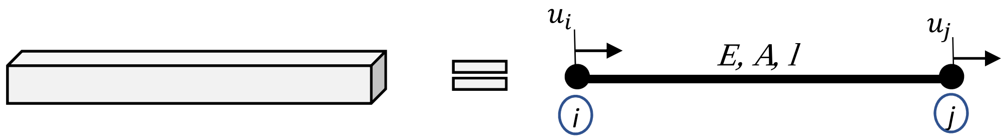
I.1. Matrice de rigidité de l'élément fini barre

Une barre est un élément de structure dont les dimensions transversales sont petites par rapport à sa longueur, travaille seulement en traction-compression et qui subit des déplacements le long de son axe. Les éléments barres sont utilisés pour modéliser des structures articulées, ils sont donc rotulés à leurs deux extrémités.

Dans ce chapitre une présentation simple unidimensionnelle est menée en s'intéressant à un problème de résistance des matériaux où n'intervient que la traction-compression. La formulation des caractéristiques des éléments finis d'un élément finis barre est basée sur les hypothèses suivantes :

i. La barre est droite
ii. Le matériau obéi à la loi de Hooke (domaine élastique)
iii. Les forces sont axiales (appliquées aux extrémités de la barre)
iv. La barre se déforme axialement seulement



avec

- l : Longueur
- A : Section transversale
- E : Module élastique
- $\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$: Déformation
- $\sigma = \sigma(x) = E\varepsilon(x)$: Contrainte

Pour $x_i \leq x \leq x_j$, le déplacement axial peut s'écrire de la manière suivante :

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j \qquad (01)$$

$N_i(x)$ et $N_j(x)$ sont des fonctions d'interpolations avec $u(x = x_i) = u_i$ et $u(x = x_j) = u_j$, il sort que :

$$\begin{cases} u(x = x_i) = N_i(x_i)u_i + N_j(x_i)u_j = u_i \\ u(x = x_j) = N_i(x_j)u_i + N_j(x_j)u_j = u_j \end{cases} \qquad (02)$$

$N_i(x)$ et $N_j(x)$ sont des fonctions polynomiales, on peut écrire

$$\begin{cases} N_i(x) = a_0 + a_1 x \\ N_j(x) = b_0 + b_1 x \end{cases} \qquad (03)$$

ou $a_0,\ a_1, b_0,\ b_1$ sont des coefficients d'interpolation à déterminer.

$$\begin{cases} N_i(x_i) = a_0 + a_1 x_i = 1 \rightarrow a_0 = 1 - a_1 x_i \\ N_j(x_i) = b_0 + b_1 x_i = 0 \rightarrow b_0 = -b_1 x_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_i(x_j) = a_0 + a_1 x_j = 0 \rightarrow a_0 = -a_1 x_j \\ N_j(x_j) = b_0 + b_1 x_j = 1 \rightarrow b_0 = 1 - b_1 x_j \end{cases}$$

$$1 - a_1 x_i = -a_1 x_j \rightarrow a_1 = -\frac{1}{x_j - x_i} = -\frac{1}{l}$$

$$a_0 = 1 - a_1 x_i = a_0 = 1 + \frac{x_i}{x_j - x_i} \rightarrow a_0 = \frac{x_j}{l}$$

$$-b_1 x_i = 1 - b_1 x_j \rightarrow b_1 = \frac{1}{l}$$

$$b_0 = 1 - b_1 x_j \rightarrow b_0 = 1 - \frac{x_j}{x_j - x_i} \rightarrow b_0 = -\frac{x_i}{l}$$

Finalement en trouve :

$$\begin{cases} N_i(x) = \frac{x_j}{l} - \frac{1}{l} x \\ N_j(x) = -\frac{x_i}{l} + \frac{1}{l} x \end{cases} \tag{04}$$

Pour $x_i = 0$ et $x_j = l$, l'équation se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} N_i(x) = 1 - \frac{x}{l} \\ N_j(x) = \frac{x}{l} \end{cases} \tag{05}$$

La fonction de déplacement *u(x)* (Eq. 01) devient ($0 \leq x \leq l$)

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j \tag{06}$$

Sous forme matricielle

$$u(x) = [N_i(x) \quad N_j(x)] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \left(\frac{x}{l}\right)\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{07}$$

Pour un chargement axial, la déformation $\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$ sera sonnée par

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{d}{dx}\left\{\left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j\right\} = \frac{u_j - u_i}{l} \tag{08}$$

Pour une section droite constante A, la contrainte axiale est donnée par $\sigma = \sigma(x) = E\varepsilon(x)$, d'où :

$$\sigma = \sigma(x) = E\varepsilon(x) = E\,\frac{u_j - u_i}{l} \tag{09}$$

Et par conséquence la force axiale aura comme expression

$$P = A\sigma(x) = \frac{EA}{l}\left(u_j - u_i\right) \tag{10}$$

Les forces nodales $\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$ auront comme expression

$$\begin{cases} f_i = -\dfrac{EA}{l}\left(u_j - u_i\right) \\ f_j = \dfrac{EA}{l}\left(u_j - u_i\right) \end{cases} \tag{11}$$

Sous forme matricielle

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Il sort finalement l'expression de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément finis barre

$$[k_e] = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Par l'application du premier théorème de Castigliano pour chaque déplacement nodale, en retrouve la forme de la matrice de rigidité identique à l'Eq. 13.

L'énergie de déformation par unité de volume est donnée par

$$U_e = \frac{1}{2}\sigma(x)\varepsilon(x) = \frac{1}{2}E\left(\frac{u_j - u_i}{l}\right)^2 \tag{14}$$

Les forces nodales sont données par

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_i} = E\left(\frac{-1}{l}\right)\left(\frac{u_j - u_i}{l}\right)(Al) = -\frac{EA}{l}\left(u_j - u_i\right) = f_i$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_j} = E\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{u_j - u_i}{l}\right)(Al) = \frac{EA}{l}\left(u_j - u_i\right) = f_j$$

Sous forme matricielle

$$\underbrace{\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[k_e]}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \tag{15}$$

D'une manière générale la matrice de rigidité pour l'élément finis barre est donnée par l'expression générale suivante

$$[k_e] = \int_V [B]^T\,[D][B]dV \tag{16}$$

Pour le cas d'élément fini barre $[D] = E$, avec E est le module d'élasticité, B est une matrice de déformation-déplacement.

Dans le cas de l'élément fini barre, B est donnée par

$$[B] = \frac{\partial N(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} & \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(1-\frac{x}{L}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(\frac{x}{L}\right)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre est donnée par (Eq. 16 et Eq. 17)

$$[k_e] = \int_l \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A(x)dx$$

Si la section de la barre A(x) est constante, alors

$$[k_e] = \int_L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A(x)dx = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

I.1.1. Exemple N°01 d'application

Soit une barre élastique à section variable soumise à une charge concentrée P appliquée au milieu, les deux extrémités sont encastrées (figure I.1).

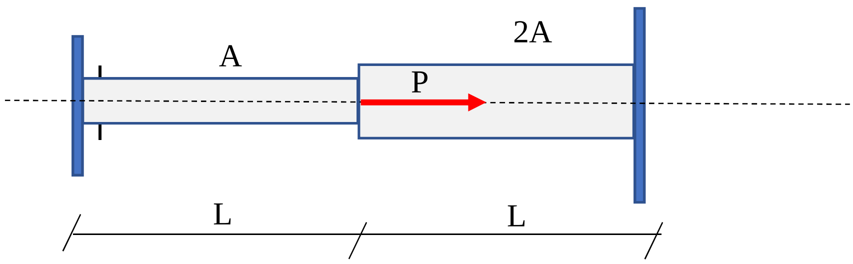
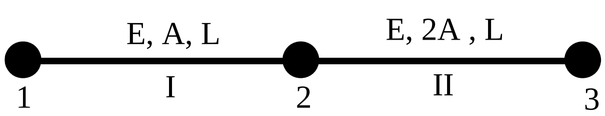


Figure I.1. Elément barre à section variable.

Solution



La matrice de rigidité élémentaire est donnée par (Eq. I.5)

- $[k_e] = \int_L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A(x)dx = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[k_e^I] = \int_L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A(x)dx = \int_L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} Adx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément II : 2-3 (N1-N2)

$$[k_e^{II}] = \int_L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A(x)dx = \int_L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} 2Adx = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Après l'étape de calcule des matrices de rigidité élémentaire, l'étape suivante consiste à déterminer la matrice de rigidité globale $[K]$. A noter que la matrice $[K]$ à les dimensions (nxn), où n est le nombre des nœuds.

Assemblage de l'élément I : 1-2 (N1-N2)

N1 N3

N1

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

N3

Assemblage de l'élément II : 2-3 (N1-N2)

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \boxed{1+2} & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Nœud 02 est un nœud commun entre élément I et II

La matrice de rigidité globale est donnée par l'expression suivante

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

L'équation d'équilibre statique est donnée par

- $[K]\{u\} = \{F\}$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ P \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont $u_1 = u_3 = 0$ (encastrement).

L’équation d’équilibre sera réduite en une seule équation d’inconnue u_2.

Elimination des lignes et colonnes des nœuds bloqués

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ P \\ R_3 \end{Bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$$3\frac{EA}{L}u_2 = P \rightarrow u_2 = \frac{L}{3EA}P$$

Le vecteur de déplacement nodal est calculé, le vecteur des forces où des réactions est déterminé à partir de l’équation d’équilibre.

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ P \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = \dfrac{L}{3EA}P \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ P \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{3}P \\ P \\ -\dfrac{2}{3}P \end{Bmatrix}$$

La résultante des forces est nulle (l’équilibre est satisfait)

Après le calcul des forces au niveau des nœuds, l’étape suivante consiste à calculer les déformations, contraintes et les forces à chaque élément.

<u>Elément I : 1-2</u>

Le vecteur des déplacements au nœud 1 et 2 (composant l’élément I) est donné par

- $\{u_I\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L}{3EA}P \end{Bmatrix}$

La déformation axiale de l’élément I est donné par

$$\varepsilon_I = [B]\{u_I\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(1-\frac{x}{L}\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(\frac{x}{L}\right)}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

- $\varepsilon_I = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{P}{3EA}$

La contrainte axiale dans l’élément I est donnée par

- $\sigma_I = E\varepsilon_I = \frac{P}{3A}$

Elément II : 2-3

Le vecteur des déplacements au nœud 2 et 3 (composant l'élément II) est donné par

- $\{u_{II}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{3EA}P \\ 0 \end{Bmatrix}$

La déformation axiale de l'élément II est donnée par

$$\varepsilon_{II} = [B]\{u_{II}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(1-\frac{x}{L}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(\frac{x}{L}\right)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{u_3 - u_2}{L}$$

- $\varepsilon_{II} = \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{-P}{3EA}$

La contrainte axiale dans l'élément II est donnée par

- $\sigma_{II} = E\varepsilon_{II} = \frac{-P}{3A}$

I.1.2. Exemple N°02 d'application

Soit une barre de section variable $A(x)$ soumise à une charge de $P = 100N$.

Déterminer la matrice de rigidité globale de la barre (figure I.2).

Nous avons $(A_1 = 2A_2)$.

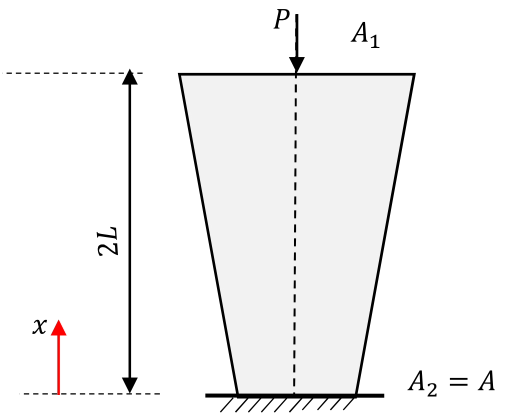


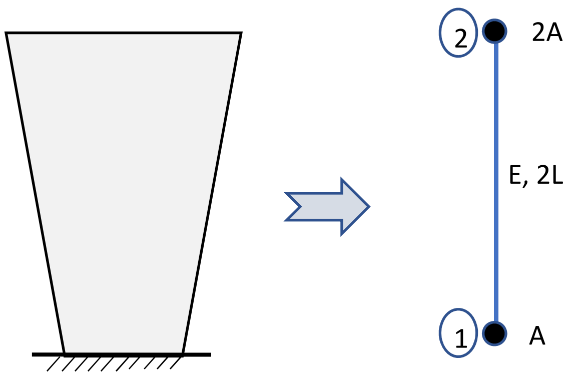
Figure I.2. Elément barre à section linéairement variable.

Recommandations

- $[k_e] = K = \int_V [B]^T E[B]dV$
- $[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} & \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \end{bmatrix}$
- $dV = A(x)dx, \quad 0 \leq x \leq 2L$
- $A(x) = A_0 + A_1 x$

Solution

Pour un seul élément finis il sort :



La matrice de rigidité élémentaire est donnée suivant l'expression (16), il sort que :

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[k_e^I] = \int_V [B]^T [D][B]dV = \int_{2L} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} \\ \frac{1}{2L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} A(x)dx$$

Sachant que :

$$A(x) = A_0 + A_1 x$$

Pour $x = 0 \rightarrow A(x = 0) = A$ et pour $x = 2L \rightarrow A(x = 2L) = 2A$

$$A(x = 0) = A_0 + A_1(x = 0) = A \rightarrow A_0 = A$$

$$A(x = 2L) = A + A_1(x = 2L) = 2A \rightarrow A_1 = \frac{A}{2L}$$

La variation linéaire de la section $A(x)$ est donnée par

$$A(x) = A + \frac{A}{2L}x = A(1 + \frac{1}{2L}x)$$

La matrice de rigidité élémentaire sers calculée comme suit

$$[k_e^I] = \int_V [B]^T [D][B]dV = \int_{2L} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} \\ \frac{1}{2L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} A\left(1 + \frac{1}{2L}x\right) dx$$

$$[k_e^I] = EA \int_{2L} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} \\ \frac{1}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} (1 + \frac{1}{2L}x)dx$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} \\ \frac{1}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} = \frac{1}{4L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'expression de la matrice de rigidité élémentaire sera sonnée par

$$[k_e^I] = \frac{EA}{4L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int\limits_{2L} (1 + \frac{1}{2L} x) dx = \frac{EA}{4L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ x|_0^{2L} + \frac{1}{4L} x^2|_0^{2L} \right\}$$

$$[k_e^I] = \frac{EA}{4L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{2L + L\} \rightarrow [k_e^I] = \frac{3EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Etant donné que nous avons qu'un seul élément il sort que la matrice de rigidité globale est identique à la matrice de rigidité élémentaire, $[K] = [k_e^I]$.

<u>Exercice :</u>

Refaire l'exemple 02 cette fois-ci par une discrétisation de la structure suivant deux (02) éléments finis de même longueur L.