Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Filière de Génie Civil

La méthode des Eléments Finis
De la théorie vers la pratique

Cours : 23-09-2020

Fait par:

- **Dr. Azeddine CHEHAT**
- **Dr. Abdellah BOUDINA**

Présenté par**:**

- **Dr. Abdellah BOUDINA**

Plan de l’Exposé

1

2 • Elément finis Barre

3 • Elément finis Structure treillis

4 • Elément finis Poutre

5 • Elément finis Portique

6 • Applications numériques par Matlab

7 • Conclusions Générales et Recommandations

Plan de l'Exposé

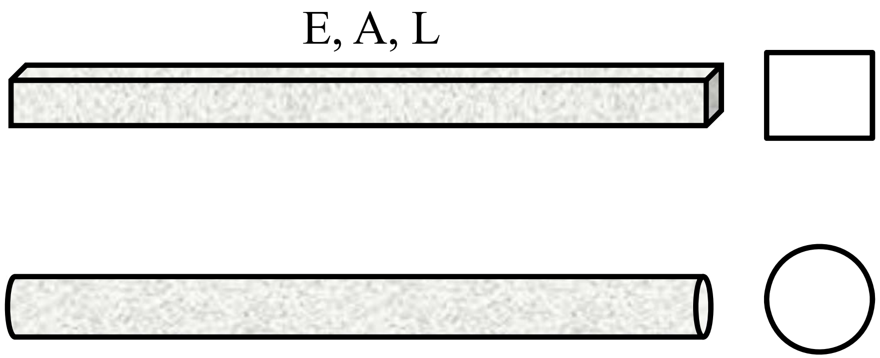
1
2 • **Elément finis Barre**
3
4
5
6
7

- ✓ L'élément finis barre est caractérisé par:

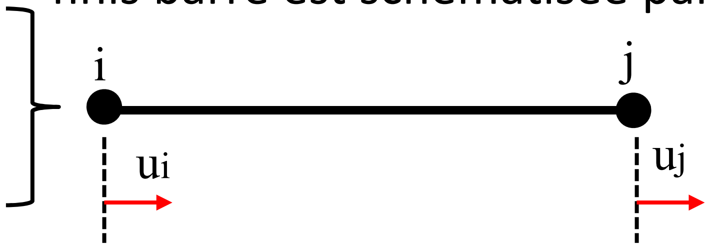
E : Module de Young « nature du matériaux »

L : Longueur de la barre

A: La section transversale de la barre



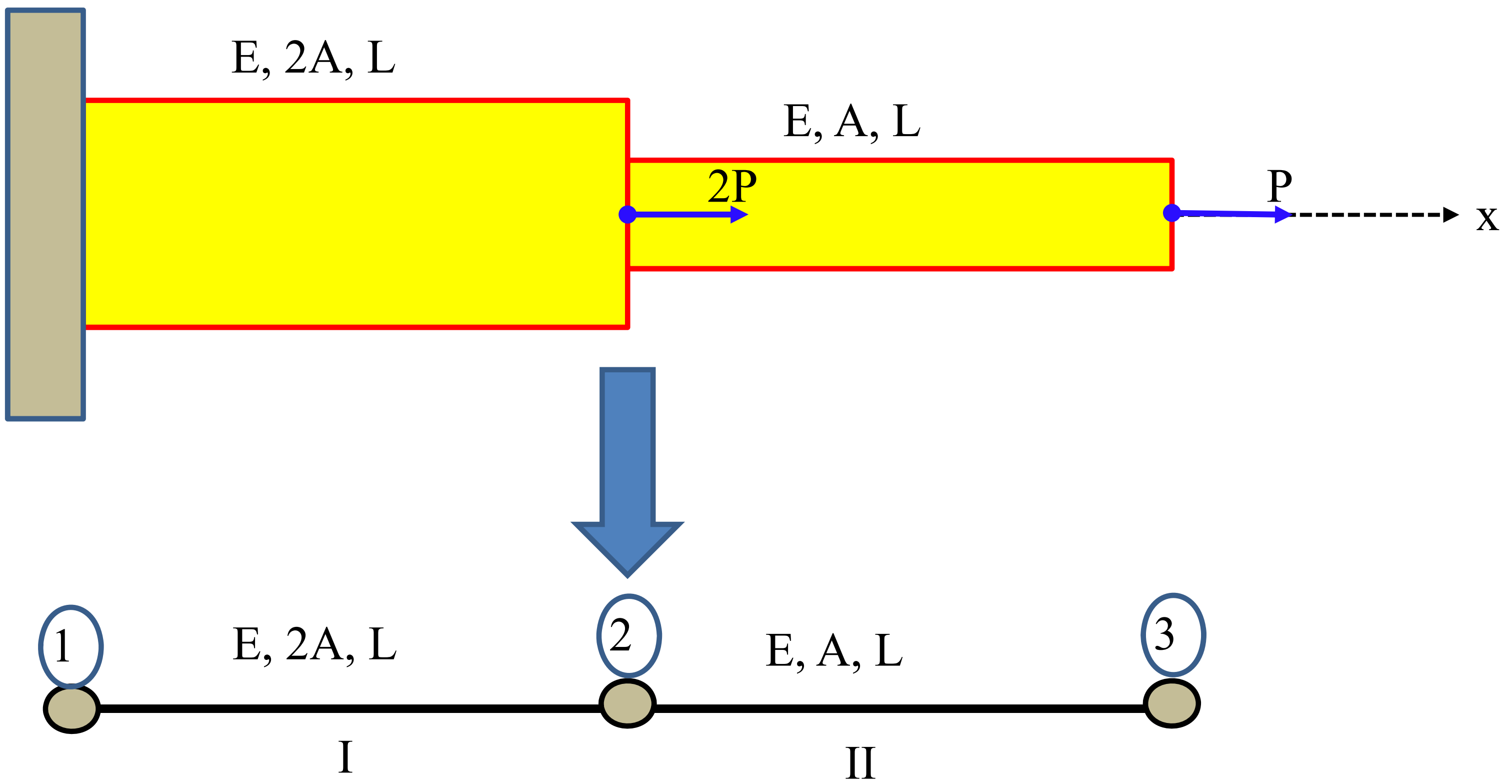
- ✓ La discrétisation par élément finis barre est schématisée par



- ✓ La matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre est d'ordre (2 x 2) donnée par:

$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & \quad j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ j \end{array}$$

Elément finis barre



$$[k_I] = \frac{2EA}{L}\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \qquad [k_{II}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}$$

- ✓ La matrice de rigidité élémentaire de globale est d'ordre (1x N°_Nœud , 1x N°_Nœud)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
[K]=\dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
[K]=\dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & (2+1) & (0-1) \\ 0 & (0-1) & (0+1) \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}
$$

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ✓ L'équation d'équilibre statique est donnée par

- $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{F}\}$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R1 \\ 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

C.A.L: $u_1 = 0$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R1 \\ 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

- ✓ L'équation d'équilibre réduite est donnée donc par

➤ $$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

- ✓ Qui peut s'exprimer par le système d'équation suivant :

✓ $$\begin{cases} 3u_2 - u_3 = \dfrac{L}{2EA}2P \\ -u_2 + u_3 = \dfrac{L}{2EA}\ P \end{cases}$$

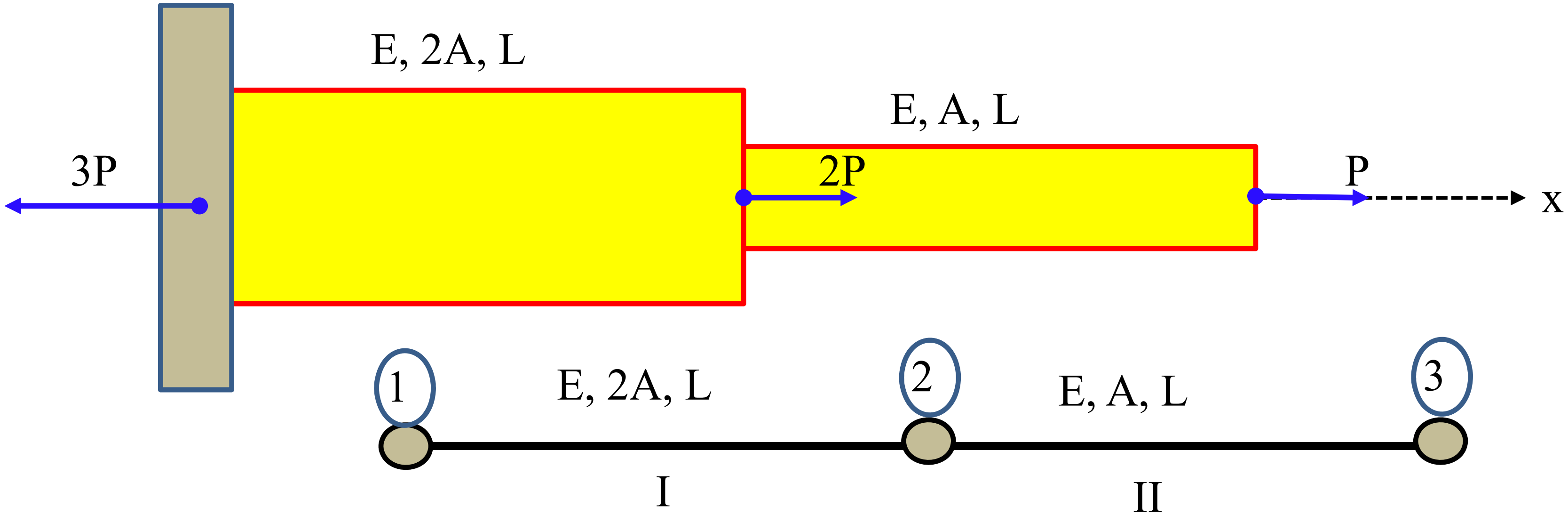
- ✓ Le vecteur de déplacement nodaux après résolution sera:

❖ $$\begin{Bmatrix} u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{2EA} \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

- ✓ Le vecteur de force nodaux est donné par KU=**F**:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 = 0 \\ u2 = \frac{3PL}{2EA} \\ u3 = \frac{5PL}{2EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R1 = -3P \\ 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

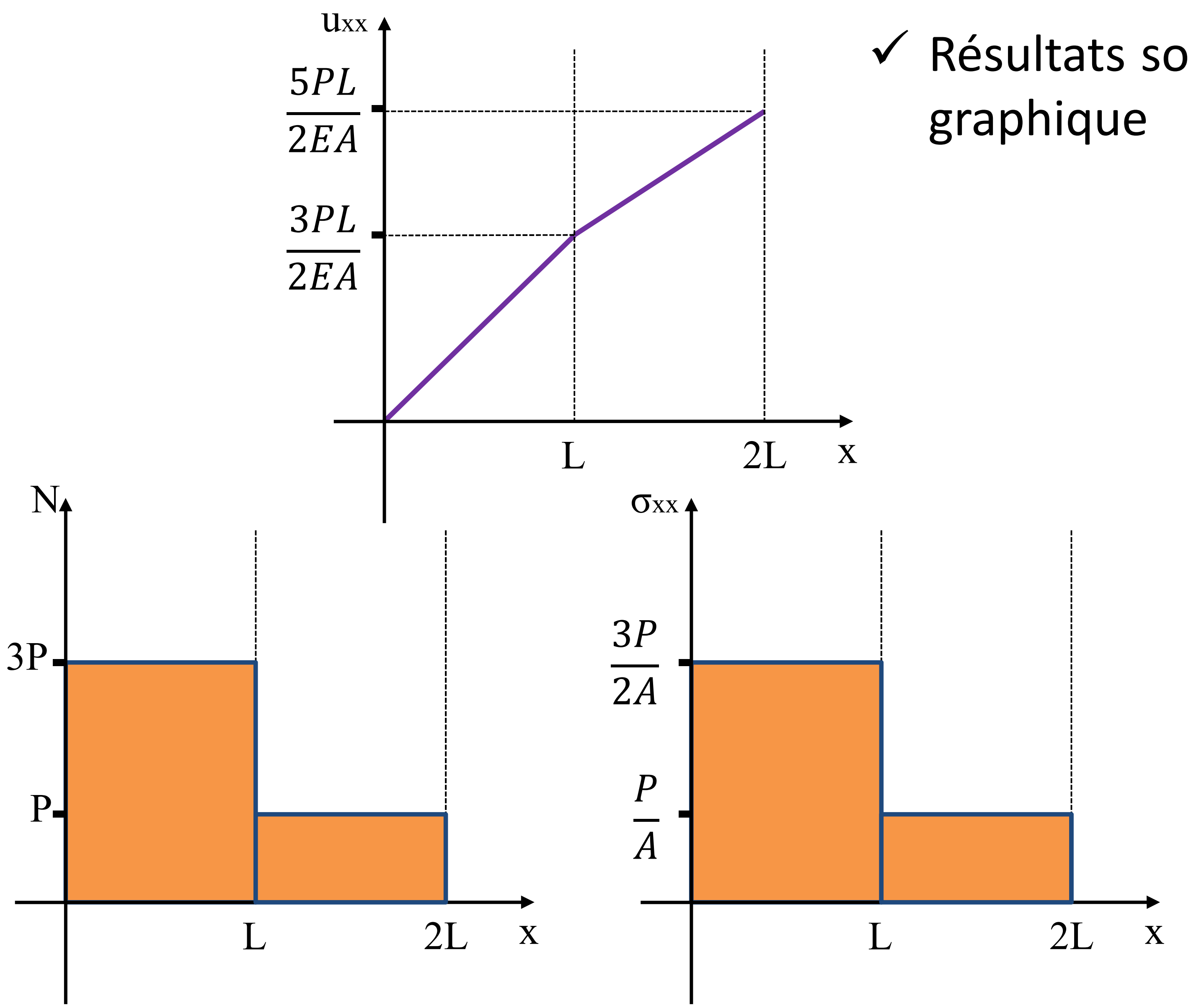
✓ Les forces internes pour chaque élément finis sera:



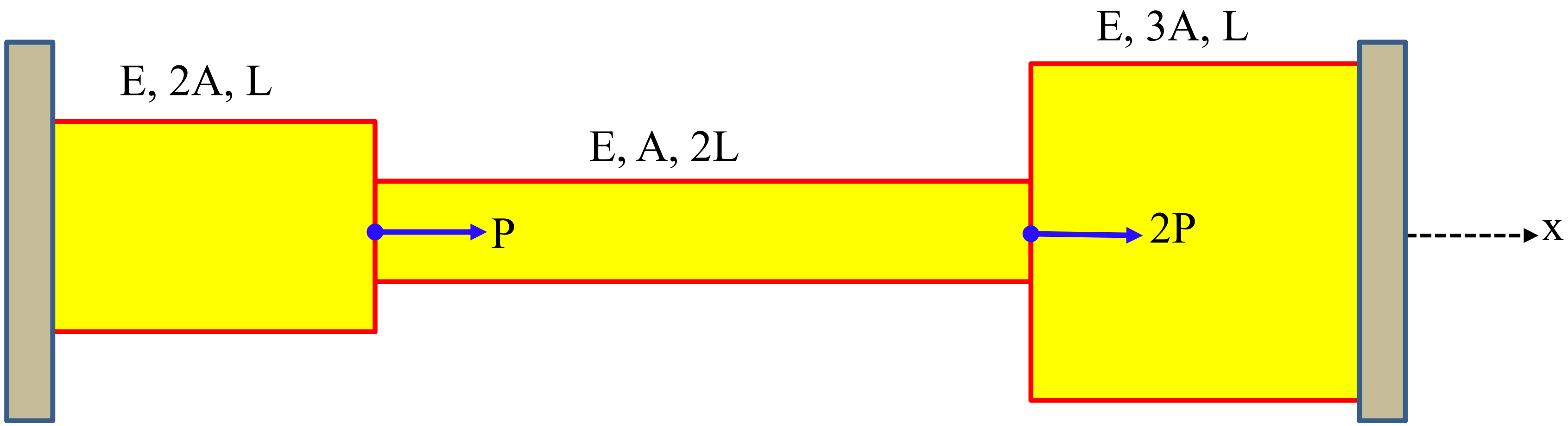
$$\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u1=0\\ u2=\frac{3PL}{2EA}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f1\\ f2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-3P\\ 3P\end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u2=\frac{3PL}{2EA}\\ u3=\frac{5PL}{2EA}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f2\\ f3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-P\\ P\end{Bmatrix}$$

- ✓ Résultats sous forme graphique

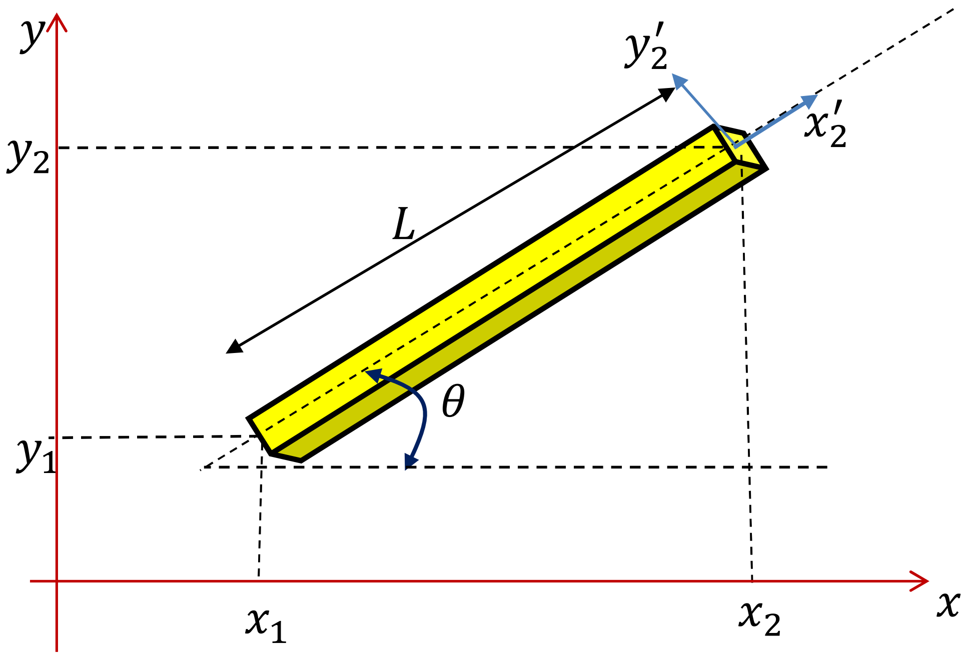


Exemple



Plan de l’Exposé

1
2
3
- **Elément finis Structure treillis**
4
5
6
7



- ✓ La matrice de rigidité élémentaire est donnée par la relation:

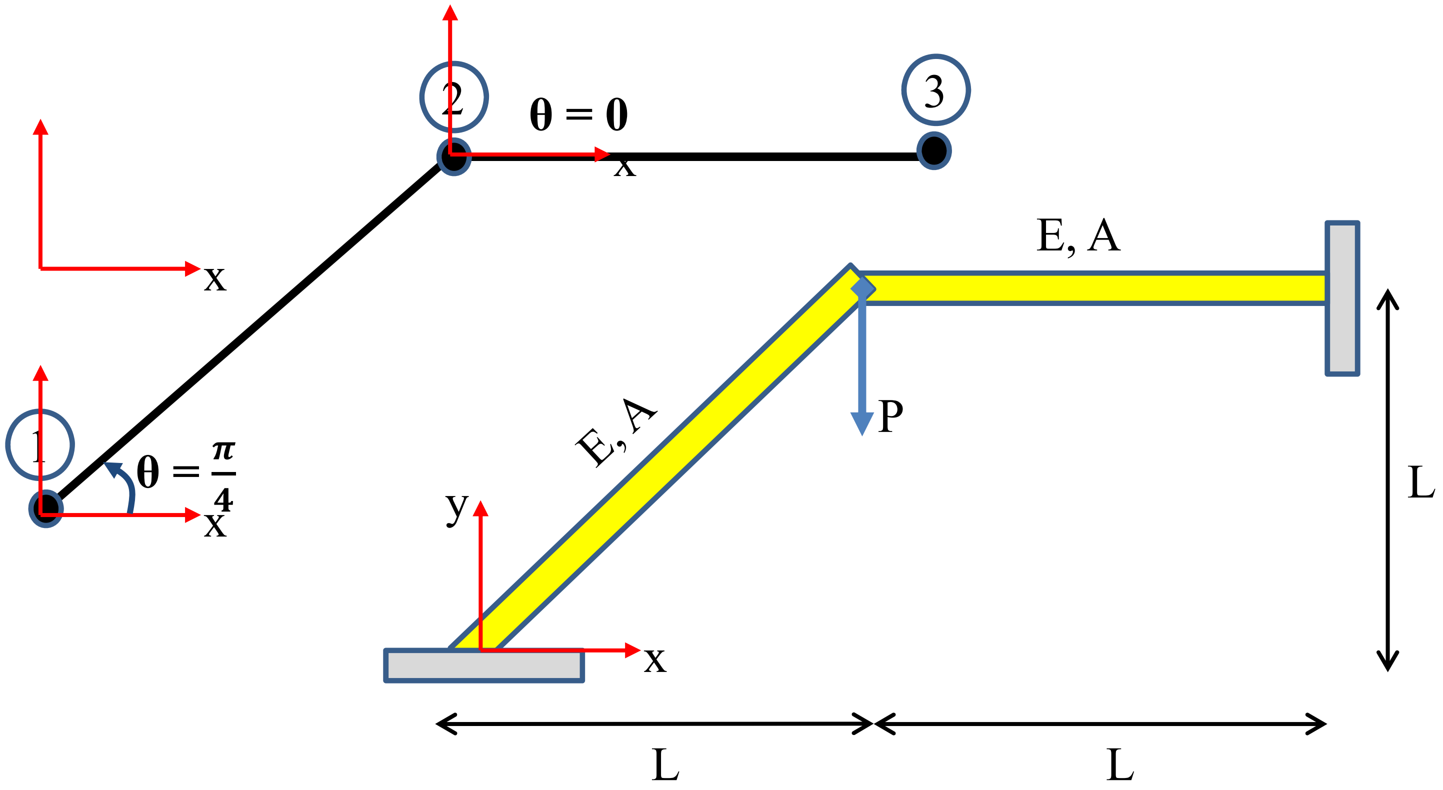
➢ $$[k_e] = \frac{EA}{L}\left[\begin{array}{c|c} k'_e & -k'_e \\ -k'_e & k'_e \end{array}\right]$$

avec:

✓ $$[k'_e] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

Sachant que:

- ❖ $C = \cos\theta$
- ❖ $S = \sin\theta$



Elem	Ni	Nj	Ei	Ai	Li	θi	C	S	C^2	S^2	CS
I	01	02	E	A	$\sqrt{2}L$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
II	02	03	E	A	L	0	1	0	1	0	0

- $[k_I] = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left[\begin{array}{c|c} k'_I & -k'_I \\ -k'_I & k'_I \end{array} \right]$

  - ✓ $[k'_I] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- $$[k_I] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{array}{c c} \begin{matrix} \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{1} & \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{2} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} 2 \end{matrix} \end{array}$$

Elément finis structure treillis

- $[k_{II}] = \frac{EA}{L}\left[\begin{array}{c|c} k'_{II} & -k'_{II} \\ -k'_{II} & k'_{II} \end{array}\right]$

  - ✓ $[k'_{II}] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $$[k_{II}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{2} & & \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{3} & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \end{array}\right\} 2 \\ \left.\begin{array}{c} \\ \end{array}\right\} 3 \end{array} \end{array}$$

- $$[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

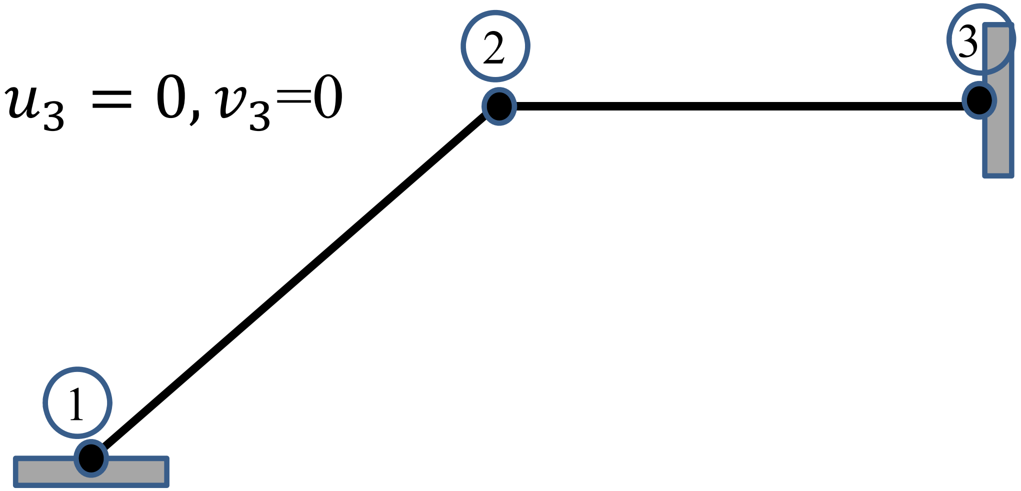
- $$[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 1 & 0-2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-2\sqrt{2} & 0 & 0+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

- $[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{U}\} = \{\boldsymbol{F}\}$

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \\ f6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ 0 \\ -P \\ R3 \\ R4 \end{Bmatrix}$$

C.A.L: $u_1 = 0, v_1=0$, $u_3 = 0, v_3=0$

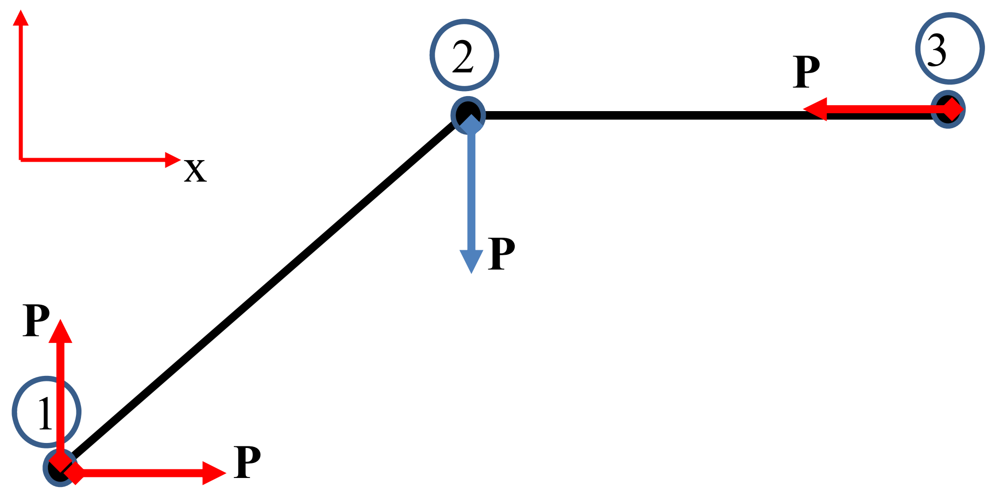


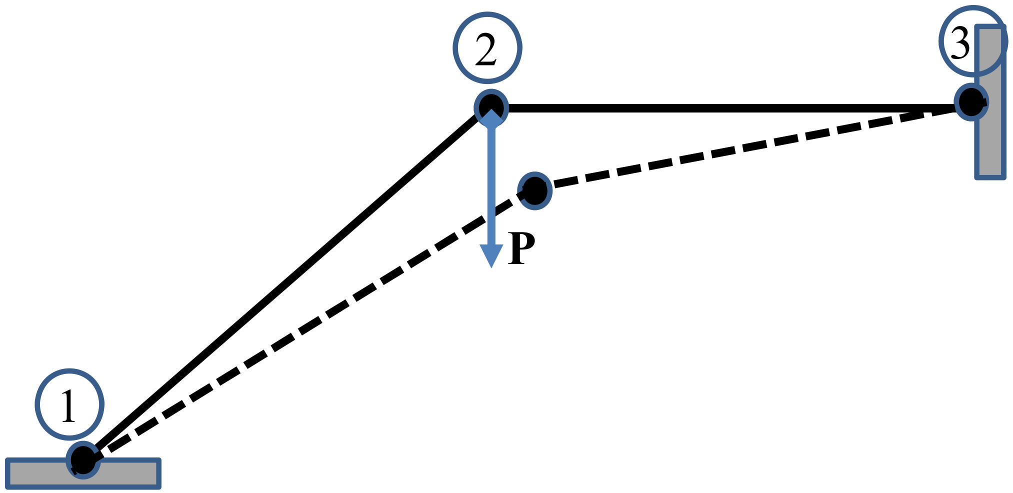
$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \end{Bmatrix} = = \begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ 0 \\ -P \\ R3 \\ R4 \end{Bmatrix}$$

- $$\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}1+2\sqrt{2} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u3\\ v3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -P\end{Bmatrix}$$
  - ✓ $$\begin{cases}\left(1+2\sqrt{2}\right)u_3+v_3=0\\ u_3+v_3=\dfrac{2\sqrt{2}L}{EA}P\end{cases}$$
    - $$\begin{Bmatrix}u_3\\ v_3\end{Bmatrix}=\frac{PL}{EA}\begin{Bmatrix}1\\ -\left(1+2\sqrt{2}\right)\end{Bmatrix}$$

Elément finis structure treillis

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 = 0 \\ v1 = 0 \\ u2 = \frac{PL}{EA} \\ v2 = \frac{-(1+2\sqrt{2})PL}{EA} \\ u3 = 0 \\ v3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R1 \\ R2 \\ 0 \\ -P \\ R3 \\ R4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} \\ \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{P} \\ -\boldsymbol{P} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$





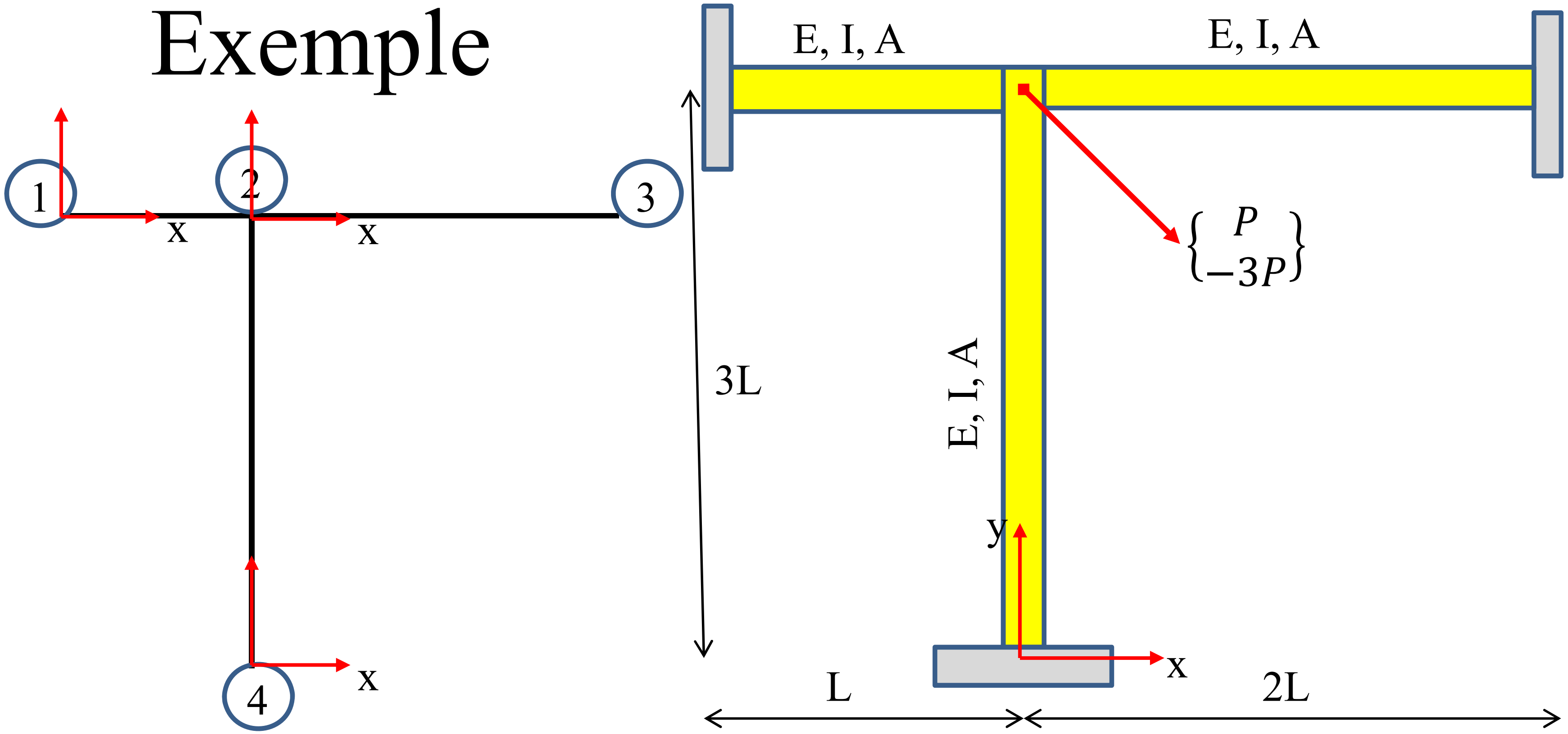
$$\begin{Bmatrix} u1 = 0 \\ v1 = 0 \\ u2 = \frac{PL}{EA} \\ v2 = \frac{-(1+2\sqrt{2})PL}{EA} \\ u3 = 0 \\ v3 = 0 \end{Bmatrix}$$

- $N = \frac{EA}{L}[C\ S]\begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$

- $N_I = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{PL}{EA} \\ \frac{-(1+2\sqrt{2})PL}{EA} \end{Bmatrix} = -\sqrt{2}\mathrm{P}$, Compression

- $N_{II} = \frac{EA}{L}[1\ 0]\begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}[1\ 0]\begin{Bmatrix} \frac{-PL}{EA} \\ \underline{(1+2\sqrt{2})PL} \end{Bmatrix} = -\mathrm{P}$, Compression

Exemple



Elem	Ni	Nj	Ei	Ai	Li	θi	C	S	C^2	S^2	CS
I	01	02	E	A	L	0	1	0	1	0	0
II	02	03	E	A	2L	0	1	0	1	0	0
III	04	02	E	A	3L	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	1	0

Elément finis structure treillis

- $$[k_I] = \frac{EA}{L}\left[\begin{array}{c|c} k'_I & -k'_I \\ -k'_I & k'_I \end{array}\right]$$

  - ✓ $$[k'_I] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $$[k_I] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{matrix} \overbrace{\hphantom{-1 \quad\quad 0}}^{1} & \overbrace{\hphantom{-1 \quad\quad 0}}^{2} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}\right\} 1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}\right\} 2 \end{matrix} \end{array}$$

Elément finis structure treillis

- $$[k_{II}] = \frac{EA}{2L}\left[\begin{array}{c|c} k'_{II} & -k'_{II} \\ -k'_{II} & k'_{II} \end{array}\right]$$

  - ✓ $$[k'_{II}] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $$[k_{II}] = \frac{EA}{2L}\begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\hphantom{-1 \quad 0}}^{2} & \overbrace{\hphantom{-1 \quad 0}}^{3} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\right\} 2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\right\} 3 \end{matrix} \end{array}$$

- $[k_{III}] = \frac{EA}{3L}\left[\begin{array}{c|c} k'_{III} & -k'_{III} \\ -k'_{III} & k'_{III} \end{array}\right]$

  - ✓ $[k'_{II}] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $$[k_{II}] = \frac{EA}{3L} \begin{array}{cc} \begin{matrix} \overbrace{}^{4} & \overbrace{}^{2} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}\right\} 4 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}\right\} 2 \end{matrix} \end{array}$$

$$
[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
$$

- $$[K] = \frac{EA}{L} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

- $$[K] = \frac{EA}{L} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

➢ $$[K] = \frac{EA}{L} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$