحبت عينات عشوائية بسيطة ذات الحجم n، حيث $n \geq 30$ من مجتمع غير طبيعي توقعه μ وتباينه σ^2، فإن المقدار $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري وذلك حسب نظرية النهايات المركزية.

نظرية النهايات المركزية:

إذا سحبت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع غير طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن توزيع المعاينة لـ $\overline{\mathrm{X}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي بتوقع μ وتباين $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وذلك كلما كانت $n \geq 30$.

مثال: علمت أن متوسط الإنتاج اليومي لمؤسسة ما هو 30 وحدة بانحراف معياري 12 وحدة، سحبت منه عينة عشوائية حجمها 49 وحدة، فأوجد:

-توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة.

- احتمالي أن يكون متوسط إنتاج العينة أقل من 35 وحدة؟

الحل:

لدينا: $\mu = 30$، $\sigma = 12$ ، $n=49$، كما أن توزيع المجتمع مجهول وبالتالي نعتمد على حجم العينة في تحديد توزيع المعاينة لوسط العينة $\overline{\mathrm{X}}$ و $n=49 \geq 30$ ومنه:

$$\overline{\mathrm{X}} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ ومنه } Z \rightarrow N(0,1) \text{ ، حيث: } Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\overline{\mathrm{X}} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \rightarrow \bar{X} \rightarrow N\left(30, \frac{(12)^2}{49}\right) \rightarrow \bar{X} \rightarrow N\left(30, \frac{(12)^2}{7}\right)$$

حساب $P(\bar{X} < 35)$

$$P(\bar{X} < 35) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{35-30}{12/_7}\right) = P(Z < 2.92) = Q(2.92)$$
$$= 0.9982$$