2-قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة المتغير العشوائي المستمر:

2-1- قانون التوزيع الاسي:

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و مع $\lambda<0$ ، نقول عن X متغير عشوائي انه يتبع التوزيع الاسي ذو معلمة λ و كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \lambda \,.\, e^{-\lambda \mathrm{x}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

و نرمز له بـ $X \sim \varepsilon(\lambda)$

ملاحظة: القانون الأسي يستخدم في دراسة مدى حياة القطع المصنعة، اوقات الانتظار و كذا الخدمات.

مثال: ليكن X م.ع.م يتبع التوزيع الاسي بمعلمة ($\lambda = 2$). أوجد احتمال P(1<X<3)

ما دام $X \sim \varepsilon(2)$

تابع كثافته الاحتمالية ستكون معرفة كما يلي:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 2 \,.\, e^{-2\mathrm{x}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P(1<X<3)=\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 2 \,.\, e^{-2\mathrm{x}} \ \mathrm{dx} = [-\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}]_1^3$$
$$= (-\mathrm{e}^{-6}) - (-\mathrm{e}^{-2}) = -\mathrm{e}^{-6} + \mathrm{e}^{-2} = -\frac{1}{\mathrm{e}^6} + \frac{1}{\mathrm{e}^2}$$
$$= -0{,}00248 + 0{,}1353 = 0{,}13282$$

ملاحظة: X متغير عشوائي يتبع التوزيع الاسي و دالته الاحتمالية f(x). من اجل ان تكون هذه الدالة تابع كثافة احتمالية يجب:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \ => \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = 1 \ => \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1 \ =$$
$$> \left(-e^{-\lambda\infty} + e^{-\lambda 1}\right) = 0 + 1 = 1$$

2-1-أ-مميزات العددية لقانون التوزيع الاسي:

1 - **التوقع الرياضي**: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

2 - **التباين**: $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

مثال 2: اذا كان الزمن الذي تستغرقه مكالمة هاتفية بالدقائق بإحدى الادارات تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 5 د. فاذا تم اختيار احدى المكالمات بطريقة عشوائية. ما هو احتمال ان تستغرق هذه المكالمة :

- أكثر من 2د
- أقل من 2د
- من 5الى 10د
- أحسب التباين.

الحل: $X \sim \varepsilon(\lambda)$

ايجاد اولا λ:

لدينا متوسط الذي تستغرقه المكالمات الهاتفية هو 5د أي:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} = 5 => \lambda = \frac{1}{5}$$

و منه الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X و الذي يتبع التوزيع الاسي هي كالتالي:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \lambda \,.\, e^{-\lambda \mathrm{x}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{1}{5} \,.\, e^{-\frac{1}{5}\mathrm{x}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1 - حساب احتمال ان تستغرق المكالمة الهاتفية أكثر من دقيقتين:

$$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{5} \,.\, e^{-\frac{1}{5}\mathrm{x}}\, dx = \left[e^{-\frac{1}{5}\mathrm{x}}\right]_2^{+\infty}$$

$$= -e^{-\frac{1}{5}+\infty} - \left(-e^{-\frac{2}{5}}\right) = 0 + e^{-\frac{2}{5}} = 0{,}67$$

2 - حساب احتمال ان تستغرق المكالمة الهاتفية أقل من دقيقتين:

$$P(X<2)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 \frac{1}{5}\,.e^{-\frac{1}{5}x}\,dx=\left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^2$$

$$=-e^{-\frac{2}{5}}-\;(-e^{-\frac{1}{5}0})=-e^{-\frac{2}{5}}+\;1=-0{,}67+1=0{,}33$$

أو نستعمل مباشرة الطريقة التالية:

$$P(x<2)=1-P(X>2)=1-0{,}67=0{,}33$$

3 - حساب احتمال ان تستغرق المكالمة الهاتفية ما بين 5و10د:

$$P(5\le X\le 10)$$

$$=\int_5^{10} f(x)dx=\int_5^{10}\frac{1}{5}\,.e^{-\frac{1}{5}x}dx=\;\left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_5^{10}$$

$$=-e^{-\frac{10}{5}}+e^{-1}=-e^{-2}+e^{-1}=-0{,}135+0{,}367$$

$$=0{,}2329$$

4 - التباين:

$$V(X)=\frac{1}{(\frac{1}{5})^2}=25$$

2-2- **قانون التوزيع الطبيعي**: La loi de la place Gauss/ la loi normal

يعتبر قانون التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات المستخدمة، و هو خاص بالمتغيرات العشوائية المستمرة، و هذا القانون يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\delta})^2}\qquad -\infty<x<+\infty$$

حيث:

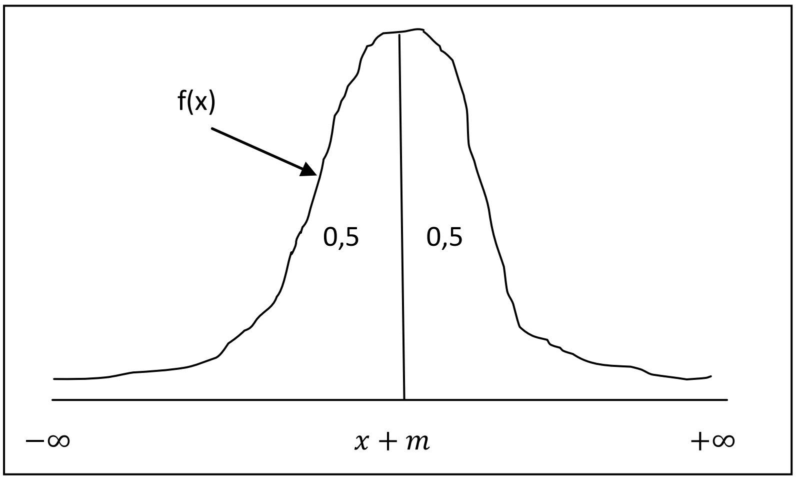
- m: يمثل التوقع الرياضي لـx
- δ^2: تباين المتغير العشوائي لـx
- e : ثابت و =2,718
- π: ثابت و=3,14
- x: المتغير العشوائي

بتفحص هذا القانون يتضع انه يحتوي على معلمتين مجهولتين هما m و δ، لذلك يقال عن التوزيع الطبيعي أنه معرف بهاتين المعلمتين، و المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي يرمز له

$$X \sim N(m, \delta)$$

2-2-أ- منحنى قانون التوزيع الطبيعي:

يأخذ منحنى قانون التوزيع الطبيعي شكل جرس (une cloche)، حيث هو متماثل حول الخط المستقيم $x = m$ و يقترب من الصفر من الجهتين $\pm\infty$ للمتغير x



- المساحة الواقعة تحت منحني التوزيع الطبيعي =1 أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \;=>\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\delta})^2}\, dx = 1$$

- الاحتمال موجب حيث : $0 \leq f(x) \leq 1$ الان:

$$,(\frac{x-m}{\delta})^2 \geq 0, \quad \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} > 0, \quad \delta \geq 0, \quad \sqrt{2\pi} > 0$$

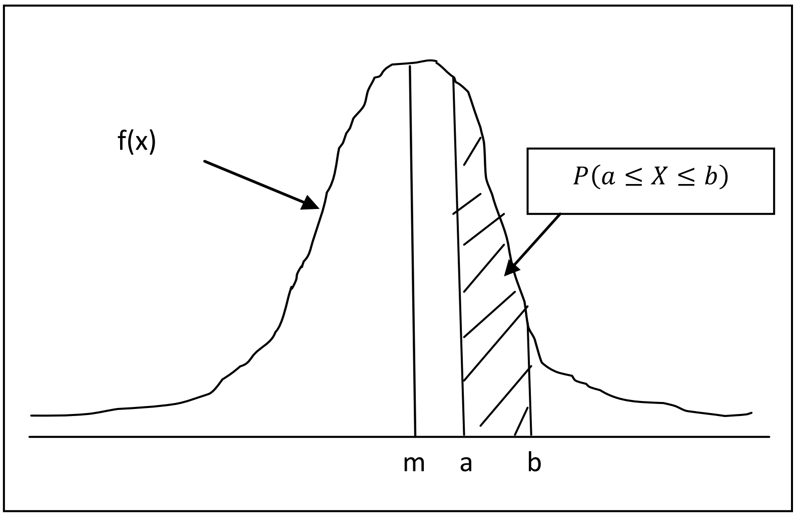
2-2-ب- كيفية حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي:

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط و انحراف معياري δ حيث:

احتمال ان يقع المتغير العشوائي X ضمن مجال معين [a, b] يعبر عنه بـ $P(a \leq X \leq b)$

حيث: $= \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\delta})^2}\ dx$

هذا التكامل ما هو الا المساحة الواقعة تحت المنحنى و المحصورة بين المستقيمين العموديين a و b كما هو موضح في الشكل التالي:



نظرا لتعدد قيم كل من m و δ فسوف يترتب عن ذلك القيام بالعديد من التكملات لـ $f(x)$ من اجل كل قيمة لـ m و δ. و الحل هو القيام بتحويل قانون التوزيع الطبيعي الى قانون التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) و ذلك بتثبيت المعلمتين m و δ.

2-3- **قانون التوزيع الطبيعي المعياري**:

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $m = E(X)$ و انحراف معياري δ حيث:

$$X \sim N(m, \delta)$$

يمكن استنتاج متغير عشوائي آخر عن طريق التعديل التالي:

$$Z = \frac{x - E(X)}{\delta}$$

في هذه الحالة Z سوف يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط $E(Z)$ و تباين $V(Z)$ حيث:

$$Z \sim N\left(E(Z), \sqrt{V(Z)}\right)$$

$$E(Z) = E\left[\frac{x - E(X)}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta}[E(X) - E(X)] = 0$$

$$V(Z) = V\left[\frac{x - E(X)}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta^2}(V(X) - V(E(X)) = \frac{1}{\delta^2}.\delta^2 = 1$$

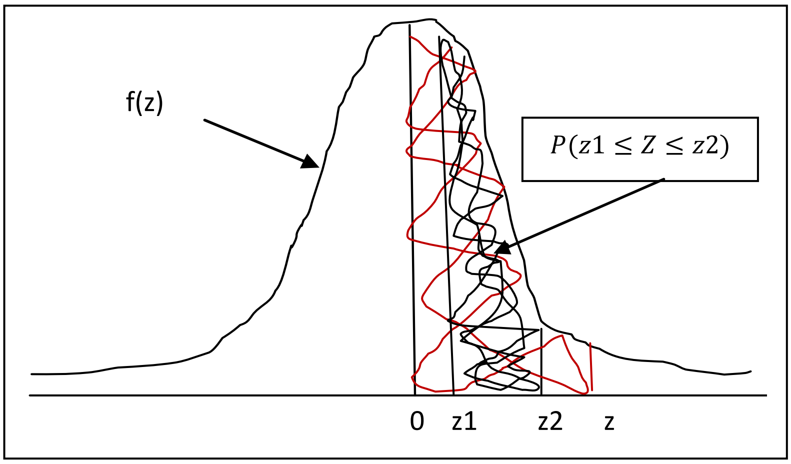
و منه:

$$Z \sim N(0,1)$$

Z: متغير عشوائي مركزي (variable aléatoire centrée réduite)، دالة كثافته الاحتمالية $f(z)$ معرفة كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو كالتالي



2-3-أ-حساب الاحتمال بالنسبة للتوزيع الطبيعي المعياري:

يتم حساب احتمال المتغير العشوائي Z ضمن مجال معين و ليكن $[z1, z2]$ كما يلي:

$$P(z1 \leq Z \leq z2) = \int_{z1}^{z2} f(z)dz = \int_{z1}^{z2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

هذا الاحتمال ما هو الا المساحة الواقعة تحت المنحنى و محصورة بين المستقيمين العموديين $z1$ و $z2$. و هذا الاحتمال نجده بحساب قيمتين $z1$ و $z2$ و باستعمال الجداول الاحصائية الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري.

$$P(z1 \leq Z \leq z2) = P(\frac{x1 - m}{\delta} \leq Z \leq \frac{x2 - m}{\delta})$$

مثال1: اخذت درجات الحرارة خلال شهر ماي لولاية ما، فوجد انها تاخذ شكل توزيع طبيعي بتوقع مقداره 20° و انحراف معياري مقداره 3,33°. اوجد احتمال ان تقع درجات الحرارة بين 21,11 و 26,66 .

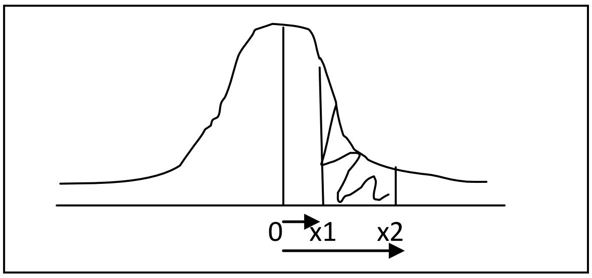
الحل: نعتبر المتغير العشوائي في هذه الحالة على أنه درجة الحرارة و يرمز له بـ X و الذي يتبع توزيع الطبيعي:

$$X \sim N(20,\ \ 3{,}33)$$

و قمنا باستنتاج متغير عشوائي Z و الذي يتبع توزيع الطبيعي المعياري : $Z \sim N(0{,}1)$ من اجل حساب الاحتمال المطلوب.

$$\begin{aligned} P(z1 \leq Z \leq z2) &= P\left(\frac{x1-m}{\delta} \leq Z \leq \frac{x2-m}{\delta}\right) \\ &= P\left(\frac{21{,}11-20}{3{,}33} \leq Z \leq \frac{26{,}66-20}{3{,}33}\right) \\ &= P(0{,}33 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 0.33) \end{aligned}$$

أنظر الشكل الموالي:



باستعمال الجداول الاحصائية لقانون التوزيع الطبيعي المعياري تجد قيمة الاحتمال مقابلة لكل قيمة zi فنحصل على:

$$P(0{,}33 \leq Z \leq 2) = 0{,}4772 - 0{,}1293 = 0{,}3479$$

مثال2: احسب الاحتمالات التالية :$P(0{,}83 \leq Z \leq 1{,}57)$ ، $P(Z \leq 1{,}96)$

الحل:

$$\begin{aligned} P(0{,}83 \leq Z \leq 1{,}57) &= P(0 \leq Z \leq 1{,}57) - P(0 \leq Z \leq 0{,}83) \\ &= 0{,}4418 - 0{,}2967 = 0{,}1451 \end{aligned}$$

$$P(Z \leq 1{,}96) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}025$$

$$P(Z \leq 1{,}96)$$