Université Djilali BOUNAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : 1ème année LMD
Année : 2021 – 2022
Matière : Algèbre 2

Série 1: Espaces vectoriels

Exercice 1.

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\,(u_1, u_2)$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\,(u_1, u_2)$?

Exercice 2.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$.

L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et v_1, v_2, v_3 et v_4 une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(v_1, 2v_2, v_3)$
2. (v_1, v_3)
3. $(v_1, v_1 + 2, v_4)$
4. $(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$.
5. $(2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1)$

Exercice 4.

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = Vect((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, 5))$$

$$G = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4))$$

Exercice 5.

Soient $a = (2, 3, -1), b = (1, -1, -2), c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$.

Soient $E = Vect(a, b)$ et $F = Vect(c, d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

Exercice 6.

On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 0, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $Vect\,(v_1, v_2)$ et $Vect\,(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $Vect\,(v_1, v_3, v_4)$ et $Vect\,(v_2, v_5)$.
3. Même question pour $Vect\,(v_1, v_2)$ et $Vect\,(v_3, v_4, v_5)$

Exercice 7.

1. Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2. Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 2x, z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.

Soient $E = Vect(a,b,c,d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$a = (2,-1,-1); \quad b = (-1,2,3); \quad c = (1,4,7); \quad d = (1,1,2)$$

1. Est-ce que (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a,b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.

Soit $E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$

On admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E.
2. Compléter cette base de E en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice 11.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 12.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, sont-elles linéairement indépendantes?

Exercice 13.

Soient $f(x) = \cos(x), g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $Vect(f,g,h)$.