المحاضرة الثالثة:

توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مستقلتين:

إذا كان لدينا المجتمع الأول $X_1 \rightarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وسحبت منه عينة عشوائية حجمها n_1، ومجتمع ثاني $X_2 \rightarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$، سحبت منه عينة حجمها n_2، وكان المجتمعين مستقلين، وعرفنا المتغيرين $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ فإن $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يمثل متغيرات هعشوائيا للفرق بين متوسطي العينتين، وسطه الحسابي يكون كالآتي:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\overline{X_1}} - \mu_{\overline{X_2}} = \mu_1 - \mu_2$$

إذا تمت المعاينة من مجتمعين مستقلين، ولمعرفة توزيع المعاينة للفرق، فإن ذلك يتوقف على طبيعة توزيع المجتمعين (توزيع طبيعي أو غير طبيعي) وكذلك معلومية أو مجهولية تبايني المجتمعين وحجم العينتين المسحوبتين أكبر أو يساوي 30 أو أصغر تماما من 30 وسوف نتطرق إلى مختلف هذه الحالات كما هو موضح في الجدول التالي:

الحالة	توزيع المعاينة (التوزيع الاحتمالي)	حساب احتمال المتغير العشوائي
تبايني المجتمعين معلومين σ_1^2 و σ_2^2	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ **التباين:** $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
تبايني المجتمعين مجهولين $\sigma_1^2 =?$ و $\sigma_2^2 =?$ و $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})$ **التباين:** $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$	$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
تبايني المجتمعين مجهولين $\sigma_1^2 =?$ و $\sigma_2^2 =?$ و $n_1 < 30$ و $n_2 < 30$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ **التباين:** $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$	$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ **بحيث:** $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

حيث:

n_1 و n_2: حجم العينيتن الأولى والثانية على التوالي

σ_1^2 و σ_2^2: تبايني المجتمعين على التوالي.

S_p^2 : الوسط المرجح لتباين العينة الأولى وتباين العينة الثانية، ويتم الترجيح بدرجة الحرية الخاصة بكل عينة، ويطلق على هذا المقدار التباين المشترك.

S_1^2 و S_2^2: تبايني العينتين على التوالي.

مثال:

إذا كان $X_1 \rightarrow N(9300, 250000)$، سحبت من مجتمعه عينة حجمها 25 مشاهدة.

و $X_2 \rightarrow N(9140, 160000)$ ، سحبت من مجتمعه عينة حجمها 20 مشاهدة.

المطلوب:

- أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة الأولى أكبر من متوسط العينة الثانية بـ 395؟
- أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة الأولى أقل من متوسط العينة الثانية؟

لدينا: $\sigma_1^2 = 250000$ ، $\mu_1 = 9300$ ، $n_1 = 25$

$\sigma_2^2 = 160000$ ، $\mu_2 = 9140$ ، $n_2 = 20$

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (9300 - 9140)}{\sqrt{\frac{250000}{25} + \frac{160000}{20}}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - 160}{\sqrt{18000}}$$

أ إيجاد إحتمال أن يكون متوسط العينة الأولى أكبر من متوسط العينة الثانية بـ **395** أي إيجاد $p(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \succ 395)$

$$p(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \succ 395) = p\left(Z \succ \frac{395 - 160}{\sqrt{18000}}\right)$$

$$= p(Z \succ 1.75)$$

$$= 1 - \phi(1.75)$$

$$= 1 - 0.9599$$

$$= 0.0401$$

ب – إيجاد إحتمال أن يكون متوسط العينة الأولى أقل من متوسط العينة الثانية، أي إيجاد $p\left(\overline{X}_1 \prec \overline{X}_2\right)$

$$p\left(\overline{X}_1 \prec \overline{X}_2\right) = p\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \lhd 0\right)$$
$$= p\left(Z \prec \frac{0-160}{\sqrt{18000}}\right)$$
$$= p(Z \prec -1.19)$$
$$= 1-\phi(1.19)$$
$$= 1-0.8830$$
$$= 0.117$$

مثال 2: سحبت عينة عشوائية حجمها 17من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي 32 وعينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 27 من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي 30 وكان تباين العينة الأولى هو 6 وتباين العينة الثانية هو 9.

المطلوب: إذا كان تباين المجتمعين متساويين، فأوجد ما يلي:

- التوزيع الاحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين؟
- احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 4؟

الحل:

لدينا: $n_1 = 17 \qquad \mu_1 = 32 \qquad S_1^2 = 6$

$n_2 = 27 \qquad \mu_2 = 30 \qquad S_2^2 = 9$

أ – إيجاد التوزيع الإحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين:

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم العينتين صغير فإننا نستخدم توزيع ستيودنت بدرجة حرية $\nu = n_1 + n_2 - 2$ ، أي:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \to t_{(n_1+n_2-2)} \Rightarrow \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \to t_{(17+27-2)}$$
$$\Rightarrow \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \to t_{(40)}$$

ب – إيجاد إحتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من **4** أي إيجاد $p\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \prec 4\right)$

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_1\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

حيث:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-1}=\frac{(17-1)6+(27-1)9}{(17+27-2)}$$

$$\Rightarrow S_p^2=8.25$$

وعليه:

$$T=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_1)-(32-30)}{\sqrt{(8.25)\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{27}\right)}}=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_1)-2}{\sqrt{(8.25)\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{27}\right)}}$$

$$p(\overline{X}_1-\overline{X}_2\prec 4)=p\left(T\prec\frac{4-2}{\sqrt{0.791}}\right)$$

$$=p(T\prec 2.249)$$

$$=1-p(T\succ 2.249)$$

$$=1-0.01$$

$$p(\overline{X}_1-\overline{X}_2\prec 4)=0.99$$