I.2. Elément finis structure treillis

Dans la présente étude nous considérons la création d'un modèle par éléments finis d'un système mécanique composé de plusieurs éléments barres en plan est considéré. La discussion est limitée pour les structures treillis, que nous définissons comme structures composées de plusieurs barres élastiques sous aux forces axiales seulement.

Le système global est la référence dans laquelle les déplacements de la structure sont exprimés et habituellement choisis par convention dans la géométrie globale considérée, la liaison physique et la variation de l'orientation géométrique des éléments barres imposent les conditions suivantes :

1. Le déplacement nodal des éléments reliés doit être identique au déplacement du nœud de raccordement dans le système global,
2. Les caractéristiques physiques de chaque élément sous forme de matrice de rigidité et la force élémentaire doivent être transformées au repère global pour représenter les propriétés structurales dans le système global,
3. L'effort axial pour chaque élément est déterminé après la solution du problème dans le système global

L'élément structure treillis (figure I.3) est un élément barre en 2D, donc sa matrice de rigidité s'inspire de la matrice de rigidité de l'élément barre avec un changement d'axe.

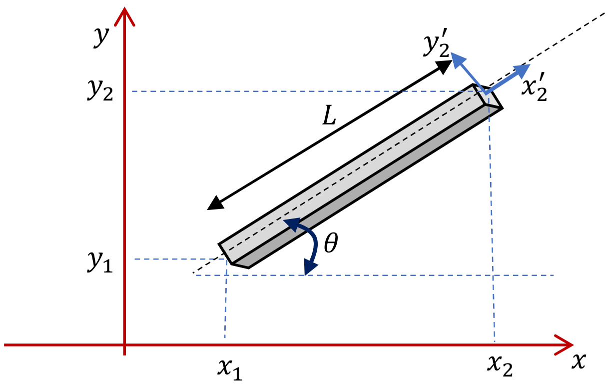


Figure I.3. Elément finis treillis.

La matrice de rigidité de cet élément est donnée par la transformation suivante

$$[k_e] = [T]^T[k_e^b][T] = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

Avec, $[T]$ la matrice de passage où de transformation des déplacement axiaux de l'élément barre aux déplacements globaux, $[k_e^b]$ est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre.

La matrice de rigidité élémentaire $[k_e]$ peut être réécrite de la façon suivante

$$[k_e] = \frac{EA}{L}\left[\begin{array}{c|c} k'_e & -k'_e \\ -k'_e & k'_e \end{array}\right] \qquad (19)$$

avec

$$[k'_e] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

où $C = \cos\theta$ et $S = \sin\theta$

Les inconnus pour chaque nœud sont le déplacement vertical et horizontal.

Il sort que la dimension de la matrice de rigidité élémentaire et d'ordre 4x4, tandis que pour la matrice de rigidité globale son dimension est d'ordre (2xn, 2xn), où n est le nombre des nœuds.

Les forces axiales pour chaque élément sont données par l'expression suivante

$$N = \frac{EA}{L}[C\ S]\begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \qquad (21)$$

I.2.1 Exemple 01 d'application

Soit le système contenant trois barres de la figure I.4. Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité axiale *EA*.

a. Déterminer la matrice de rigidité du système.
b. Calculer les déplacements nodaux
c. Calculer les charges axiales dans les barres.

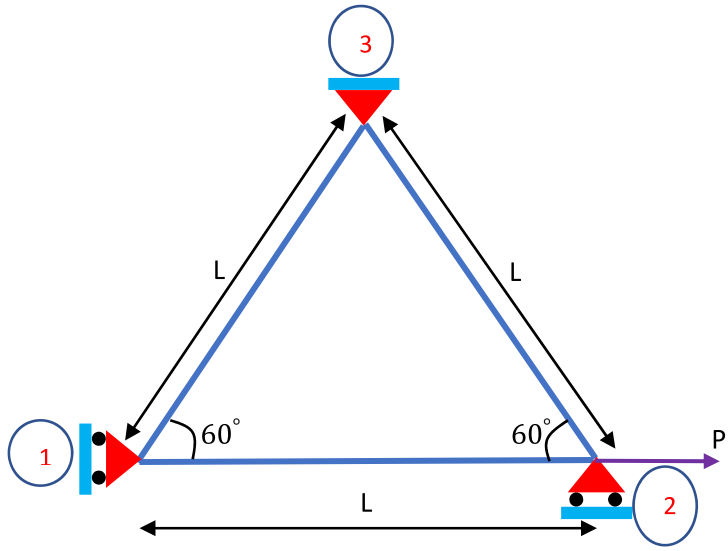
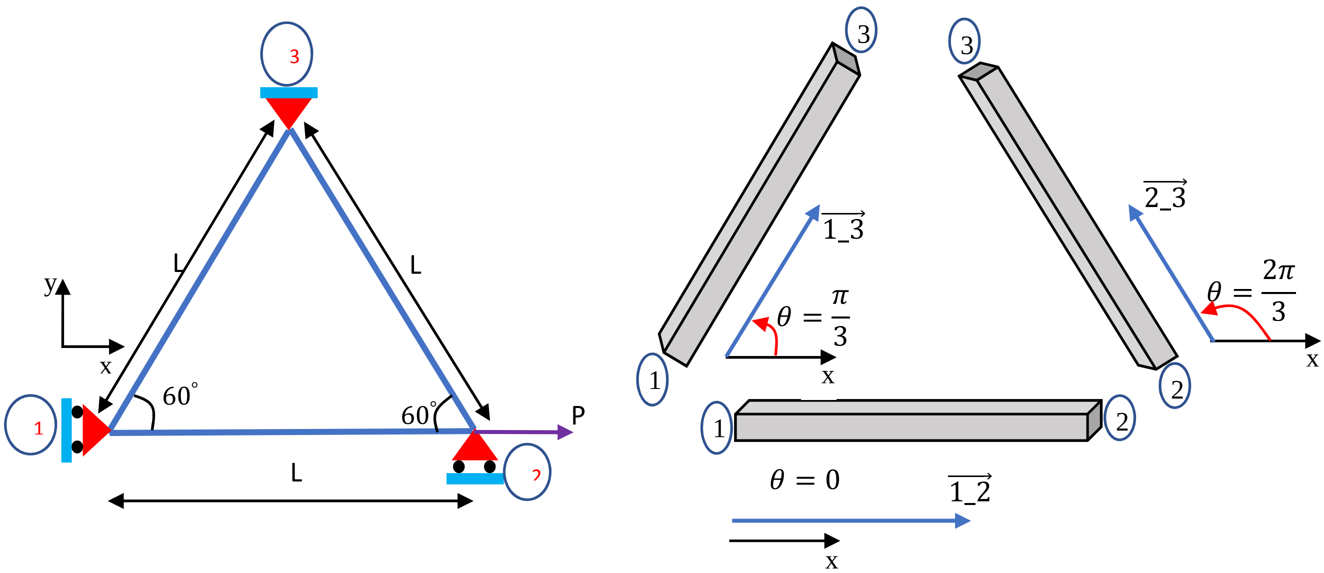


Figure I.4. Structure treillis à trois barres.

Réponse

Calcul des matrices de rigidité élémentaire des éléments I, II et III, pour cela le tableau suivant récapitule les données du problème.



Barre	Longueur	Angle θ	C=cos(θ)	S=sin(θ)	C*C	S*S	C*S
I: 1-2	L	0	1	0	1	0	0
II: 2-3	L	2π/3	-1/2	√3/2	1/4	3/4	-√3/4
III : 1-3	L	π/3	1/2	√3/2	1/4	3/4	√3/4

<u>Elément I : 1-2 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_I}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

<u>Elément II : 2-3 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_II}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

<u>Elément III : 1-3 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_III}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{3} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

L'assemblage des matrices élémentaires se fait comme suit

<u>Elément I : 1-2 (N1-N2)</u>

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

<u>Elément II : 2-3 (N1-N2)</u>

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Elément III : 1-3 (N1-N2)

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1+1/4 & \sqrt{3}/4 & -1 & 0 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 1+1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4+1/4 & -\sqrt{3}/4+\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4+\sqrt{3}/4 & 3/4+3/4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \Big\} 1 \\ \Big\} 2 \\ \Big\} 2 \end{array} \end{array}$$

L'équation d'équilibre donne

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 5/4 & \sqrt{3}/4 & -1 & 0 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 5/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2=0 \\ u_3=0 \\ v_3=0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 0 \\ P \\ Ry_2 \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{Bmatrix}$$

L'équation réduite est donc

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Finalement

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{4\mathrm{L}}{5\mathrm{EA}}P \end{Bmatrix}$$

Les réactions aux niveaux des appuis obtenues sont

La résultante des forces est nulle (l'équilibre est satisfait)

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 5/4 & \sqrt{3}/4 & -1 & 0 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 5/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2=\frac{4\mathrm{L}}{5\mathrm{EA}}P \\ v_2=0 \\ u_3=0 \\ v_3=0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{-4}{5}P \\ 0 \\ P \\ \frac{-\sqrt{3}}{5}P \\ \frac{-1}{5}P \\ \frac{+\sqrt{3}}{5}P \end{Bmatrix}$$

Pour Les forces axiales qui sont données par l'expression suivante

- $N = \frac{EA}{L}[C\ S]\begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$

Il sort pour l'élément I :1-2 (N1-N2)

$$N_I = \frac{EA}{L}[1\ 0]\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) = \frac{EA}{L}\left(\frac{4\mathrm{L}}{5\mathrm{EA}}P - 0\right) = \frac{4}{5}P$$

Donc c'est un effort de tension

Pour l'élément II : 2-3 (N1-N2)

$$N_{II} = \frac{EA}{L}\left[\frac{-1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{Bmatrix} 0 - \frac{4\mathrm{L}}{5\mathrm{EA}}P \\ 0 - 0 \end{Bmatrix} = \frac{-EA}{2L}\left(\frac{-4\mathrm{L}}{5\mathrm{EA}}P\right) = \frac{2}{5}P$$

Aussi l'effort axial dans l'élément II est un effort de tension

Pour le dernier élément qui s'agit de l'élément III :1-3 (N1-N2)

$$N_{III} = \frac{EA}{L}\left[\frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\left[\frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

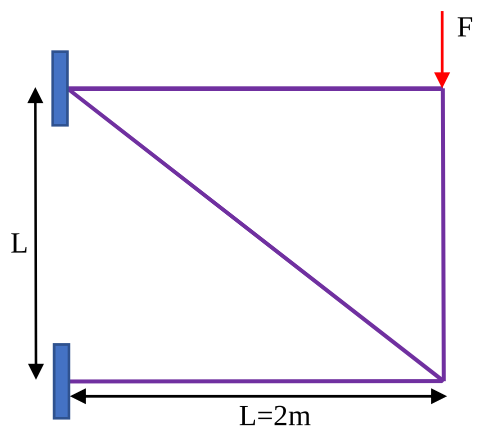
I.2.2 Exemple 02 d'application

Soit la structure de la figure, composée d'un assemblage de 4 barres.

Toutes les barres sont de section A = 0.01 m2 et de module d'élasticité : E= 10^5 N/m^2 sous l'action de la force F= 50 N Calculer en modélisant la structure avec des éléments finis de barre :

a- Les déplacements aux nœuds

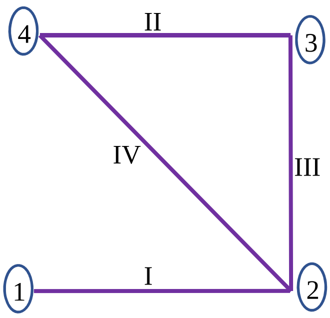
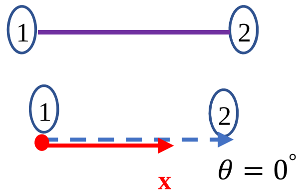
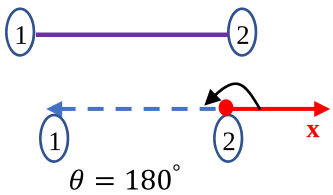
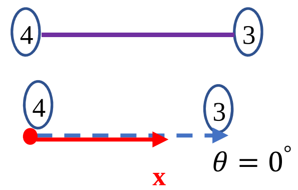
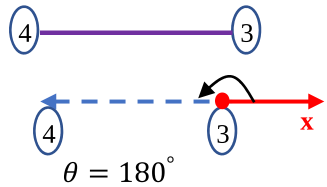
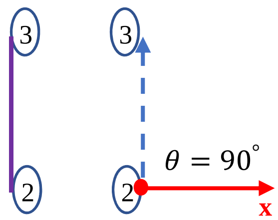
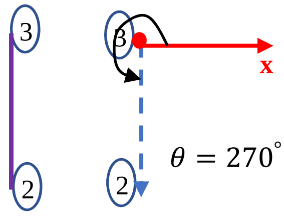
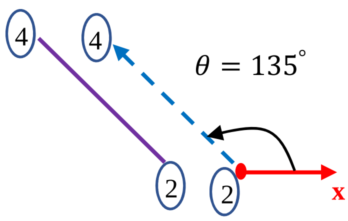
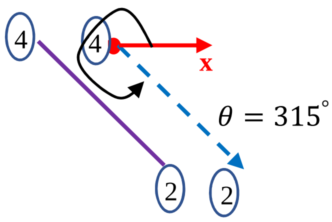
b- L'effort normal dans la barre inclinée



Réponse

La structure est modélisée par 4 éléments finis barres et l'orientation d'angles entre le repère global et les repère local de la barre pour chaque élément est schématisée par la figure ci-contre.

Il est clair que la valeur de l’angle θ dépend de la numérotation des nœuds de chaque élément comme le montre le tableau suivant.

Structure	Elém	N_1-N_2	N_1-N_2
	I	N_1-N_2 : 1-2 	N_1-N_2 : 2-1 
	II	N_1-N_2 : 4-3 	N_1-N_2 : 3-4 
	III	N_1-N_2 : 2-3 	N_1-N_2 : 3-2 
	IV	N_1-N_2 : 2-4 	N_1-N_2 : 4-2 

Calcul des matrices de rigidité élémentaire des éléments I, II III et IV, pour cela le tableau suivant récapitule les données du problème

Barre:N_1-N_2	Longueur	θ °	C=cos(θ)	S=sin(θ)	C*C	S*S	C*S
I: 1-2	L	0	1	0	1	0	0
II: 4-3	L	0	1	0	1	0	0
III : 2-3	L	90	0	1	0	1	0
IV : 4-2	L	315	√2/2	-√2/2	1/2	1/2	-1/2

<u>Elément I : 1-2 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_I}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

<u>Elément II : 4-3 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_I}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 4 \quad & \quad 3 \quad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

<u>Elément III : 2-3 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_I}] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

<u>Elément IV : 4-2 (N1-N2)</u>

$$[k_{e\_II}] = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{array}{cc} \begin{matrix} \qquad 4 \qquad & \qquad 2 \qquad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ \\ 2 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Après le calcul de chaque matrice de rigidité élémentaire, l’étape suivante consiste à faire l’assemblage de ces derniers.

Les démarches de l'assemblage des matrices élémentaires se fait comme suit

<u>Elément I : 1-2 (N1-N2)</u>

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ 4\\ \\ \end{array}
\end{array}$$

<u>Elément II : 4-3 (N1-N2)</u>

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ 4\\ \\ \end{array}
\end{array}$$

<u>Elément III : 2-3 (N1-N2)</u>

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1+\mathbf{0} & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{0} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{1} & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{-1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{0} & 1+\mathbf{0} & 0+\mathbf{0} & -1 & 0\\
0 & 0 & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{-1} & 0+\mathbf{0} & 0+\mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ \\ 2\\ \\ 3\\ \\ 4\\ \\ \end{array}
\end{array}$$

<u>Elément IV : 4-2 (N1-N2)</u>

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \qquad\qquad 2 \qquad\qquad & \qquad 3 \qquad & \qquad\qquad 4 \qquad\qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0+\mathbf{1/2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 1+\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0+\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0+\mathbf{1/2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0+\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0-\mathbf{1/2\sqrt{2}} & 0+\mathbf{1/2\sqrt{2}} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Il sort

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \qquad\qquad 2 \qquad\qquad & \qquad 3 \qquad & \qquad\qquad 4 \qquad\qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (2\sqrt{2}+1)/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & (2\sqrt{2}+1)/2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1/2\sqrt{2} & 0-1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1 & 0 & (2\sqrt{2}+1)/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

A.N : $EA/L = 500$

La matrice de rigidité globale est donnée par

$$[K] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \qquad 1 \qquad & \qquad\qquad 2 \qquad\qquad & \qquad\qquad 3 \qquad\qquad & \qquad\qquad 4 \qquad\qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 676.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \\ 0 & 0 & -176.8 & 676.8 & 0 & -500 & 176.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -176.8 & 176.8 & -500 & 0 & 676.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 176.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Les conditions aux limites sont (appuis):

$u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$

L'équation d'équilibre est donnée par

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \qquad 2 \qquad & \qquad 3 \qquad & \qquad 4 \qquad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 676.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \\ 0 & 0 & -176.8 & 676.8 & 0 & -500 & 176.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -176.8 & 176.8 & -500 & 0 & 676.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 176.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ F \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

Suite aux conditions aux limites, l'équation d'équilibre réduite devient

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \qquad 2 \qquad & \qquad 3 \qquad & \qquad 4 \qquad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 676.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \\ 0 & 0 & -176.8 & 676.8 & 0 & -500 & 176.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -176.8 & 176.8 & -500 & 0 & 676.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 176.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} = 0 \\ f_{y2} = 0 \\ f_{x3} = 0 \\ F \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

Finalement

$$\begin{bmatrix} 676.8 & -176.8 & 0 & 0 \\ -176.8 & 676.8 & 0 & -500 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

Après la résolution du système d'équation, le vecteur de déplacement sera donné par

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1 \\ -0.383 \\ 0 \\ -0.48 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur de déplacement (en m) est déterminé, l'étape suivante est le calcul du vecteur de force (en N) par la relation $\{R\} = [K]\{U\}$, il sort donc

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ F \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 676.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \\ 0 & 0 & -176.8 & 676.8 & 0 & -500 & 176.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -176.8 & 176.8 & -500 & 0 & 676.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 176.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = -0.1 \\ v_2 = -0.383 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = -0.48 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

Finalement le vecteur de force nodal est le suivant

La résultante des forces est nulle (l'équilibre est satisfait)

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ F \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -481.5 \\ 0 \\ 431.5 \\ -50 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

La dernière réponse à notre consiste à la détermination de l'effort normal dans la barre inclinée qui a pour nœud 4-2 (N1-N2).

Le vecteur de déplacement pour les nœuds 4 et 2 de l'élément fini barre IV est le suivant

$$\{U_{4-2}\} = \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \\ -0.383 \end{Bmatrix}$$

Les forces axiales pour chaque élément sont données par la relation (21).

$$N_{IV} = (EA/L_{IV})[C\ S]\begin{Bmatrix} u_2 - u_4 \\ v_2 - v_4 \end{Bmatrix} = \left(500/2\sqrt{2}\right)\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.1 \\ -0.383 \end{Bmatrix} = 70.71N$$

L'effort axial dans la barre incliné est un effort de tension d'intensité 70.71 N.

Pour les autres éléments il sort

Pour l'élément I :1-2 (N1-N2)

$$N_I = \frac{EA}{L_I}[1 \quad 0]\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) = 500(-0.1 - 0) = -50 \text{ N}$$

Donc c'est un effort de compression

Pour l'élément II : 4-3 (N1-N2)

$$N_{II} = \frac{EA}{L_{II}}[1 \quad 0]\begin{Bmatrix} u_4 - u_3 \\ v_4 - v_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}(u_4 - u_3) = 500(0-0) = 0$$

Il n'y'a aucun effort axial dans cette barre.

Pour l'élément III :2-3 (N1-N2)

$$N_{III} = \frac{EA}{L_{III}}[1 \quad 0]\begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}(u_3 - u_2) = 500(0-(-0.1)) = 50\ \mathrm{N}$$

Donc c'est un effort de tension.

La figure I.5 récapitule les résultats obtenus sous forme de déformées et d'efforts internes.

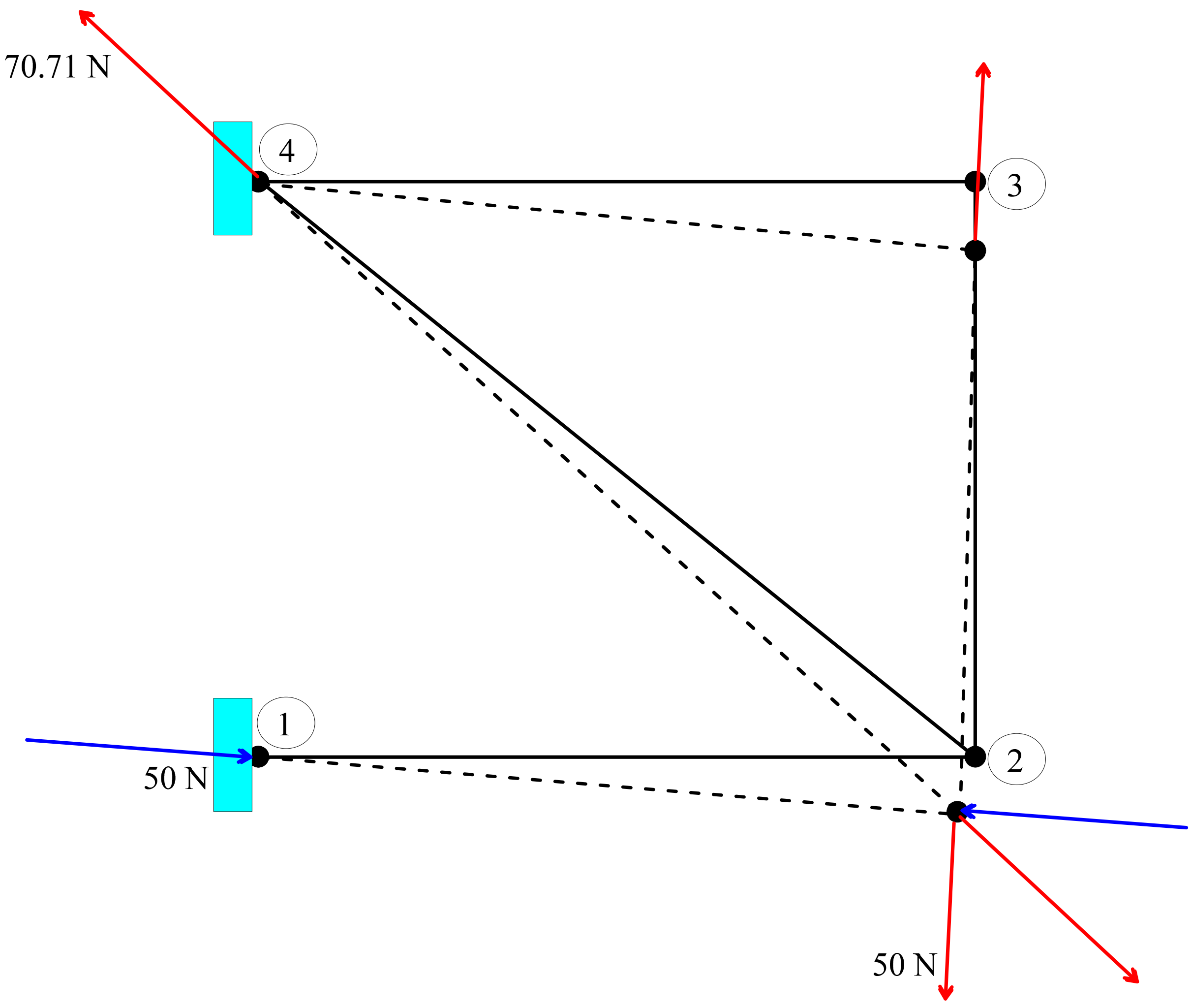


Figure I.5. Allure de la déformée et efforts axiales dans les barres.