Semestre: 2
Unité d'Enseignement: UEM 1.2
Matière 1: **Méthodes des éléments finis**
VHS: 60h00 (Cours: 1h30, TP: 2h30)
Crédits: 5
Coefficient: 3

Objectifs de l'enseignement:

L'objectif de ce cours est d'enseigner la méthode des éléments finis comme une méthode de résolution des problèmes de Mécanique (Génie Civil en particulier) régis par d'équations différentielles aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. Le but est de faire comprendre à l'étudiant le fonctionnement de la méthode en vue de maîtriser sa pratique dans un logiciel (Modélisation Numérique).

Connaissances préalables recommandées:

Méthodes Numériques; Résistance des Matériaux ; Elasticité.

Contenu de la matière:

Chapitre 1 : Introduction & Objectifs **(2 semaines)**

Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique
Solutions Exactes Vs Résolution approchée

Chapitre 2 : Éléments Finis en Une Dimension **(5 semaines)**

- Élément ressort (Matrice de rigidité par méthode directe, Assemblage, conditions aux limites, résolution)
- Élément Barre et système Treillis (Formulation variationnelle (forte et faible), Type d'élément (Fonction de forme), Matrice de rigide par le principe travaux virtuel, Assemblage, matrice de transformation conditions aux limites, résolution)
- Élément Finis Poutre et portique (Formulation variationnelle (forte et faible), Type d'élément (Fonction de forme), Matrice de rigide par minimisation de l'énergie potentielle, Assemblage, matrice de transformation conditions aux limites, résolution)

Chapitre 3 : Éléments Finis en Deux et Trois Dimensions **(6 semaines)**

- Interpolation et fonctions de forme (Élément triangulaire à 3 nœuds; Élément triangulaire à 6 nœuds; Élément quadrangulaire à 4 nœuds; Élément solide tétraédrique à 4 nœuds; Élément solide rectangulaire à 8 nœuds).
- Construction de la matrice de rigidité (Élément triangulaire à 6 nœuds; Élément quadrangulaire à 4 nœuds; Élément solide tétraédrique à 4 nœuds)
- Eléments Finis de Flexion des plaques

Chapitre 4 : Éléments Finis en Dynamique **(2 semaines)**

- Construction de l'élément fini en Une Dimension
- Généralisation pour des problèmes tridimensionnels.

Mode d'évaluation:

Contrôle continu : 40% ; Examen : 60%.

Références bibliographiques :

1. *Gouri **Dhatt**, Gilbert **Touzot**, Emmanuel Lefrançois « méthode des éléments finis » hermes science publications-2004.*
2. Olek C **Zienkiewicz**, Robert L Taylor, J.Z. Zhu, The finite element method: its basis and fundamentals.ISBN: 978-1-85617-633-0-*Butterworth-Heinemann; 7 edition, 2013*
3. Jacob **Fish**, Ted Belytschko *A First Course In Finite Elements, Wiley, 2007*
4. Christian **Wielgozes** Cours et exercices de résistance de matériaux, élasticité-plasticité, éléments finis. ISBN-10: 2729879315 Ellipses, 2000.
5. Djamel **Ouinas**; Application de la méthode des éléments finis, T1, OPU, Alger 2011.
6. Alaa **Chateauneuf**; Comprendre les élements finis, Ellipes, Paris, 2005.
7. Peter I. **Kattan** : « MATLAB Guide to Finite Elements An Interactive Approach", Springer, 2008.
8. Daryl L. **Logan**: "A First Course in the Finite Element Method", Cengage Learning, 5 édition, 2012.

MEF

Rappel sur les matrices :

Les matrices sont des tableaux où les éléments qui le contiennent sont des scalaires (a_{11}, a_{12},…).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- A matrice de (m) lignes et de (n) colonnes, (m*n) s'appelle la dimension (ordre) d'une matrice.
- Vecteur ligne (-) contient une seule ligne et (n) colonnes, ordre (1*n).
- Vecteur colonne (|) contient (m) lignes et une seule colonne, ordre (m*1).

Exemple :
Soit la matrice :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & x^2 & 2x & 2x+1 \\ x+4 & 5 & x^3 & x \\ 2 & 1+3x^2 & 7x & 1 \end{bmatrix}$$

D est une matrice de dimension (3*4) ; $d_{23} = x^3$; $d_{34} = 1$; $d_{43} \notin D$

Transposé d'une matrice :
$[A]^T$ transposé de la matrice [A].
Vecteur ligne devient vecteur colonne et le contraire par l'opération de transposé.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & \mathbf{10} & 11 & 12 \end{bmatrix} ==> [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & \mathbf{10} \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$; $a_{32} ==> a_{23}$ et A(3*4) ==> A^T (4*3)

Remarques:

- Dans une matrice transposée les coefficients a_{ij} sont égaux aux coefficients a^T_{ji} : ($a_{ij}=a^T_{ji}$).

$$\begin{cases} a_{ij} \in A ==> a^T{}_{ji} \in A^T \\ a_{23} = 7 \in A ==> a^T{}_{32} = 7 \in A^T \end{cases}$$

- Matrice symétrique : c'est une matrice carrée et : $[A]=[A]^T ==> a_{ij} = a_{ji}$

L'addition et la soustraction :

Condition : les matrices doivent être de même ordre.

$$A + B = C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Pour l'addition on a : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et même pour C=A-B : $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

La multiplication :

- Condition : il faut que le nombre des colonnes de la $1^{ère}$ matrice soit égale au nombre des colonnes de la $2^{ème}$ matrice. Par conséquent une matrice de (m*n) peut être multipliée par une matrice de (n*q).
- $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \\ 12 & 16 \\ 13 & 17 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 10 + 2\times 11 + 3\times 12 + 4\times 13 & 1\times 14 + 2\times 15 + 3\times 16 + 4\times 17 \\ 5\times 10 + 6\times 11 + 7\times 12 + 8\times 13 & 5\times 14 + 6\times 15 + 7\times 16 + 8\times 17 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 120 & 160 \\ 304 & 408 \end{bmatrix}$$

On remarque que : (2*4)x(4*2) = (2*2) ; (m*n)*(n*q)=(m*q).

Matrice unitaire [I] :

On a : [A]*[I]=[I]*[A]=[A] avec $[I]_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

	$(A*B)^T$ $B^T * A^T$
$(A*B)^T = B^T*A^T$ == >	(m*n)*(n*q) == > (q*n)*(n*m)

$(A*B)^T \neq A^T*B^T \neq C^T$.

Déterminant :

Soit [A] matrice d'ordre 3 tel que : $A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$== > |A| = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} == > |A| = +1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} == > \ |A| = -12$$

Groupe d'équations sous forme matricielle :

Soit le système des équations : $\begin{cases} a_1.x + b_1.y + c_1.z = d_1 \\ a_2.x + b_2.y + c_2.z = d_2 \\ a_3.x + b_3.y + c_3.z = d_3 \end{cases}$;

on peut écrire ce système comme : [A]•{X}={D} … (*) , avec : $[A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$; $\{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$; $\{D\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$;

Pour résoudre le système (*) et calculer {X}, on multiplie l'équation (*) par $[A]^{-1}$ (la matrice inverse).
A^{-1}•A•X = A^{-1}•D == > I•X = A^{-1}•D == > [X] = $[A]^{-1}$•[D]

Soit la relation : K•U = F == > K^{-1}•K•U = K^{-1}•F == > U = K^{-1}•F (rigidité, déplacement, force)

Inverse d'une matrice $[A]^{-1}$:

Il faut que la matrice A soit carrée et $|A| \neq 0$; $[A]^{-1} = (\text{com } A)/|A|$; co-matrice.

Exemple :

Soit : $A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \mathbf{i=1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{matrix} & \mathbf{j=} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix} \end{array}$ calculer $[A]^{-1}$.

1) Calculer |A| ;

$$|A| = +1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(50-48) - 2(40-42) + 3(32-35) \Rightarrow \boldsymbol{|A| = -3}$$

2) Calculer com(A) :

Chercher les signes (+) et (-) pour chaque déterminant : $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+1} = +1$

$$com\ A = \begin{pmatrix} \oplus \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \ominus \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & \oplus \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \ominus \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \oplus \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & \ominus \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \oplus \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \ominus \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & \oplus \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^{-1} = \frac{com\ A}{|A|} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \left(\frac{1}{-3}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 & 1 \\ -2/3 & 11/3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On pout vérifier le produit : $A^{-1}.A = A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]$