الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

1 - مفهوم المتغير العشوائي:

المتغير العشوائي هو خاصية او ميزة نهتم بدراستها عشوائيا. و كأمثلة عن المتغيرات العشوائية، نذكر:

- في تجربة عشوائية متمثلة في "رمي قطعة نقود 3 مرات" أو "رمي 3 قطع نقود مرة واحدة" في هذه الحالة المجموعة الاساسية هي: $S=\{PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF\}$

  قد نهتم في هذه التجربة بعدد الاوجه المتحصل عليها (P)، و في هذه الحالة عدد الأوجه يمثل المتغير عشوائي، قيمه الممكنة له هي: $\{3,2,1,0\}$.
- في تجربة عشوائية متمثلة في "رمي زهرتي نرد" فان المجموعة الأساسية لهذه التجربة هي :

  $S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\ldots\ldots,(4,1),(4,2),(4,3),\ldots\ldots\ldots(6,5),(6,6)\}$

  في هذه التجربة قد نهتم بما يلي: "مجموع نتيجتين"، "فرقهما" أو "جداؤهما". فالقيم الممكنة في حالة مجموع نتيجتين هي: $\{12,11,\ldots\ldots\ldots\ldots4,3,2\}$.
- في تجربة عشوائية ممثلة في سحب عينة ذات حجم n من منتجات ألة، قد نهتم في هذه الحالة بالمنتجات الفاسدة. قيم المتغير العشوائي هي: $\{n,\ldots\ldots3,2,1,0\}$.

يرمز للمتغير العشوائي بحروف كبيرة، مثلا: Z,Y,X....و يرمز لقيم هذا المتغير بأحرف صغيرة، مثلا: zi,yi,xi....و القيم التي يأخذها المتغير العشوائي تخضع للصدفة أو للعشوائية أي لا يمكن تحديدها مسبقا.

القيم الممكنة للمتغير عشوائي X تمثل مجموعة جديدة من الحوادث الاولية. هذه المجموعة تسمى بالمجموعة الاساسية التي يولدها المتغير العشوائي و يرمز لها بالرمز Sx حيث: $Sx=\{0,1,2,\ldots.n\}$

2 - أنواع المتغيرات العشوائية : يوجد نوعين من التغيرات العشوائية:

2-1- المتغيرات العشوائية المتقطعة:

هي المتغيرات العشوائية التي تكون فيها قيم المتغير قابلة للعد. مثلا: نتائج تجربة تعداد الزوار المترددين على منطقة أثرية خلال يوم و التي يكون فراغها منتهيا حيث : $Sx=\{0,1,2\ldots.,n\}$

2-1-أ- قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع (تابع او دالة احتمال):

- مفهوم قانون التوزيع الاحتمالي:

عند اجراء التجربة العشوائية E، فالمتغير العشوائي X يأخذ قيمة حقيقية ضمن فراغ امكاناته، و كل حادث من هذه الحوادث الممكنة المشكلة لإمكاناته تتحقق باحتمال معين pi . و بما ان هذه الحوادث تشكل بمجموعها الحادث الأكيد فان مجموع احتمالات المقابلة =1.

اذا فيمكننا أن نقول ان قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو تلك العلامة التي تربط بين القيم الممكنة لهذا المتغير و بين احتمالاته المرافقة.

لنفرض أنه لدينا متغير عشوائي X، فراغ امكاناته محدود أي $Sx=\{x1,x2,\ldots..,xn\}$ والاحتمالات pi المقابلة لقيم xi التي يمكن أن ياخذها المتغير العشوائي و نرمز لها بـ: P(X=xi)

فقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يمكن عرضه بصورة جدولية التالية:

X=xi	x1	x2	x3	.....	Xn
P(X=xi)	P(X=x1)	P(X=x2)	P(X=x3)	.....	P(X=xn)

فهذا القانون يحقق شرطين التاليين:

- $P(X=xi) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} P(X = xi) = 1$

2-1-ب- تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع:

مفهوم تابع التوزيع الاحتمالي:

ان جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يبين توزيع الاحتمالات على قيم مختلفة للمتغير، إلا اننا نحتاج احيانا الى معرفة مجموع الاحتمالات التي تقل قيمتها عن قيمة معينة أو تزيد عنها للمتغير العشوائي X و من أجل ذلك نقوم باستخدام ما يسمى بتابع التوزيع الاحتمالي و يرمز له بـ F(x). وبالتالي فان تابع التوزيع الاحتمالي هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي X اية قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة xi، و يعبر عن ذلك بالصيغة الرياضية التالية: $F(xi)=P(X\leq xi)$

اذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا، و كانت قيم xi مرتبة ترتيبا تصاعديا و كان قانون توزيعه محددا، فيمكننا أن نجد تابع التوزيع الاحتمالي F(xi) كما يلي:

$$F(xi)=P(X\leq xi)=\sum_{x\leq xi} P(X=xi)$$

- احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو يساوي xk هو:

$$F(xk)=P(X\leq xk)=\sum_{i=1}^{k} P(X=xi)$$

خواص تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع:

1 - ان تابع التوزيع الاحتمالي يحقق دوما العلاقة $F(x)\geq 0$

2 - ان تابع التوزيع الاحتمالي $F(x)$ هو تابع غير متناقص، اي انه اذا كان x1 و x2 عددين حقيقيين أي:

$x1,x2\in R$

و كان : $x2>x1$

فان: $F(x2)>F(x1)$

3- مميزات العددية للمتغير العشوائي المتقطع:

1 - **التوقع الرياضي (الامل الرياضي)**: و يساوي الى مجموع القيم xi مضروب بالقيم الاحتمالية الموافقة لـ xi، و هذا ما يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$E(X)=\frac{\sum xi\ pi}{\sum pi}$$

و بنا ان $\sum pi=1$ فان:

$$\boxed{E(X)=\sum xi\ pi}$$

خواص التوقع الرياضي:

1 - التوقع الرياضي لعدد ثابت يساوي الى هذا العدد أي: $\boxed{E(c)=c}$

البرهان: لنفرض ان X متغير عشوائي يأخذ قيمة واحدة و لتكن c (معناه x1=c) و ان احتمال هذه القيمة =1 أي ان P(X=x1)=1 و بالتعويض في القانون نجد:

$$E(X)=x1.P(X=x1)=c\ .1=c \Rightarrow E(x)=c$$

2 - اذا كان X متغير عشوائي يأخذ و a عدد ثابت فان : $\boxed{E(aX)=aE(X)}$

البرهان: اذا كان X متغير عشوائي و يمكن أن يأخذ القيم التالية:

X=xi	ax1	ax2	.....	axn
P(X=xi)	P(X=x1)	P(X=x2)	.....	P(X=xn)

و منه نجد: $E(aX)=\sum axi\ pi = a\sum xipi = aE(x)$

و بالتالي: $E(aX)= aE(x)$

3 - التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي نفسه : $E[E(X)]=E(X)$

4 - $E(aX+b)=a\ E(X)+b$

2 - **التباين**: تباين متغير عشوائي X هو عبارة عن التوقع لمربع الانحرافات أي:

$$V(X)=\sum pi[xi - E(X)]^2 = \sum xi^2pi - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

خواص التباين:

1 - تباين عدد ثابت =0 أي $V(c)=0$

2 - $V(cX)=c^2V(X)$

3 - $V(aX+b)=a^2\ V(X)$