احتمال و قوانينه

1 - **تعريف الاحتمال**: الاحتمال هو تعبير كمي لحظ او امكانية ظهور نتيجة معينة.

مثلا: التجربة E متمثلة في رمي حجر نرد، فعند ظهور نتيجة معينة فيكون التعبير عنها عن طريق القياس، فهو الاحتمال.

2 - **حساب الاحتمال**:

لدينا تجربة عشوائية E مجموعتها الاساسية (فراغ الحوادث الاولية) هي S مع $S=\{w_1, w_2,\dots w_m\}$ و نفرض أن جميع الحوادث الاولية لها نفس امكانية الظهور معناه لدينا نفس الاحتمال و الذي يساوي $\frac{1}{n}$ حيث n عدد عناصر المجموعة الاساسية S أي أن: $P(w_1)=P(w_2)=\dots\dots=P(w_m)$

اذا كان الحادث A الذي عناصر تنتمي الى المجموعة الاساسية S حيث:

$$A=\{w_1, w_2,\dots w_k\}$$

فاحتمال الحادث A الذي يرمز له بالرمز P(A) يحسب كما يلي:

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الموافقة لـ}A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \quad \text{أو بقراءة أخرى:} \quad P(A)=\frac{\text{عدد الحوادث الاولية التي تنتمي لـ}A}{\text{عدد الحوادث الاولية التي تنتمي لـ}S}$$

أو بصيغة أخرى: $P(A)=\frac{|A|}{|S|}$ و التي تقرأ الاحتمال يساوي كغدينال لـ A (cardinal de A) على كغدينال لـ B (cardinal de B).

3 - **بديهيات الاحتمال**:

البديهية 1: احتمال أي حادث يكون موجب أي يكون محصور بين 0 و 1 و هذا ما يعبر عنه رياضيا بالكتابة التالية: $0 \le P(A) \le 1$

البديهية 2:احتمال المجموعة الاساسية S و الذي يمثل الحادث الأكيد فانه يساوي الواحد أي $P(S)=1$.

البديهية3: احتمال الحادث المستحيل هو 0 الان مجموعة عناصره هي مجموعة خالية أي $P(\emptyset)=0$.

البديهية 4: احتمال الحادث المتمم: لدينا:

$$S= A\cup \bar{A}\text{-----.}(1)$$

و بإدخال الاحتمال على العلاقة (1) فتصبح : $P(S)=P(A\cup \bar{A})$ ----- (2)

بما أن A و $\bar{A}$ حادثان متنافيان (لان $A\cap \bar{A}= \emptyset$) فان:

$$P(A\cup \bar{A}) = P(A)+ P(\overline{A})\text{-----}(3)$$

و بالتعويض3 في 2 تصبح العلاقة كالتالي: $P(S)= P(A)+ P(\overline{A})$

من البديهية 2 : $P(S)=1$ و منه $1= P(A)+ P(\overline{A})$ و بالتالي: $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

4 – القوانين الاساسية في نظرية الاحتمال:

4–1– قانون جمع الاحتمالات: عندم دراسة جمع الاحتمالات يتطلب أن نعرف نوعية الحوادث هل هي متنافية أو غير متنافية.

أ–الحوادث المتنافية: اذا كان A و B حادثين متنافيين، فان تحقق اجتماعهما يساوي مجموع احتمالاتهما أي ان:

$$\boxed{P(A\cup B)= P(A)+ P(B)}$$

بصفة عامة: ان احتمال تحقق اجماع عدة حوادث متنافية يساوي مجموع احتمالات تلك الحوادث أي:

$$P(A_1\cup A_2\cup \ldots..\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots..+P(A_n)$$

أي: $P(\cup_{i=1}^{n} Ai) = \sum_{i=1}^{n}(Ai)$

ب–**الحوادث غير متنافية**:

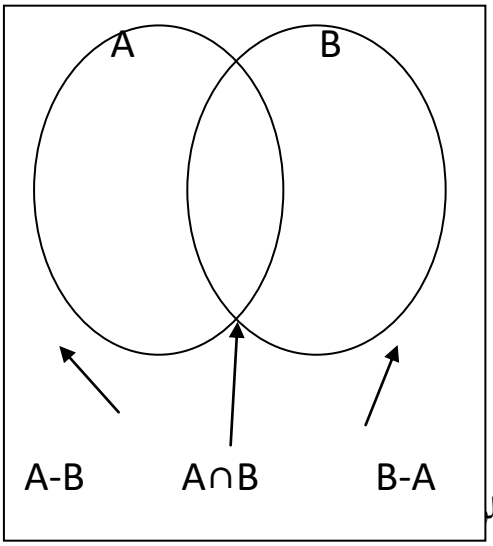
اذا كان لدينا A و B حادثان غير متنافيان، فان احتمال وقوع احدهما هو عبارة عن حاصل جمع احتمال وقوع كل منهما مع ابعاد احتمال وقوعهما معا بآن واحد أي أن:

$$\boxed{P(A\cup B)= P(A)+ P(B)- P(A\cap B)}$$

تعرف هذه الصيغة باسم **قانون العام للجمع**.

برهان على القانون: لدينا حادثان غير متنافيان A و B حيث حسب الشكل نجد:

$$(A\cup B)=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$$



الحادث $(A\cup B)$ يمكن كتابته على أنه اتحاد حادثان متنافيان A و $(B-A)$ أو اتحاد حادثان متنافيان B و $(A-B)$ أي:

$$(A\cup B)= (A-B)\cup B$$

$$=> P(A\cup B)= P[(A-B)\cup B$$

$$=> P(A\cup B)= P(A-B)+P(B)$$

$$=> P(A\cup B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)$$

و منه $P(A\cup B)=P(A) +P(B) -P(A\cap B)$ و هو المطلو

بصفة عامة : يمكن تعميم صيغة الجمع في حالة الحوادث غير المتنافية (قانون العام للجمع) على اكثر من حادثين. فلو أخذنا 3 حوادث AوBوC و اتبعنا الاسلوب نفسه سنحصل على الصيغة التالية:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A) +P(B)+P(C) -P(A\cap B)- P(A\cap C)- P(B\cap C)+ P(A\cap B\cap C)$$

4-2- قانون فرق الحادثين:

يمكن تعبير عن فرق الحادثين A و B بالعلاقة التالية:

$$P(A-B)=P(A\cap \bar{B}) = P(A) - P(A\cap B)$$

برهان على العلاقة:

يمكن كتابة الحادث A على أنه اتحاد حادثين متنافيين $(A-B)$ و $(A\cap B)$ حيث نكتب:

$$A=(A-B)\cup (A\cap B)---------(1)$$

وحسب خاصية جمع الاحتمالات العلاقة (1) تصبح ..... $P(A)=P[(A-B) \cup (A \cap B)]$
ثم نقوم بنشر الاحتمال في طرف الثاني للمعادلة فتصبح..... $P(A)=P(A-B)+ P(A \cap B)$

و منه $P(A-B)=P(A)- P(A \cap B)$ و هو المطلوب.

4-3- الاحتمال الشرطي:

تستخدم نظرية الاحتمال الشرطي عندما يكون لدينا حادث ما يتحقق بتحقق حادث اخر، ويرمز له بـ$P(A/B)$ و الذي يقرأ : احتمال تحقق الحادث A شرط تحقق الحادث B او علما بتحقق الحادث B.

نجد انفسنا أمام حالتين: هل يوجد ارتباط او لا يوجد بين الحادثين Aو B.

- اذا كان Aو B حادثين مستقلين عن بعضهما فانه يكون لدينا:

$$P(A/B) =P(A)$$

و

$$P(B/A)=P(B)$$

- اذا كان Aو B حادثين غير مستقلين عن بعضهما فانه يكون لدينا:

$$P(A/B) \neq P(A)$$

و

$$P(B/A)\neq P(B)$$

أ - الحوادث غير مستقلة:

اذا كان لدينا حادثين Aو B و كان وقوع الحادث B مشروط بوقوع الحادث A، فان احتمال وقوعهما معا يساوي جداء وقوع الاول بالاحتمال وقوع الثاني بعد وقوع الاول. و يمكن تعبير عن ذاك كما يلي:

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B/A)$$

أو

$$P(A\cap B)=P(B)*P(A/B)$$

و تسمى هذه العلاقة **بقاعدة الضرب** بحيث $P(A)*P(B/A)=P(B)*P(A/B)$

- اذا كان $P(B)\neq 0$، فان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث A بعد معرفة وقوع الحادث B يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- اذا كان $P(A)\neq 0$، فان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث A بعد معرفة وقوع الحادث B يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

- اذا كان لدينا A و B حادثين متنافيين و حادث C غير مستقل عن A و B، فان:

$$P[(A\cup B)/C]= P(A/C) + P(B/C)$$

ب– الحوادث المستقلة:

ان احتمال وقوع حادثين مستقلين أو أكثر معا في آن واحد يساوي الى حاصل ضرب وقوع كل منهما، حيث نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)$$

و هي علاقة مستخلصة مباشرة من قاعدة ضرب الاحتمالات.

برهان على العلاقة :اذا كان لدينا A و B حادثين مستقلين فأن:

$$P(A)=P(A/B) \text{ --------(1)}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ ---------(2)}$$

من (2) نجد :

$$P(A\cap B)=P(A/B) * P(B) \text{ ---------(3)}$$

نعوض (1) في (3) نجد :

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)$$

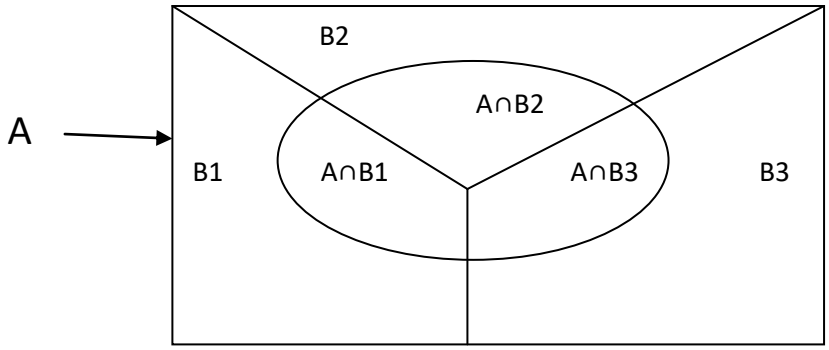
4-5- الاحتمال الكلي:

في حالات كثيرة قد يكون وقوع حادث ما مثلا الحادث A مرتبط بتجربة E، لا يتحقق الا بتحقق أحد الحوادث المتنافية $B_1,B_2,B_3, \ldots\ldots,B_n$ و التي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية S.

ونقول أن الحوادث : $B_1,B_2,B_3, \ldots\ldots,B_n$ انها تشكل تجزئة للمجموعة الكلية S اذا تحققت الشروط التالية:

- $\forall i : 0 \leq P(Bi) \leq 1$
- $i \neq j: (Bi \cap Bj) = \emptyset$ و هذا يعني ان هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى.
- $B1 \cup B2 \cup \ldots \cup Bn = S$ أي $\coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Bi} = \mathrm{S}$

و لنفرض أنه لدينا 3 حوادث متنافية B_1,B_2,B_3، حيث تشكل المجموعة الكلية S و كان الحادث A لا يتحقق الا بتحقق أحد الحوادث الجزئية الثلاثة كما هو موضح في الشكل التالي:



من الشكل نجد :$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup (A\cap B_3)$

نلاحظ أن الحوادث $(A\cap Bi)$ احداث متنافية مثنى مثنى حيث ($i=1\rightarrow 3$) و حسب خاصية جمع الاحتمالات نجد ان: $P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+ P(A\cap B_3)$

و باستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات على $P(A\cap Bi)$ نحصل على :

$$P(A)=P(B_1) .P(A/B_1)+ P(B_2) .P(A/B_2)+ P(B_3) .P(A/B_3)$$

و التي تكتب على شكل عام: $P(A)=\sum_{i=1}^{3} p(Bi).P(^{A}/_{Bi})$

و تدعى هذه العلاقة بالاحتمال الكلي.

4-6- دستور بايـــــــز (Théorème de Bayes)

تعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة، و هي تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية التي تشكل مجموعة كلية و مرافقة لحادث A .

لنفرض أنه لدينا مجموعة الحوادث المتنافية $B_1,B_2,B_3, \ldots\ldots,B_n$ و التي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية S و A حادثا ما يمكن أن يتحقق فقط بتحقق أحد الحوادث: $B_1,B_2,B_3, \ldots\ldots,B_n$ و نريد حساب الاحتمالات الشرطية التالية: $P(Bi/A)$.

- لدينا حسب قانون احتمال تقاطع الحوادث غير مستقلة:

$$P(A\cap Bi)= P(A) .P(Bi/A)=P(Bi).P(A/Bi)$$

أي

$$P(A) .P(Bi/A)=P(Bi).P(A/Bi)$$

و لنقسم طرفي المعادلة على $P(A)$ علما أن $P(A)>0$ فنجد :

$$P(Bi/A)=\frac{P(Bi).P(^A/_{Bi})}{P(A)}----------(1)$$

و بما أن الحوادث $A,B_1,B_2,B_3, \ldots\ldots,B_n$ تحقق شروط الاحتمال الكلي، و عليه :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} p(Bi).P(^A/_{Bi})------(2)$$

و بالتعويض (2) في (1) ينتج لدينا:

$$P\left(^{Bi}/_A\right)=\frac{P(Bi).P(^A/_{Bi})}{\sum_{i=1}^{n} p(Bi).P(^A/_{Bi})}$$

تدعى هذه العلاقة بدستور بايـــــز