

## II.1. Introduction

La poutre est un élément de structure dont les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur et qui est soumis à un système de sollicitation qui le fait fléchir. Nous allons successivement étudier les problèmes de flexion simple d'une poutre dans un plan. Nous nous limitons dans ce paragraphe au cas des structures formées par des poutres droites dont les lignes moyennes sont contenues dans un même plan et chargées par des forces normales ou transversales appartenant à ce plan, ou par des moments perpendiculaires à ce plan. Dans ces conditions, les lignes moyennes restent dans le plan après déformation. Nous utilisons le plan (Oxy) comme plan moyen. Les nœuds associés à l'élément de poutre sont les 2 points de la ligne moyenne situés aux extrémités du tronçon de poutre considéré. Dans un premier temps, nous travaillons dans la base locale de l'élément. Nous donnons ensuite les règles pour passer dans la base globale.

## II.2. Matrice de rigidité élémentaire

Soit l'élément fini poutre représenté sur la figure II.1 avec l'orientation du sens positif des déplacements et rotations verticales (ainsi que l'effort tranchant et moment fléchissant).



**Figure II.1.** Élément poutre et signe conventionnel de l'effort tranchant et moment fléchissant

La déformée est reliée au moment fléchissant par

$$M(x) = -EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.1})$$

La contrainte est donnée par la relation suivante

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y = -yE \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.2})$$

La déformation déduite de l'équation (II.2) est donnée par l'expression (II.3).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.3})$$

Pour la détermination de la matrice de rigidité élémentaire de poutre en suit les étapes suivantes :

### **Etape 01 : Identifier le problème**

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriés pour l'élément. Les vecteurs des déplacements nodaux et des charges nodales pour la poutre  $i$ - $j$  prennent la forme

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} \{U_i^e\} \\ \{U_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad \{f^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_i^e\} \\ \{f_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

### **Etape 02 : Choisir des fonctions de déplacement convenables et relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux**

Cette étape consiste à choisir fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (\text{II.5})$$

où  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  sont des coefficients à déterminer.

Sachant que  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$ , il sort

$$\theta(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (\text{II.6})$$

Au nœud (i),  $x=0$  et donc d'après l'équation (II,5) et (II,6)

- $v(x = 0) = a_1 = v_i$
- $\theta(x = 0) = a_2 = \theta_i$

Au nœud (j),  $x=L$  et donc d'après l'équation (II,5) et (II,6)

- $v(x = L) = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = v_j$
- $\theta(x = L) = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_j$

Cela donne sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

D'après l'équation (II.7), les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  sont déterminés par

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} & \frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

D'après la relation (II.8), le relation (II.5) se réécrit de la façon suivante

$$\begin{aligned} v(x) = & \underbrace{\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_1(x)} v_i + \underbrace{\left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_2(x)} \theta_i + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_3(x)} v_j \\ & + \underbrace{\left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)}_{N_4(x)} \theta_j \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

### **Etape 03 : Relations entre déplacements et déformations**

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Dans notre cas de problème il s'agit des problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de de l'élément et correspondent aux dérivées secondes (Eq. II.3).

D'après l'équation (II.9), l'équation (II.3) devient

$$\{\varepsilon(x, y)\} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \begin{Bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

La matrice  $[B]$  est déduite du vecteur de déformation

$$\begin{aligned} [B] &= -y \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ &= -y \left[ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

La déformation est donnée par l'expression suivante (pour chaque élément)

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

#### **Etape 04 : Relier les charges nodales aux déplacements nodaux**

La matrice de rigidité pour l'élément finis poutre est donnée par

$$\begin{aligned} [k_e] &= \int_V [B]^T E [B] dV \\ &= \int_V y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dV \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Le développement de l'équation (II.13) nous donne

$$\begin{aligned} [k_e] &= \int_V y^2 \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dV \\ &= \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z} \int_L^L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

Finalement la matrice de rigidité de l'élément barre est donnée par l'expression (II.14).

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Le vecteur des forces élémentaires (effort tranchant et moment fléchissant) à la forme suivante

$$\bullet \quad [k_e]\{v\} = \{f\}$$

Donc pour chaque élément on a

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

La matrice de rigidité élémentaire est construite, il reste de faire l'assemblage de ces matrices en une matrice de rigidité globale.

### II.2.1. Exemple 01

Choisissez (en justifiant votre choix) un élément fini pour modéliser la structure bi-articulée de la figure II.2 de longueur totale L.

Calculer en utilisant une modélisation minimale

- les déplacements aux nœuds,
- les réactions aux appuis

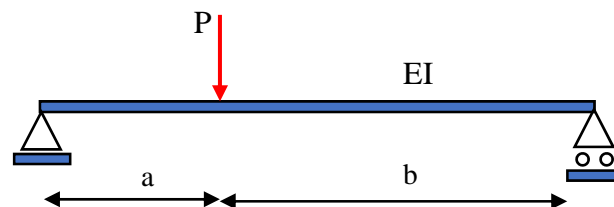


Figure II.2. Poutre bi-articulée.

### Réponse

Le nombre minimal des éléments finis pour modéliser une structure est justifié par le nombre obligatoire des nœuds à maitre à savoir :

- nœuds d'appuis,
- nœuds d'application des forces

Pour cette raison le nombre minimal des nœuds est trois qui donne trois éléments finis type poutre comme le montre la figure II.3.

Il faut commencer par le calcul des matrices de rigidités élémentaires (dans notre cas deux éléments).

La matrice de rigidité pour l'élément I est donnée par

$$[k_{e_I}] = \frac{EI_z}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Tandis que la matrice de rigidité pour l'élément II aura cette expression

$$[k_{e_{II}}] = \frac{EI_z}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix}$$

La technique d'assemblage des matrices élémentaires, nous permet d'avoir la matrice de rigidité globale.

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[K] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & \frac{-12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{12}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément II : 2-3 (N1-N2)

$$[K] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & \frac{-12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3} & \frac{-6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & 0 - \frac{12}{b^3} & 0 + \frac{6b}{b^3} \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & \frac{4a^2}{a^3} + \frac{4b^2}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{2b^2}{b^3} \\ 0 & 0 & 0 - \frac{12}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{12}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} \\ 0 & 0 & 0 + \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{2b^2}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{4b^2}{b^3} \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont :  $v_1 = 0$  et  $v_3 = 0$ .

L'équation d'équilibre statique avec la technique de réduction de l'équation globale est montrée comme suit

$$EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & -\frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{a^3} & -\frac{6a}{a^3} & \frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3} & -\frac{6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & -\frac{12}{b^3} & \frac{6b}{b^3} \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & -\frac{6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & \frac{4a^2}{a^3} + \frac{4b^2}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} & \frac{2b^2}{b^3} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} & \frac{12}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} \\ 0 & 0 & \frac{6b}{b^3} & \frac{2b^2}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} & \frac{4b^2}{b^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 = 0 \\ -P \\ M_2 = 0 \\ F_3 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} \dots (*)$$

L'équation réduite est donc

$$EI_z \begin{bmatrix} \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} & 0 \\ -\frac{6}{a^2} & \frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3} & -\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2} & \frac{6}{b^2} \\ \frac{2}{a} & -\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2} & \frac{4}{a} + \frac{4}{b} & \frac{2}{b} \\ 0 & \frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} & \frac{4}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La résolution du system d'équation réduite donne

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{6EIL} \begin{Bmatrix} -ab(2b+a) \\ -2a^2b^2 \\ 2ab(a-b) \\ ab(2a+b) \end{Bmatrix}$$

L'avant dernière étape est le calcul du vecteur de force nodal (Eq. (\*)) qui comprend les réactions par le biais du vecteur de déplacement (déplacement vertical et rotation) et la matrice de rigidité globale.

$$\begin{Bmatrix} F_1 = R_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 = R_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b}{L}P \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ \frac{a}{L}P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La dernière étape et le calcul des forces internes pour chaque élément.

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = \frac{-Pab(a+2b)}{6EIL} \\ v_2 = \frac{-2a^2b^2}{6EIL} \\ \theta_2 = \frac{P2ab(a-b)}{6EIL} \end{Bmatrix}$$

donc

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{Pb}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{Bmatrix}$$

Tandis que la matrice de rigidité pour l'élément II aura cette expression

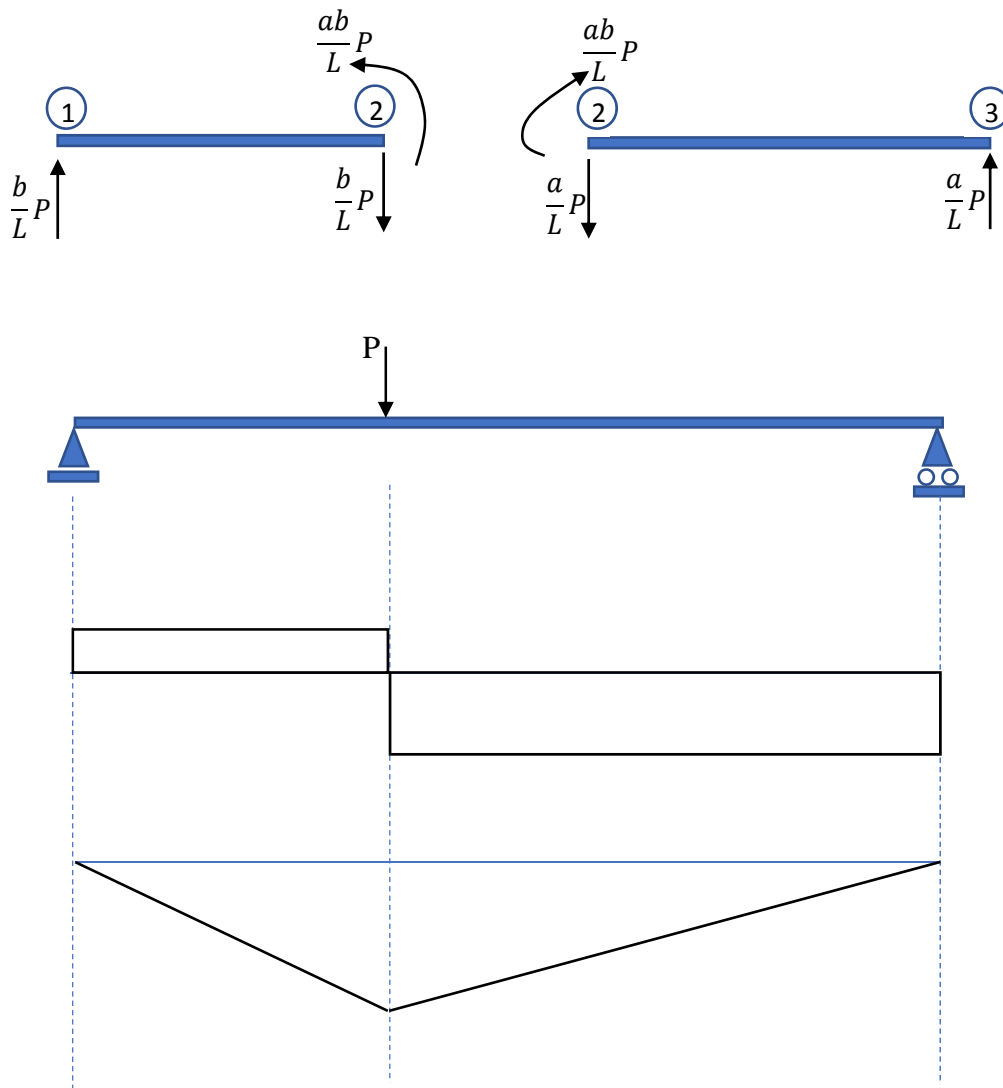
$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ M_2 \\ f_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 = \frac{-2a^2b^2}{6EIL} \\ \theta_2 = \frac{P2ab(a-b)}{6EIL} \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = \frac{Pab(2a+b)}{6EIL} \end{Bmatrix}$$

Finalement, il sort pour l'élément II que

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ M_2 \\ f_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ -b \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Les efforts internes sont schématisés dans la figure suivante.



**Figure II.4.** Diagramme de l'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre bi-articulée composée de deux éléments.

### II.2.2. Exemple 02

Soit la poutre continue, formée de trois éléments et quatre nœuds sollicitée à une charge concentrée localisée à une distance  $L$  par rapport à l'appui 3 (figure II.3), ( $E$  et  $I$  sont constants).

- 1- Déterminer la matrice de rigidité globale du système,
- 2- Calculer les déplacements nodaux et les rotations nodales,
- 3- Déterminer les efforts tranchants, les moments fléchissant et tracer leurs diagrammes,
- 4- Calculer les réactions d'appuis.

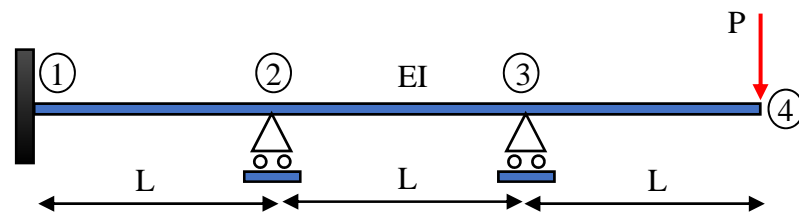


Figure II.2. Poutre continue avec trois éléments.

### Solution

Il faut commencer par le calcul des matrices de rigidités élémentaires (dans notre cas trois éléments). Etant donné que les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les mêmes pour les trois (03) éléments, la matrice de rigidité élémentaire est identique.

$$[k_{e_I}] = [k_{e_{II}}] = [k_{e_{III}}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

La technique d'assemblage des matrices élémentaires, nous permet d'avoir la matrice de rigidité globale.

$$[K] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

exemple on a :  $v_1 = \theta_1 = v_2 = v_3 = 0$ .

L'équation d'équilibre donne

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ 0 \\ R_3 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elimination des  
lignes et colonnes  
des nœuds bloqués

L'équation réduite est donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 & 0 & 0 \\ 2L^2 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La résolution du système d'équation nous donne

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{EI_z} \begin{Bmatrix} \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{13L}{21} \\ \frac{11}{14} \end{Bmatrix}$$

Après détermination du vecteur  $\{u\}$  qui comprend les déplacements et les rotations à chaque nœud de l'élément, l'étape suivante est de déterminer l'effort tranchant et le moment fléchissant à chaque élément et donc de tracer ces derniers pour chaque élément.

Elément I : 1-2 (N1-N2)

Dans ce cas,  $\{u_I\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$ , l'effort tranchant et le moment tranchant au niveau des nœuds 1 et

2 pour l'élément I est donné par la relation suivante

$$[k_{e_I}]\{u_I\} = \{F_I\}$$

donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 = \frac{PL^2}{14EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Il sort

$$\{F_I\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{7}P \\ \frac{1}{7}PL \\ -\frac{3}{7}P \\ \frac{2}{7}PL \end{Bmatrix}$$

Elément II : 2-3 (N1-N2)

Dans ce cas,  $\{u_{II}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$ , l'effort tranchant et le moment tranchant au niveau des nœuds 2 et

3 pour l'élément II est donné par la relation suivante

$$[k_{e_{II}}]\{u_{II}\} = \{F_{II}\}$$

donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 = 0 \\ \theta_2 = \frac{PL^2}{14EI_z} \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = \frac{-4PL^2}{14EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2 \\ M_2 \\ R_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Il sort

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ M_2 \\ R_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-9}{7}P \\ \frac{-2}{7}PL \\ \frac{9}{7}P \\ \frac{-7}{7}PL \end{Bmatrix}$$

Élément III : 3-4 (N1-N2)

Dans ce cas,  $\{u_{III}\} = \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$ , l'effort tranchant et le moment tranchant au niveau des nœuds 3

et 4 pour l'élément III est donné par la relation suivante

$$[k_{e_{III}}]\{u_{III}\} = \{F_{III}\}$$

donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 = 0 \\ \theta_3 = \frac{-4PL^2}{14EI_z} \\ v_4 = \frac{-13PL^3}{21EI_z} \\ \theta_4 = \frac{-11PL^2}{14EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_3 \\ M_3 \\ R_4 \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Il vient

$$\begin{Bmatrix} R_3 \\ M_3 \\ R_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{7}{7}P \\ \frac{7}{7}PL \\ \frac{-7}{7}P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La dernière étape consiste à implanter graphiquement le moment fléchissant et l'effort tranchant pour chaque élément et donc pour la poutre continue (figure II. 3).

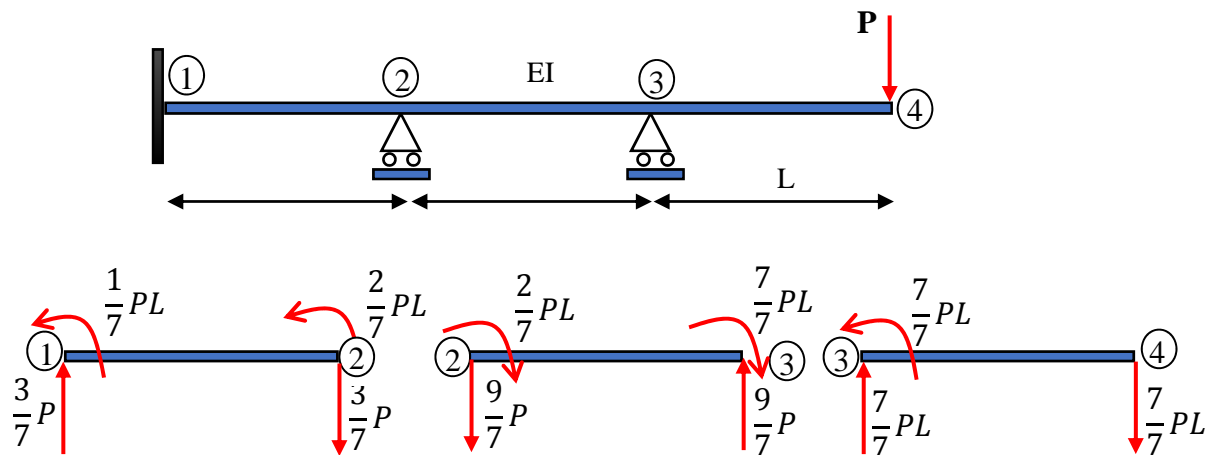


Figure II.3. Forces nodales pour chaque élément.

Le digramme de l'effort tranchant et le moment fléchissant sont schématisés dans la figure II.4.

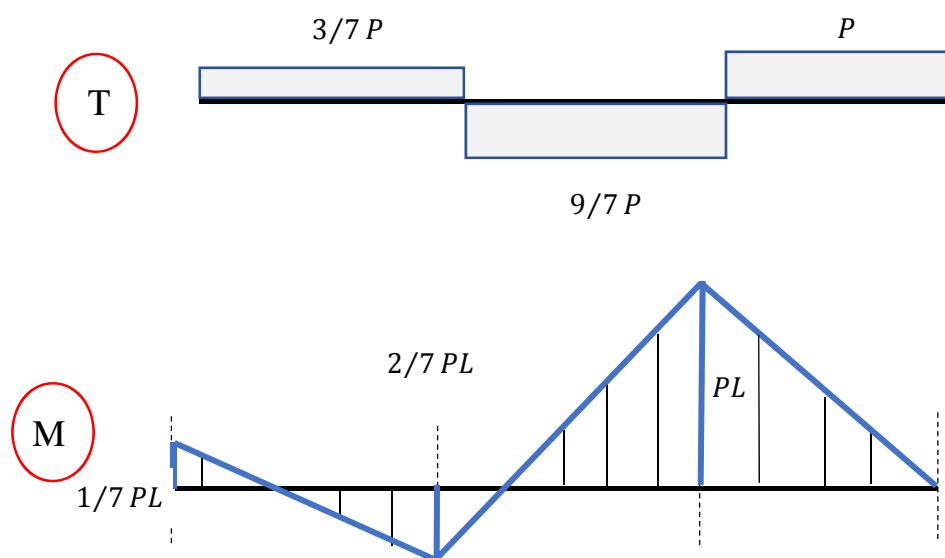


Figure II.4. Diagramme de l'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre continue composée de trois éléments.

## Analyse numérique par MATLAB

La fonction qui détermine la matrice de rigidité élémentaire est donnée par

```
function y = POUTRE_ke(E,I,L)
%Calcul de la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre
y=[12 6*L -12 6*L; 6*L 4*L^2 -6*L 2*L^2;
   -12 -6*L 12 -6*L; 6*L 2*L^2 -6*L 4*L^2];
y=(E*I/L^3)*y;
return
```

L'assemblage se fait par la fonction suivante

```

function y = POUTRE_K(K,k,ii,jj)
% Assemblage de la matrice de rigidité pour l'élément (ii-jj)
% ii=Ni et jj=Nj

K(2*ii-1,2*ii-1) = K(2*ii-1,2*ii-1)+ k(1,1) ;
K(2*ii-1,2*ii)   = K(2*ii-1,2*ii)  + k(1,2) ;
K(2*ii-1,2*jj-1) = K(2*ii-1,2*jj-1)+ k(1,3) ;
K(2*ii-1,2*jj)   = K(2*ii-1,2*jj)  + k(1,4) ;

K(2*ii,2*ii-1)  = K(2*ii,2*ii-1)+ k(2,1) ;
K(2*ii,2*ii)    = K(2*ii,2*ii)  + k(2,2) ;
K(2*ii,2*jj-1) = K(2*ii,2*jj-1)+ k(2,3) ;
K(2*ii,2*jj)   = K(2*ii,2*jj)  + k(2,4) ;

K(2*jj-1,2*ii-1) = K(2*jj-1,2*ii-1)+ k(3,1) ;
K(2*jj-1,2*ii)  = K(2*jj-1,2*ii)  + k(3,2) ;
K(2*jj-1,2*jj-1) = K(2*jj-1,2*jj-1)+ k(3,3) ;
K(2*jj-1,2*jj)  = K(2*jj-1,2*jj)  + k(3,4) ;

K(2*jj,2*ii-1)  = K(2*jj,2*ii-1)+ k(4,1) ;
K(2*jj,2*ii)    = K(2*jj,2*ii)  + k(4,2) ;
K(2*jj,2*jj-1) = K(2*jj,2*jj-1)+ k(4,3) ;
K(2*jj,2*jj)   = K(2*jj,2*jj)  + k(4,4) ;

y = K ;
return

```

Pour la détermination du vecteur de force (effort tranchant et moment fléchissant) ainsi que le vecteur de réaction, la fonction suivante fait cette tâche.

```

function [FF,R] = Beam_R(t,p,U,conec,mat,cord)

% FF : forces axiales dans les barres
% R : forces aux niveaux des noeuds d'appuis
% t : table de connectivités des éléments
% p : table des coordonnées des noeuds
% I : inertie des éléments
% E : modules d'élasticité
% U : solution en déplacement

net = size(t,1); % nombre d'éléments total
nnt = 1*size(p,1); % nombre de noeuds total
R = zeros(2*nnt,1); % Forces aux noeuds
for IELEM = 1:net % boucle sur les éléments
N_ELM=conec(IELEM,1);%N° élément
N1=conec(N_ELM,2);% N1
N2=conec(N_ELM,3);% N2
N_MAT=conec(N_ELM,4);% N° du matériaux
E=mat(N_MAT,2); % E
I=mat(N_MAT,3); % S
L=cord(N2,2)-cord(N1,2);
ke = POUTRE_ke(E,I,L);% matrice de rigidité élémentaire
ue = [U(2*N1-1,1) U(2*N1,1) U(2*N2-1,1) U(2*N2,1)]'; % v et theta
fe = ke*ue; % forces élémentaires dans (oxy)
R(2*N1-1,1)= R(2*N1-1,1)+ fe(1,1); % tous les éléments liés au noeud
R(2*N1,1)= R(2*N1,1)+ fe(2,1); % tous les éléments liés au noeud
R(2*N2-1,1)= R(2*N2-1,1)+ fe(3,1); % tous les éléments liés au noeud
R(2*N2,1)= R(2*N2,1)+ fe(4,1); % tous les éléments liés au noeud

```

```

FF(IELEM ,:)=fe;
end % fin de boucle
return

```

Le programme principal incorporant l'élément finis poutre est le suivant

```

%*****
%*****
% ***** METHODE DES ELEMENT FINIS POUR UN ELEMENT POUTRE *****
%***** Fait par Dr. CHEHAT Azeddine *****
%*****
% FICHIER DE DONNE PRIMAIRE
N_NOUED=4;%Nbre noued
N_ELEME=3;%Nbre element
N_CHARG=1;%Nbre charge
N_APPUI=3;%Nbre d'appuis
N_MATER=1;%Nbre Matériaux
% FICHIER DE DONNE EN DETAIL
load cord1.m; cord=cord1(:,:);
load conec1.m; conec=conec1(:,:);
load force_1.m; force=force_1(:,:);
load appuis1.m; appuis=appuis1(:,:);
load materil.m; mat=materil(:,:);
%
T(:,1)=conec(:,2);
T(:,2)=conec(:,3);
P(:,1)=cord(:,2);
P(:,2)=cord(:,3);
K=zeros(2*N_NOUED);%Initialisation de K
L_Max=0;
for IELEM=1:N_ELEME % Boucle sur les éléments
N_ELM=conec(IELEM,1); %Némuros de l'élément
NODE1=conec(N_ELM,2); %Némuros des noeuds de l'éléments
NODE2=conec(N_ELM,3);
N_MAT=conec(N_ELM,4); % Némuros du matériaux
E=mat(N_MAT,2); % E
I=mat(N_MAT,3); % I
L=cord(NODE2,2)-cord(NODE1,2);%L
ke = POUTRE_ke(E,I,L);%Matrice de rigidité élémentaire
K = POUTRE_K(K,ke,NODE1,NODE2);%Assemblage de ke
end
KG=K;% Stokage de K
F=zeros(2*N_NOUED,1);% Initiation du vecteur de force
for NODE=1:N_CHARG
NODE_F=force(NODE,1);%Noued
F(2*NODE_F-1,1)=force(NODE,2);% Fx
F(2*NODE_F,1)=force(NODE,3);% Fy
end
U=zeros(2*N_NOUED,1);% Initiation du vecteur de déplacement
for NODE=1:N_APPUI
NODE_AP=appuis(NODE,1);% Conditions aux limites
CODE_X=appuis(NODE,2);
CODE_Y=appuis(NODE,3);
if (CODE_X==1)
K(2*NODE_AP-1,2*NODE_AP-1)=K(2*NODE_AP-1,2*NODE_AP-1)+1E84;%Ux=0
end
if (CODE_Y==1)
K(2*NODE_AP,2*NODE_AP)=K(2*NODE_AP,2*NODE_AP)+1E84;% Uy=0
end
end
end

```



```

U=K\F;% Calcul du vecteur de déplacement
net = size(T,1);
nnt = size(P,1);
disp(' Résultats de calcul du problème traité -- élément finis poutre -- ')
disp([' Nombre de barres : ',num2str(net)])
disp([' Nombre de noeuds : ',num2str(nnt)])

disp(sprintf('\n Déplacements aux noeuds :'))
disp(sprintf(' Noeud\t\t Uy\t\t\t\t Mx '))

for i=1:nnt
disp(sprintf(' %d\t\t\t\t%+5.4f\t\t\t\t%+5.4f',i,[U(2*i-1) U(2*i)]'))
end
[FF,R] = Beam_R(T,P,U,conec,mat,cord);%Calcul des réaction
disp(sprintf('\n Efforts dans les barres :'))
disp(sprintf(' Barre \t T1 \t\t\t\t M1 \t\t\t\t T2 \t\t\t\t M2'))
for i=1:net
disp(sprintf(' %d\t\t\t\t+1.4E\t\t\t\t+1.4E \t\t\t\t+1.4E \t\t\t\t+1.4E',i,...
[FF(i,1) FF(i,2) FF(i,3) FF(i,4)]' ))
end
disp(sprintf('\n Réactions aux appuis :'))
disp(sprintf(' Appuis\t\t Ry\t\t\t\t\t Mx '))
for NODE=1:N_APPUI
NODE_AP=appuis(NODE,1);
disp(sprintf(' %d\t\t\t\t+1.4E\t\t\t\t+1.4E',NODE_AP,[R(2*NODE_AP-1,1)
R(2*NODE_AP,1)]));

```

Les données de l'application sont :  $L=3\text{m}$ ,  $E=210000\text{MPa}$  et  $I=6\text{E-6}$

Les résultats de l'application du programme sont résumés comme suit

Résultats de calcul du problème traité -- élément finis poutre --

Nombre de barres : 3

Nombre de noeuds : 4

Déplacements aux noeuds :

Noeud	Uy	Mx
1	-0.0000	-0.0000
2	+0.0000	+0.0102
3	-0.0000	-0.0408
4	-0.2653	-0.1122

Efforts dans les barres :

Barre	T1	M1	T2	M2
1	+8.5714E+04	+8.5714E+04	-8.5714E+04	+1.7143E+05
2	-2.5714E+05	-1.7143E+05	+2.5714E+05	-6.0000E+05
3	+2.0000E+05	+6.0000E+05	-2.0000E+05	+2.3283E-10

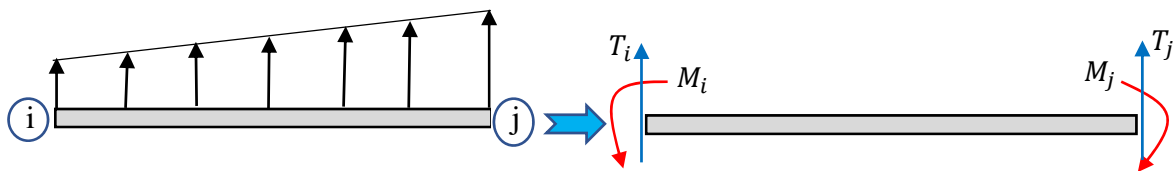
Réactions aux appuis :

Appuis	Ry	Mx
1	+8.5714E+04	+8.5714E+04
2	-3.4286E+05	-5.8208E-11
3	+4.5714E+05	-3.4925E-10

### II.3. Cas d'une charge répartie

Pour la poutre chargée uniformément il y'a une alternative beaucoup plus simple basée sur le principe de superposition, l'élément de poutre de deux nœuds basés sur les fonctions d'interpolations cubiques, donne la solution exacte pour les poutres uniformes soumises aux charges concentrées. La formulation des éléments finis transforme la charge répartie en charges équivalentes et des moments aux nœuds, sachant que les approximations sont limitées au tronçon qui est chargé uniformément. Cette procédure se fait en deux étapes de solution, la première étape consiste à suivre le procédé habituel des éléments finis, avec seulement un élément même pour des tronçons avec les charges réparties. Dans le deuxième étape le tronçon avec la charge répartie est isolé et analysé séparément. Les deux extrémités de ce tronçon isolé sont assignées à des conditions aux limites d'extrémité fixe de sorte que la solution n'affecte pas les déplacements en dehors de ce tronçon. Ceci est connu comme solution de poutre d'extrémité-fixe.

On donne ci-dessous l'expression de  $f_e$  pour un cas de chargement trapézoïdal variant de  $q_1$  à  $q_2$  (figure II.5), Les chargements uniformes et triangulaires ne sont que des cas particuliers du chargement trapézoïdale.



**Figure II.4.** Travail équivalent des charges réparties.

L'expression de la variation de la charge suivant l'axe de la poutre est donnée par

$$q(x) = q_i + (q_j - q_i) \frac{x}{L} \quad (\text{II.16})$$

Le vecteur des forces équivalents (dû à la charge trapézoïdale) est donné par

$$\{f_e\} = \int_L [N]^T q(x) dx \quad (\text{II.17})$$

Il sort

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{bmatrix} \left( q_i + (q_j - q_i) \frac{x}{L} \right) dx \quad (\text{II.18})$$

Après intégration, le vecteur de force équivalent aura l'expression suivante

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 9q_j + 21q_i \\ (2q_j + 3q_i)L \\ 21q_j + 9q_i \\ -(3q_j + 2q_i)L \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

### II.3.1. Application

Déterminer le vecteur de force globale dans l'exemple suivante (figure II.5) sachant que nous avons  $q_2 = 2q_1$ .

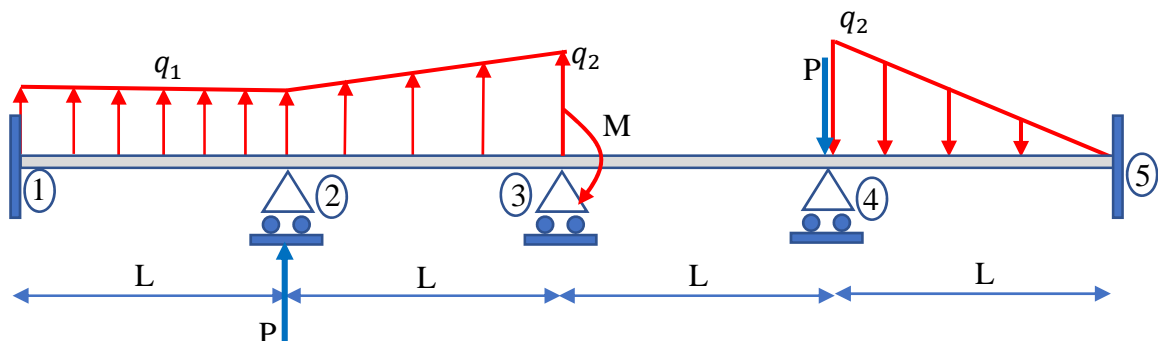


Figure II.5. Poutre continue avec chargement réparties.

### Solution

Le calcul du vecteur équivalent dans chaque élément se fait séparément

Elément I : 1-2 (N1-N2)

Dans cet élément  $q(x) = q_1$ , d'après l'équation (II.19) ( avec  $q_i = q_j = q_1$  ), il sort que le vecteur de changement équivalent est le suivant

$$\{f_{eI}\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 9q_j + 21q_i \\ (2q_j + 3q_i)L \\ 21q_j + 9q_i \\ -(3q_j + 2q_i)L \end{Bmatrix} \rightarrow \{f_{eI}\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 L}{2} \\ \frac{q_1 L^2}{12} \\ \frac{q_1 L}{2} \\ -\frac{q_1 L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Elément II : 2-3 (N1-N2)

Dans cet élément  $q(x) = q_1 + (q_2 - q_1)\frac{x}{L}$ , d'après l'équation (II.19) ( avec  $q_2 = 2q_1$  ), il sort que le vecteur de changement équivalent est

$$\{f_{eII}\} = \begin{Bmatrix} T_2 \\ M_2 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 9q_2 + 21q_1 \\ (2q_2 + 3q_1)L \\ 21q_2 + 9q_1 \\ -(3q_2 + 2q_1)L \end{Bmatrix} \rightarrow \{f_{eII}\} = \begin{Bmatrix} T_2 \\ M_2 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{39q_1 L}{60} \\ \frac{7q_1 L^2}{60} \\ \frac{51q_1 L}{60} \\ -\frac{8q_1 L^2}{60} \end{Bmatrix}$$

Elément III : 3-4 (N1-N2)

Dans cet élément  $q(x) = 0$  d'où  $\{f_{eIII}\} = \{0\}$ .

Elément IV : 4-5 (N1-N2)

Dans cet élément  $q(x) = q_2 - (q_2)\frac{x}{L}$ , d'après l'équation (II.19) ( avec  $q_2 = -2q_1$  et ), il sort que le vecteur de changement équivalent est

$$\{f_{eIV}\} = \begin{Bmatrix} T_4 \\ M_4 \\ T_5 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \frac{L}{60} \begin{Bmatrix} 21q_2 \\ (3q_2)L \\ 9q_2 \\ -(2q_2)L \end{Bmatrix} \rightarrow \{f_{eIV}\} = \begin{Bmatrix} T_4 \\ M_4 \\ T_5 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{42q_1 L}{60} \\ \frac{6q_1 L^2}{60} \\ -\frac{18q_1 L}{60} \\ \frac{4q_1 L^2}{60} \end{Bmatrix}$$

Finalement le vecteur globale équivalent est donné par

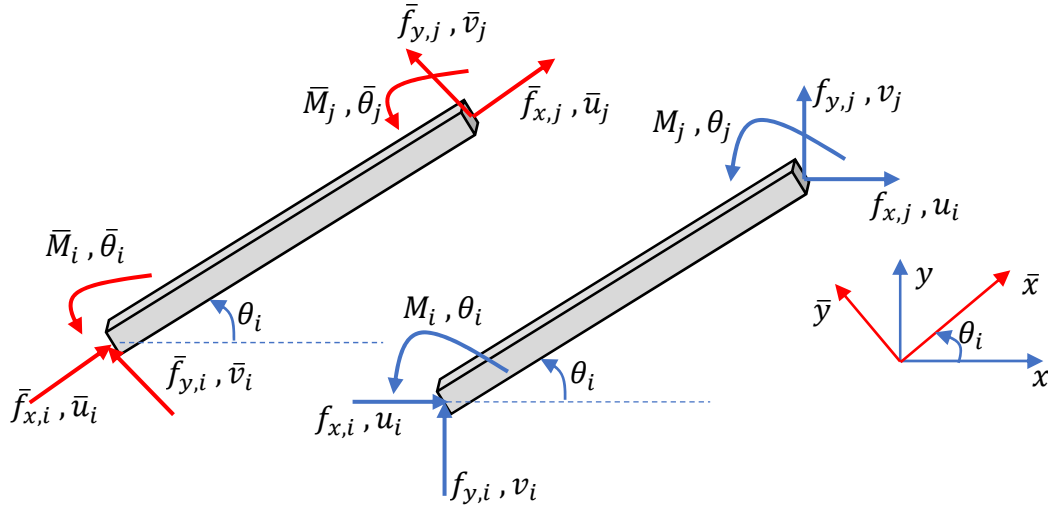
$$\{F_e\} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L}{2} \\ \frac{q_1 L^2}{12} \\ \frac{q_1 L}{2} + \frac{39q_1 L}{60} \\ -\frac{q_1 L^2}{12} + \frac{7q_1 L^2}{60} \\ \frac{51q_1 L}{60} \\ -\frac{8q_1 L^2}{60} \\ \frac{42q_1 L}{60} \\ -\frac{6q_1 L^2}{60} \\ \frac{18q_1 L}{60} \\ \frac{4q_1 L^2}{60} \end{pmatrix}$$

Le vecteur de force globale est donné par

$$\{F\} = \{F_e\} + \{F_n\} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L}{2} \\ \frac{q_1 L^2}{12} \\ \frac{q_1 L}{2} + \frac{39q_1 L}{60} \\ -\frac{q_1 L^2}{12} + \frac{7q_1 L^2}{60} \\ \frac{51q_1 L}{60} \\ -\frac{8q_1 L^2}{60} \\ \frac{42q_1 L}{60} \\ -\frac{6q_1 L^2}{60} \\ \frac{18q_1 L}{60} \\ \frac{4q_1 L^2}{60} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L}{2} \\ \frac{q_1 L^2}{12} \\ \frac{q_1 L}{2} + \frac{39q_1 L}{60} + P \\ -\frac{q_1 L^2}{12} + \frac{7q_1 L^2}{60} \\ \frac{51q_1 L}{60} \\ -\frac{8q_1 L^2}{60} - M \\ \frac{42q_1 L}{60} - P \\ -\frac{6q_1 L^2}{60} \\ \frac{18q_1 L}{60} \\ \frac{4q_1 L^2}{60} \end{pmatrix}$$

## II.4. Elément finis portique

Soit un élément travaillant à la flexion et à la traction avec son axe longitudinal se trouvant le long de l'axe des abscisses  $x$  et qui est montré sur la figure (II.6).



**Figure II.6.** Transformation des systèmes.

En se basant sur la figure (II.6), on déduit les relations des déplacements sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

$[T]$  est la matrice de transformation tel que  $[T]^{-1} = [T]^T$ .

La matrice de rigidité (élément finis portique) dans le repère global est donnée par

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T] = [T]^T \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & -6bL & 4bL^2 \end{bmatrix} [T] \quad (\text{II.21})$$

avec :  $a = \frac{EA}{L}$ ,  $b = \frac{EI}{L^3}$  et  $[\bar{K}]$  est La matrice de rigidité (élément finis portique) dans le repère local.

### II.4.1. Exemple d'application

Soit la structure formée de trois éléments barres et quatre nœuds (figure II.7). Une charge est appliquée au nœud 2 et un couple de moment au nœud 3. La structure possède une section constante A (E et I sont constants).

- 1- Calculer les matrices de rigidités élémentaires,
- 2- Faire l'assemblage des matrices de rigidités élémentaires,
- 3- Déterminer le système d'équation réduit

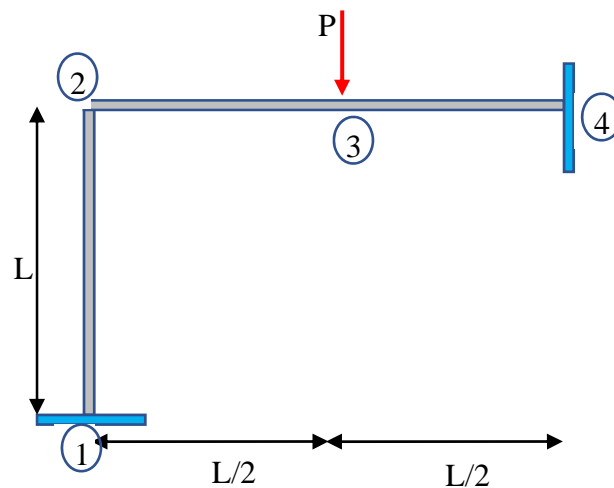


Figure II.7. Portique à trois éléments.

La matrice de rigidité de l'élément I est donnée par

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 \\
 \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\
 \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\
 \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}
 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tandis que la matrice de rigidité de l'élément II et III ont données successivement par

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{2} \qquad \qquad \qquad \textcircled{3} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 & -\frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} \\
 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\
 \hline
 -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} \\
 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L}
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \\
 \\
 \textcircled{3} \qquad \qquad \qquad \textcircled{4} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 & -\frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} \\
 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\
 \hline
 -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} \\
 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L}
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array}
 \end{array}$$

La position de chaque matrice de rigidité élémentaire dans la matrice de rigidité globale est montrée comme suit

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \qquad \qquad \qquad \textcircled{2} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\
 \hline
 -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}
 \end{array}$$



	②			③			
	$\frac{2EA}{L}$	0	0	$-\frac{2EA}{L}$	0	0	
	0	$\frac{96EI}{L^3}$	$\frac{24EI}{L^2}$	0	$-\frac{96EI}{L^3}$	$\frac{24EI}{L^2}$	②
	0	$\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L}$	0	$-\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	
	$-\frac{2EA}{L}$	0	0	$\frac{2EA}{L}$	0	0	
	0	$-\frac{96EI}{L^3}$	$-\frac{24EI}{L^2}$	0	$\frac{96EI}{L^3}$	$-\frac{24EI}{L^2}$	③
	0	$\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L}$	

	③			④			
	$\frac{2EA}{L}$	0	0	$-\frac{2EA}{L}$	0	0	
	0	$\frac{96EI}{L^3}$	$\frac{24EI}{L^2}$	0	$-\frac{96EI}{L^3}$	$\frac{24EI}{L^2}$	③
	0	$\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L}$	0	$-\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	
	$-\frac{2EA}{L}$	0	0	$\frac{2EA}{L}$	0	0	
	0	$-\frac{96EI}{L^3}$	$-\frac{24EI}{L^2}$	0	$\frac{96EI}{L^3}$	$-\frac{24EI}{L^2}$	④
	0	$\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L}$	

La matrice de rigidité globale est donnée par :

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \textcircled{3} & & \textcircled{4} \\ \hline \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{2EA}{L} & 0 + 0 & \frac{6EI}{L^2} + 0 & \frac{-2EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 + 0 & \frac{EA}{L} + \frac{96EI}{L^3} & 0 + \frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{-96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} + 0 & 0 + \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{-24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2EA}{L} & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} + \frac{2EA}{L} & 0 + 0 & 0 + 0 & \frac{-2EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-96EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^2} & 0 + 0 & \frac{96EI}{L^3} + \frac{96EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{-96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 + 0 & \frac{-24EI}{L^2} + \frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} + \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{-24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2EA}{L} & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-96EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^2} & 0 & \frac{96EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array}$$

L'application des conditions aux implique ce qui suit :

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \qquad \qquad \qquad \textcircled{2} \qquad \qquad \qquad \textcircled{3} \qquad \qquad \qquad \textcircled{4} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{2EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 & -\frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} + \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{96EI}{L^3} + \frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} + \frac{24EI}{L^2} & 0 & -\frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} + \frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} + \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{96EI}{L^3} & -\frac{24EI}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{24EI}{L^2} & \frac{8EI}{L}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 u_1 = 0 \\
 v_1 = 0 \\
 \theta_1 = 0 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \theta_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \theta_3 \\
 u_4 = 0 \\
 v_4 = 0 \\
 \theta_4
 \end{array} \right\} =
 \left. \begin{array}{l}
 f_{x1} \\
 f_{y1} \\
 M_1 \\
 f_{x2} = 0 \\
 f_{y2} = 0 \\
 M_2 = 0 \\
 f_{x3} = 0 \\
 f_{y3} = -P \\
 M_3 = 0 \\
 f_{x4} \\
 f_{y4} \\
 M_4 = 0
 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \textcircled{1} \\
 \textcircled{2} \\
 \textcircled{3} \\
 \textcircled{4}
 \end{array}
 \end{array}$$

Finalement, l'équation réduite est donnée par cette expression

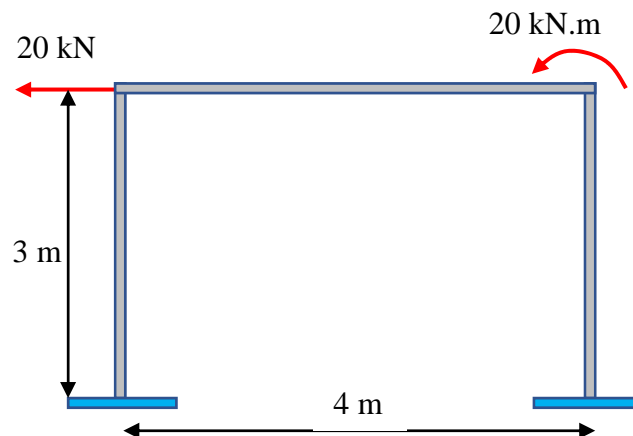
$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + \frac{2EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-2EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} + \frac{96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 & \frac{-96EI}{L^3} & \frac{24EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{24EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} & 0 & \frac{-24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ \frac{-2EA}{L} & 0 & 0 & \frac{4EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-96EI}{L^3} & \frac{-24EI}{L^2} & 0 & \frac{192EI}{L^3} & 0 & \frac{24EI}{L^2} \\ 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & \frac{16EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x2} = 0 \\ f_{y2} = 0 \\ M_2 = 0 \\ f_{x3} = 0 \\ f_{y3} = -P \\ M_3 = 0 \\ M_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

#### II.4.2. Exemple d'application

Soit la structure formée de trois éléments barres et quatre nœuds (figure II.8). Une charge est appliquée au nœud 2 et un couple de moment au nœud 3. La structure possède une section constante A (E et I sont constants).

- 1- Calculer les déplacements nodaux et les rotations nodales,
- 2- Calculer les réactions d'appuis.
- 3- Déterminer les efforts tranchants, les moments fléchissant pour chaque élément

A.N : E=200 GPa ; I= 5\*10<sup>-6</sup> m<sup>4</sup> ; A=6x10 cm<sup>2</sup>.



Le programme principal écrit en MATLAB qui utilise l'élément finis portique pour ce genre de problème (figure II.7), nous donne les résultats suivants :

Résultats de calcul du problème traité -- élément finis portique --

Nombre de barres : 3  
 Nombre de nœuds : 4

Déplacements aux noeuds :

Noeud	Ux	Uy	M
1	-0.0000	-0.0000	+0.0000
2	-0.0397	-0.0000	+0.0082
3	-0.0397	+0.0000	+0.0147
4	-0.0000	+0.0000	+0.0000

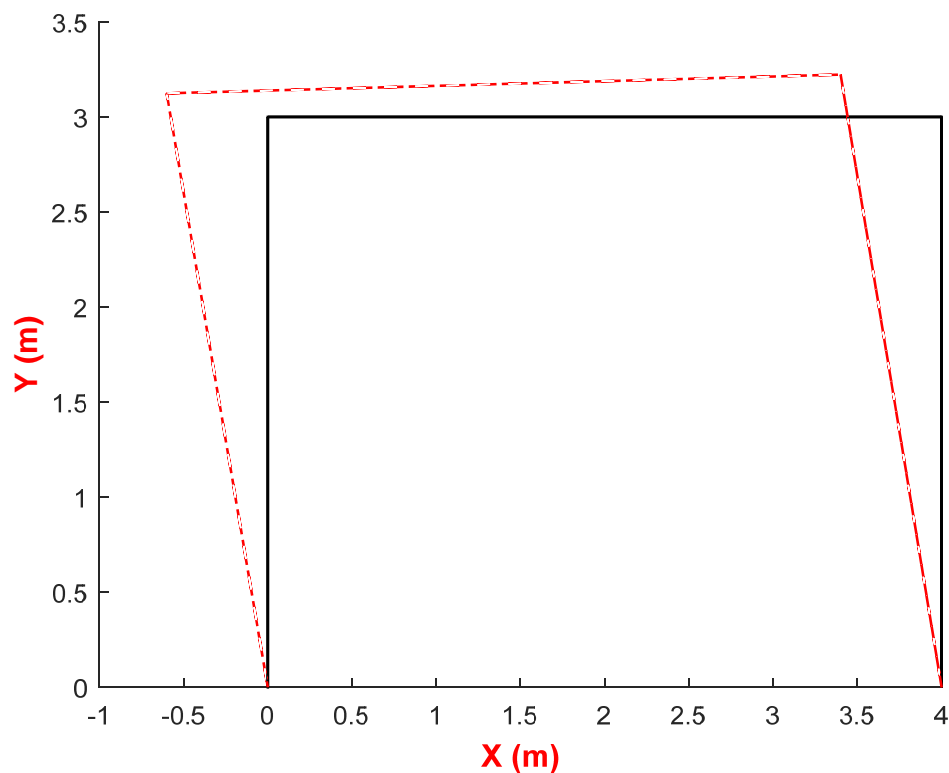
Efforts dans les barres :

Barre	fx1	fy1	M1	fx2	fy2	M2
1	+8.5894E+03	-1.2184E+04	-2.1008E+04	-8.5894E+03	+1.2184E+04	-1.5545E+04
2	-7.8156E+03	+8.5894E+03	+1.5545E+04	+7.8156E+03	-8.5894E+03	+1.8813E+04
3	-8.5894E+03	-7.8156E+03	-6.8129E+03	+8.5894E+03	+7.8156E+03	-1.6634E+04

Réactions aux appuis :

Appuis	Rx	Ry	M
1	+8.5894E+03	-1.2184E+04	-2.1008E+04
4	+8.5894E+03	+7.8156E+03	-1.6634E+04

L'allure de la déformée de la structure est donnée suivant la figure (II.8).



**Figure II.8.** L'allure de la déformée du portique.