المتغيرات العشوائية (تابع)

2-2- المتغيرات العشوائية المستمرة:

نقول عن المتغير العشوائي X انه مستمر، عندما يأخذ هذا المتغير اية قيمة بين الحد الادنى و الحد الأعلى لمجال تغيره المحدود ة غير محدود دون انقطاع. مثلا: نتائج تجربة حصر اطوال الطلبة في جامعة ما. هنا نعتبر الأطوال بمثابة متغير عشوائي يأخذ قيما كثيرة (محدودة بعدد الطلبة) ضمن مجال محدد بحد ادنى يمثله أقصر طالب و بحد اعلى يمثله أطول طالب، أي تكون الأطوال على شكل مجالات.

2-2-أ- قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر:

لنفرض الجدول التالي يبين توزيع الأجر الساعي في مؤسسة اقتصادية ما.

الفئات الاجرية	التكرار النسبي fi
120-40	0,08
200-120	0,34
280-200	0,316
360-280	0,184
440-360	0,064
520-440	0,016

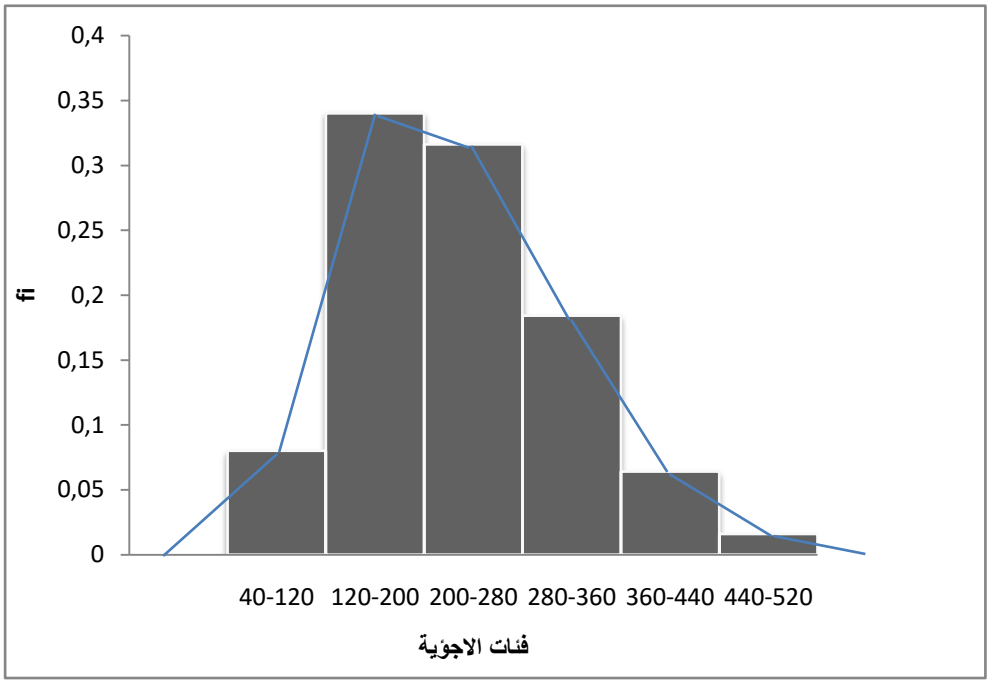
لنرمز لـ : X أجر شخص سجلناه بشكل عشوائي من هذه المؤسسة. ان X هنا بمثابة متغير عشوائي مستمر يستطيع ان يأخذ أية قيمة بين الحد الأدنى للأجر 40دج و الحد الأعلى الأعلى للأجر 520 دج و ذلك ضمن مجال تغيره.

التكرار النسبي مقابل لكل فئة اجرية (مركز الفئة xi) هو عبارة عن احتمال.

نلاحظ من الجدول أن التوزيع الاجري للعمال في الساعة هو عبارة عن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر (دالة كثافة الاحتمال)، لانه يحقق شرطين:

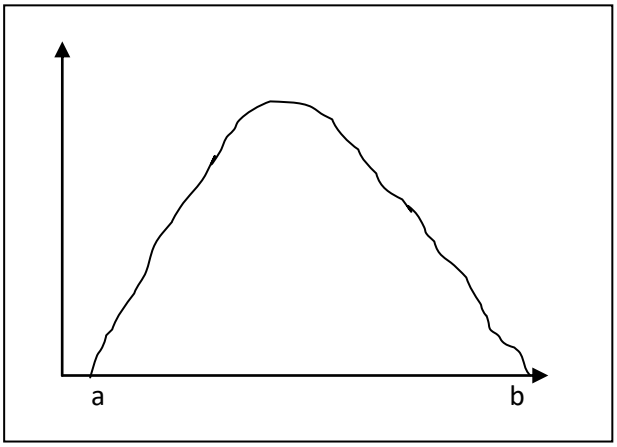
- $f(xi) \geq 0$
- $\sum f(xi) = 1$

التمثيل المقابل لهذا التوزيع هو عبارة عن مدرج تكراري و المضلع التكراري:



ملاحظة: اذا كانت n كبيرة جدا (عدد العمال) فالفئات العمرية ستزداد تضيقا، ففي هذه الحالة لا يمكننا تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي بجدول و لكن نستعمل تابع الرياضي للمتغير العشوائي X و ذلك كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & a \le x \le b \\ o & ailleurs \end{cases}$$



انطلاقا من هذا القانون و الممثل بتابع رياضي، يمكننا أن نحسب قيمة الاحتمالات لأي مجال جزئي $[x1, x2]$ ضمن المدى العام لتغير المتغير العشوائي X ضمن $[a,b]$ أي:

$$[x1, x2] \subset [a, b]$$

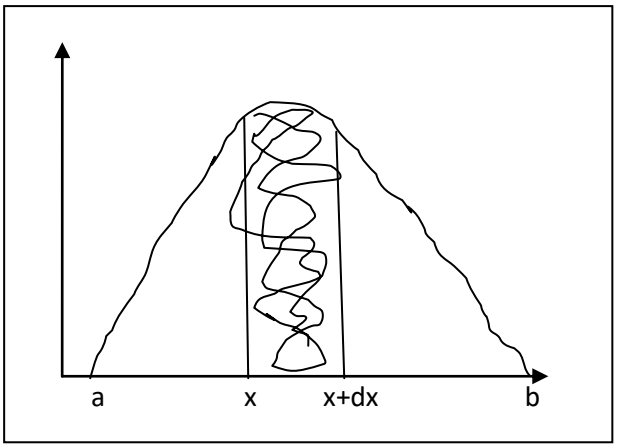
و منه:

$$P(x1 \leq X \leq x2) = \int_{x1}^{x2} f(x)dx$$

حيث أن:

- $f(x)$ تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير
- $f(x)dx$ تمثل احتمال أن ينتمي المتغير العشوائي x الى مجال $[x, x+dx]$ اللامتناهي عند الصفر:

أي: $P(x<X<x+dx)=f(x)\,dx$ و ذلك عندما $(dx \rightarrow 0)$



ملاحظات:

أ -أنه مهما صغر المجال $[x1, x2]$ فهناك أعداد كبيرة من قيم المتغير العشوائي المستمر داخله، و عليه فان احتمال أن يأخذ هذا المتغير قيمة معينة يساوي الصفر، أي أن:

$$\forall\, xi: P(X = xi) = 0$$

و هذا راجع بالاساس الى صفة الاستمرار التي يتمتع بها التابع $f(x)$.

ب - ان الاشارتين $\geq$ ، $>$ و $\leq$ ، $<$ متكافئتين في التوزيعات المستمرة أي:

$$\int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$$

$$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

و هذا يعني أن الرمزين $>, \geq$ أو، $\leq$ ، $<$ يمكن استبدال أحدهما بالاخر دون حرج عند وصف الحوادث، لان ذلك لا يغير القيمة العددية لاحتمال هذه الحوادث.

خواص قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر:

- ان الاحتمالات المقابلة للمجالات الجزئية لا يمكن ان تكون سالبة أي ان:

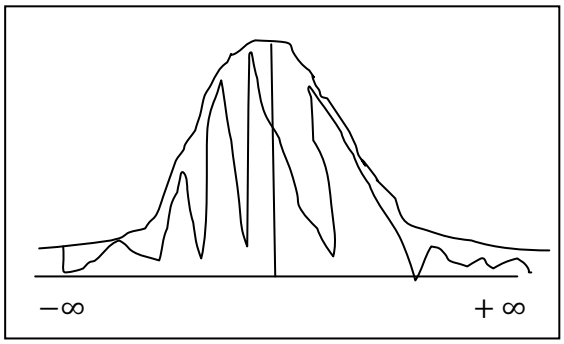
$$\forall\, x \in [a,b], f(x) =\geq 0$$

- ان المجموع الكلي للاحتمالات يساوي 1 أي:

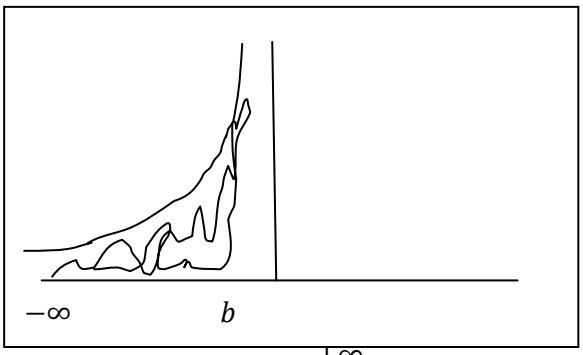
$$\int_D f(x)dx = 1$$

حيث أن D يمثل المجال العام لتغير المتغير المستمر و الذي يمكن ان يكون :

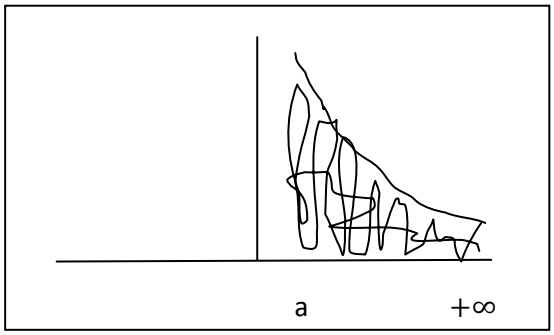
- مجال مفتوح من الطرفين: $D=]-\infty,+\infty[;\ \int_D f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$



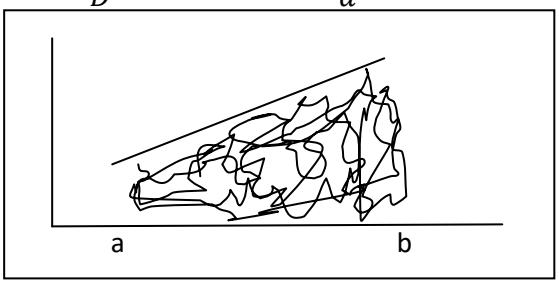
- مجال مغلق من اليمين: $D =]-\infty,b[;\ \int_D f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$



- مجال مغلق من اليسار: $D =]a,+\infty[;\ \int_D f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$



- مجال مغلق من الطرفين: $D =]a, b[;\ \int_D f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$



4-2-ب- تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر:

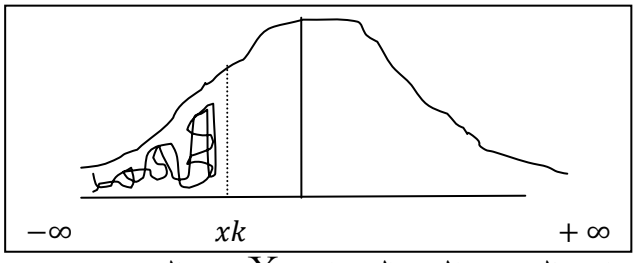
اذا كان X متغير عشوائي مستمر و محددا بقانون التوزيع الاحتمالي (بتابع كثافة احتمالية) f(x)، فيمكننا أن نحدد تابع التوزيع F(x) كما يلي:

$$F(X_k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)dx$$

و هذا يعني ان احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي X_k، أي:

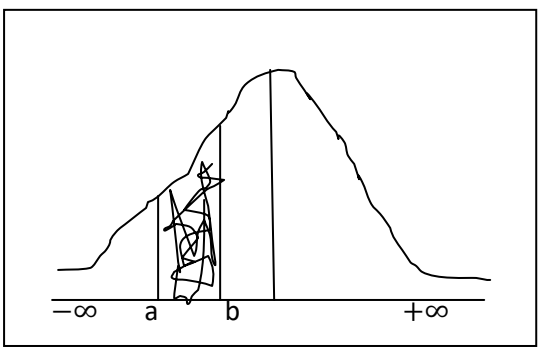
$$F(X_k) = P(X \leq x_k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)dx$$

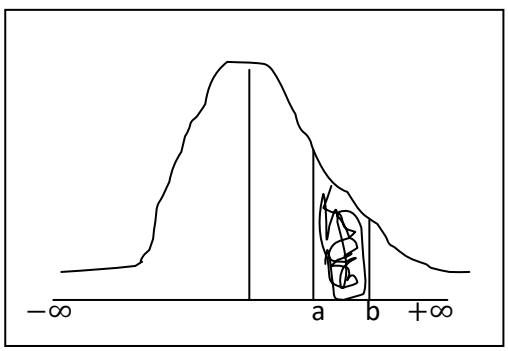
و هذا ما تعكسه المساحة المضللة في الشكل الموالي:



- في حالة ايجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي X في مجال محصور بين قيمتين a و b و حيث أن (a<b) فيحسب هذا الاحتمال كالتالي:

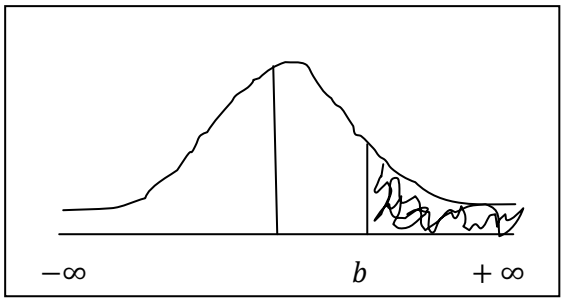
$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$





– أما اذا أردنا أن يأخذ X قيمة لا تقل عن b فان الاحتمال عندها هو:

$$P(X>b)=\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = 1 - F(b)$$



خواص تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر:

1 – أن تابع التوزيع يحقق دوما : $F(X \geq 0)$ و هو متزايد.

2 – أن قيمة تابع التوزيع عند نقطة ($-\infty$) يساوي 0 لان $\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)=$ 0

و لان كذلك عند $-\infty$ متغير عشوائي يعتبر أصغر قيمة و التي لا تشمل أي قيمة ممكنة

3 – أن قيمة تابع التوزيع عند نقطة ($+\infty$) يساوي 1 لان $\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)=$ 1

و لان كذلك عند $+\infty$ متغير عشوائي يعتبر أكبر قيمة و التي تشمل جميع القيمة الممكنة حيث:

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

4 – نستنتج من الخاصة 1 و 2 أن $0 \leq F(x) \leq 1$

2–2–ج– المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر:

1 – **التوقع الرياضي:** يعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر، عرف قانون توزيعه f(x) بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(x)=\int_D x\, f(x)dx$$

2 – **التباين:** في حالة متغير عشوائي مستمر، التباين يكتب بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(x) = \int_D x^2 f(x)dx - [E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$