Exercices Corrigés
Matrices

Exercice 1 – Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, CD, DC, AE, CE.

Exercice 2 – (extrait partiel novembre 2011)
On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Calculer, s'ils ont un sens, les produits AB, BA, AC, CA, B^2.

Exercice 3 – On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Calculer s'ils ont un sens les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$.
2) En déduire, sans plus de calcul, que A et C sont inversibles et préciser leurs inverses.

Exercice 4 – Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et B la matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, A^2 , B^2 et $A + 2\,\mathrm{Id}_2$.

Exercice 5 – Soit A, B, C les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{R}) \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R})$$

Déterminer les produits définis 2 à 2 de ces trois matrices.

Exercice 6 – $T_{i,j}(\lambda)$ étant la matrice élémentaire qui correspond à ajouter à la ligne i le produit par λ de la ligne j, préciser la matrice $T_{2,1}(\frac{1}{2})$ de $M_{2,2}(\mathbf{R})$, puis la matrice $T_{1,2}(-2)T_{2,1}(\frac{1}{2})$

Exercice 7 – 1) Préciser les matrices élémentaires de $M_{3,3}(\mathbf{R})$:

$$D_2(-2) \quad , \quad T_{3,2}(3) \quad , \quad T_{2,1}(-2) \quad .$$

2) Calculer la matrice $A = T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2)$.
3) Donner A^{-1} sous forme de produit de matrices élémentaires. Puis, calculer A^{-1}.

Exercice 8 – Appliquer avec précision aux matrices M et N suivantes l'algorithme du cours qui détermine si une matrice est inversible et donne dans ce cas son inverse :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad et \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}).$$

Exercice 9 – (extrait partiel novembre 2011)
1) En utilisant l'algorithme du cours, montrer que la matrice suivante est inversible et préciser son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Puis, donner une expression de A^{-1} et de A comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 10 – 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Donner une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 11 –) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad .$$

Préciser une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 12 – Soit A et B deux matrices carrées de même ordre, on suppose que la matrice AB est inversible d'inverse la matrice C. Montrer alors que B est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 13 – (extrait partiel novembre 2011)
Soit X et Y deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si $XY = 0$, les matrices X et Y ne sont pas inversibles.

Exercice 14 – Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Montrer en appliquant les algorithmes du cours que M est inversible. Préciser la matrice M^{-1} ainsi que la décomposition de M^{-1} comme produit de matrices élementaires.

2) En déduire une décomposition de M comme produit de matrices élémentaires.
3) Montrer que nous avons aussi $M = T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)$.
4) En déduire une deuxième expression de M^{-1} comme produit de matrices élémentaires.
5) Calculer $\det(M)$ et retrouver la valeur de M^{-1} en utilisant la formule d'inversion donnée dans le cours.

Exercice 15 – (extrait partiel novembre 2009)
1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

Quelle est la valeur de M^{-1} ?
2) Donner une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.
3) Déduire de la question 1 une matrice X de $M_{3,3}(\mathbf{R})$telle que :

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Exercice 16 – 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Donner une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.
3) Vérifier le calcul en effectuant les calculs des matrices MM^{-1} et $M^{-1}M$.

Exercice 17 – Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Calculer le déterminant de M, sa comatrice et l'inverse de M.
2) Déterminer l'inverse de M sous forme de produit de matrices élémentaires. Ecrire M comme produit de matrices élémentaires.
3) Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé :

$$*(m) \quad \left[\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & x_3 & = & m \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & + & x_2 & + & x_3 & = & 2m \end{array} \right. \quad .$$

Correction de l'exercice 1 :
Le lecteur vérifiera que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \quad .$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad DC = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad AE = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Le produit CE n'a pas de sens car la taille des colonnes (à savoir 2) de E est différent de la taille des lignes (à savoir 3) de C.

Correction de l'exercice 2 :
On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad CA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Les deux autres produits B^2 et BA n'ont pas de sens.

Correction de l'exercice 3 :
1)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

BA n'a pas de sens car la taille des lignes de B n'est pas égale à celle des colonnes de A.

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

$$CB = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -7 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

BC n'a pas de sens car la taille des lignes de de B n'est pas égale à celle des colonnes de C.
B^2 n'a pas de sens car la taille des lignes de de B n'est pas égale à celle des colonnes de B.

2) Nous avons : $AC = CA = -2\mathrm{Id}_2$, nous en déduisons :

$$A(-\frac{1}{2}C) = (-\frac{1}{2}C)A = \mathrm{Id}_2 \quad .$$

Il en résulte que la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

De même :
$$(-\frac{1}{2}A)C = C(-\frac{1}{2}A) = \mathrm{Id}_2 \quad .$$
Il en résulte que la matrice C est inversible, d'inverse :
$$C^{-1} = -\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 4 :
$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$
La matrice BA n'a pas de sens.
$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$
La matrice B^2 n'a pas de sens.
$$A + 2\,\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 5 :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \ , \ BA = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 10 & 2 & -4 \\ -10 & -8 & 6 \end{pmatrix} \ , \ CA = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 10 & 2 & -4 \end{pmatrix} \ ,$$
$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} \ , \ C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \ .$$
Les matrices AC , CB, A^2 et B^2 ne sont pas définis.

Correction de l'exercice 6 :
$$T_{2,1}(\frac{1}{2}) = T_{2,1}(\frac{1}{2})I_2 = T_{2,1}(\frac{1}{2})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$
De même, en utilisant les propriétés des actions à gauche par les matrices élémentaires, on obtient :
$$T_{1,2}(-2)T_{2,1}(\frac{1}{2}) = T_{1,2}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 7 :
1.1)

$$D_2(-2) = D_2(-2)I_3 = D_2(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$T_{3,2}(3) = T_{3,2}(3)I_3 = T_{3,2}(3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$T_{2,1}(-2) = T_{2,1}(-2)I_3 = T_{2,1}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1.2)

$$A = T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2) = T_{3,2}(3)D_2(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$A = T_{3,2}(3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 12 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1.3)

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= (\,T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2)\,)^{-1}\\
&= T_{2,1}(-2)^{-1}D_2(-2)^{-1}T_{3,2}(3)^{-1}\\
&= T_{2,1}(2)D_2(-(1/2))T_{3,2}(-3)\\
&= T_{2,1}(2)D_2(-(1/2))T_{3,2}(-3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= T_{2,1}(2)D_2(-(1/2))\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\\
&= T_{2,1}(2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-(1/2)&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-(1/2)&0\\0&-3&1\end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 8 :

a) Les deux lignes de M sont d'ordre 1. Donc, M est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-\frac{1}{2})\ M = \begin{pmatrix}2&-3\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-\frac{1}{2})\ I_2 = \begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix} \qquad B_1M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de M étant non nuls, on peut conclure que M est inversible.

$$M_2 = D_2(2)\ M_1 = \begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix} \qquad B_2 = D_2(2)\ B_1 = \begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix} \qquad B_2M = M_2$$

$$M_3 = D_1(\frac{1}{2})\ M_2 = \begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\0&1\end{pmatrix} \qquad B_3 = D_1(\frac{1}{2})\ B_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&2\end{pmatrix} \qquad B_3M = M_3$$

$$M_4 = T_{1,2}(\frac{3}{2})\ M_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2 \qquad B_4 = T_{1,2}(\frac{3}{2})\ B_3 = \begin{pmatrix}-1&3\\-1&2\end{pmatrix} \qquad B_4M = M_4 = I_2$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_4 = \begin{pmatrix}-1&3\\-1&2\end{pmatrix} \quad .$$

Soit encore en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(\frac{3}{2})D_1(\frac{1}{2})D_2(2)T_{2,1}(-\frac{1}{2}) \quad .$$

b) Les deux lignes de N sont d'ordre 1. Donc, N est ordonnée.

$$N_1 = T_{2,1}(-2)\ N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-2)\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 N = N_1$$

La matrice N_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Une ligne de N_1 est constituée de 0. La matrice N n'est donc pas inversible.

Correction de l'exercice 9 :

1) On a :

$$T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2) On a vu :

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) \quad .$$

Il en résulte :

$$A = (A^{-1})^{-1} = (\ T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)\ )^{-1}$$

Soit :

$$A = T_{2,1}(-3)^{-1}D_2(-1/2)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} = T_{2,1}(3)D_2(-2)T_{1,2}(2) \quad .$$

Correction de l'exercice 10 :

2.1) Les deux lignes de M sont d'ordre 1. Donc, M est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-2)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-2)\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de M étant non nuls, on peut conclure que M est inversible.

$$M_2 = D_2(-1)\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = D_2(-1)\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2M = M_2$$

$$M_3 = T_{1,2}(1)\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad B_3 = T_{1,2}(1)\ B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_3M = M_3$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

2.2) Soit en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(1)D_2(-1)T_{2,1}(-2) \quad .$$

On sait que l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$ est $T_{i,j}(-\lambda)$ et que pour $a \neq 0$, l'inverse de $D_i(a)$ est $D_i(1/a)$. On rappelle que si A, B et C sont trois matrices carrées de taille n inversibles : $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. On obtient alors :

$$M = (M^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(1)D_2(-1)T_{2,1}(-2))^{-1} = T_{2,1}(2)D_2(-1)T_{1,2}(-1) \quad .$$

Correction de l'exercice 11 :
Mise en place :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2M = M$$

Les deux lignes de M sont d'ordre 1. Donc, M est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-3/2)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-3/2)\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de M étant non nuls, on peut conclure que M est inversible.

$$M_2 = D_2(2)D_1(\frac{1}{2})\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = D_2(2)D_1(\frac{1}{2})\ B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_2M = M_2$$

$$M_3 = T_{1,2}(-1/2)\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = T_{1,2}(-1/2)\ B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_3M = M_3$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(-1/2)D_2(2)D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(-3/2) \quad .$$

On sait que l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$ est $T_{i,j}(-\lambda)$ et que pour $a \neq 0$, l'inverse de $D_i(a)$ est $D_i(1/a)$. On rappelle que si A et B sont deux matrices carrées de taille n inversibles : $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$. On obtient alors :

$$M = (M^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(-1/2)D_2(2)D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(-3/2))^{-1} = T_{2,1}(3/2)D_1(2)D_2(1/2)T_{1,2}(1/2) \quad .$$

Correction de l'exercice 12 :
Soit n, l'ordre des matrices carrées A, B, C. Par définition : $ABC = BCA = I_n$. Ainsi B admet le matrice CA comme inverse à droite. D'après le cours, si une matrice carrée a un inverse à droite, elle est inversible (c.a.d. admet un inverse à gauche égal à son inverse à droite). Ainsi, B est inversible d'inverse la matrice CA.

De même, A admet le matrice BC comme inverse à gauche. Ainsi (mêmes raisons), A est inversible d'inverse la matrice BC.

Correction de l'exercice 13 :
Si X était inversible, on obtiendrait :

$$X^{-1}(XY) = X^{-1}\,0 = 0 = (X^{-1}X)Y = Y \quad .$$

Ainsi, la matrice Y serait nulle, ce qui est impossible.
Si Y était inversible, on obtiendrait :

$$(XY)Y^{-1} = 0\,Y^{-1} = 0 = X(YY^{-1}) = X \quad .$$

Ainsi, la matrice X serait nulle, ce qui est impossible.
Correction de l'exercice 14 :
1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3M = M$$

Supprimons aux deuxièmes lignes de ces matrices leurs premiéres lignes et supprimons aux troisièmes lignes de ces matrices la moitié des premières ligne :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = T_{3,1}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1M = M_1$$

Multiplions les premiéres lignes de ces matrices par 1/2 et multiplions les troisièmes lignes par 2, on obtient :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = D_3(2)D_1(1/2)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_2M = M_2$$

Supprimons aux premiéres de ces matrices le produit par 1/2 des troisiémes lignes :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = T_{1,3}(-\frac{1}{2})A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_3M = M_3$$

Supprimons aux premières lignes de ces matrices le produit par 2 de leurs deuxièmes, on obtient :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad , \quad A_A = T_{1,2}(-2)A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_4M = I_3$$

Il en résulte :

$$M^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-\frac{1}{2})D_3(2)D_1(\frac{1}{2})T_{3,1}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(-1)\ .$$

2) On en déduit :

$$\begin{aligned} M = (M^{-1})^{-1} &= T_{2,1}(-1)^{-1}T_{3,1}(-\frac{1}{2})^{-1}D_1(\frac{1}{2})^{-1}D_3(2)^{-1}T_{1,3}(-\frac{1}{2})^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{2,1}(1)T_{3,1}(\frac{1}{2})D_1(2)D_3(\frac{1}{2})T_{1,3}(\frac{1}{2})T_{1,2}(2) \end{aligned}$$

3) Posons $N = T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)$. On a successivement :

$$\begin{aligned} N &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)I_3 \\ &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_{2,3}(1)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

4) Nous en déduisons : $M^{-1} = T_{1,2}(-2)T_{2,1}(-1)T_{3,1}(-1)T_{1,3}(-1)T_{2,3}(-1)$.

5) Un calcul donne $\det M = 2(5-2) - 2(4-2) + (4-5) = 6 - 4 - 1 = 1$.
Ainsi, par la formule donnée à la fin de la sous-section **??** :

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5-2 & -(4-2) & 4-5 \\ -(2-1) & 2-1 & -(2-2)) \\ 4-5 & -(4-4) & 10-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 15 :
1) Partons du couple de matrices :

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&4&6\end{pmatrix}\quad,\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad:\quad I_3M=M\quad.$$

La premiere ligne est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Utilisons la deuxième ligne pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$M_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad,\quad A_1=T_{3,2}(-4)I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{pmatrix}\quad:\quad A_1M=M_1\quad.$$

La matrice M_1 est triangulaire. Multiplions sa première ligne par $-(1/2)$ pour que sa diagonale soit formée de 1 :

$$M_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_2=D_3(-(1/2))A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-(1/2)\end{pmatrix}\quad:\quad A_2M=M_2\quad.$$

La matrice M_2 est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Utilisons la troisième ligne pour transformer la deuxième en $(0,1,0)$:

$$M_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_3=T_{2,3}(-2)A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&1\\0&2&-(1/2)\end{pmatrix}\quad:\quad A_3M=M_3\quad.$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de M_3 pour transformer la première ligne en $(1,2,0)$:

$$M_4=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_4=T_{1,3}(-3)A_3=\begin{pmatrix}1&-6&3/2\\0&-3&1\\0&2&-(1/2)\end{pmatrix}\quad:\quad A_4M=M_4\quad.$$

Utilisons maintenant la deuxième ligne de M_4 pour transformer la première ligne en $(1,0,0)$:

$$M_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_5=T_{1,2}(-2)A_3=\begin{pmatrix}1&0&-(1/2)\\0&-3&1\\0&2&-(1/2)\end{pmatrix}\quad:\quad A_5M=M_5=I_5\quad.$$

2) Il en résulte :

$$M^{-1}=A_5=\begin{pmatrix}1&0&-(1/2)\\0&-3&1\\0&2&-(1/2)\end{pmatrix}=T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-3)T_{2,3}(-2)D_3(-(1/2))T_{3,2}(-4)\ .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}M=(M^{-1})^{-1}&=T_{3,2}(-4)^{-1}D_3(-(1/2))^{-1}T_{2,3}(-2)^{-1}T_{1,3}(-3)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1}\\&=T_{3,2}(4)D_3(-2))T_{2,3}(2)T_{1,3}(3)T_{1,2}(2)\quad.\end{aligned}$$

3) Multiplions l'équation par M^{-1} à droite. Notre équation équivaut à :

$$X \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad .$$

Cette équation a comme unique solution :

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = \frac{1}{2} T_{3,2}(-2) M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -(5/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -(1/4) \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 4 & -(5/4) \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice ?? :

1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3 M = M$$

La premiere ligne est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Utilisons la deuxième ligne pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = T_{3,2}(-2) I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1 M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Utilisons la troisième ligne pour transformer la deuxième en $(0, 1, 0)$:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = T_{2,3}(-1) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_2 M = M_2$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de M_2 pour transformer la première ligne en $(1, 2, 0)$:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = T_{1,3}(-3) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_3 M = M_3$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de M_3 pour transformer la première ligne en $(1, 0, 0)$:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = T_{1,2}(-2) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_4 M = M_4$$

2) Il en résulte :

$$M^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2) T_{1,3}(-3) T_{2,3}(-1) T_{3,2}(-2) \; .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}M=(M^{-1})^{-1} &= T_{3,2}(-2)^{-1}T_{2,3}(-1)^{-1}T_{1,3}(-3)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1}\\ &= T_{3,2}(2)T_{2,3}(1)T_{1,3}(3)T_{1,2}(2) \quad .\end{aligned}$$

3) On en vérifie par des calculs de produits ligne-colonne :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 17 :
1)

$$\begin{aligned}\det M &= 1\det\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}-(-2)\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}+0\det\begin{pmatrix}0&-1\\3&4\end{pmatrix}\\ &= -1+2=1\end{aligned} \quad .$$

Le déterminant de M est non nul, la matrice carrée M est donc inversible. La comatrice de M est donnée par la formule :

$$\mathrm{Com}\,(M)=\begin{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}-2&4\\0&1\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}-2&3\\0&1\end{pmatrix}\\ -\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ +\det\begin{pmatrix}0&-1\\3&4\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1&-1\\-2&4\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}\end{pmatrix} \quad .$$

Soit :

$$\mathrm{Com}\,M=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-1&1&-1\\3&-2&3\end{pmatrix} \quad .$$

On a alors :

$$M^{-1}=\frac{1}{\det M}\,{}^t(\mathrm{Com}M)={}^t(\mathrm{Com}M)=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&1&-2\\-2&-1&3\end{pmatrix} \quad .$$

2)

$$M=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&4\\0&1&1\end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad : \quad I_3M=M$$

Ajoutons à la deuxième ligne de ces matrices deux fois leurs premiéres lignes :

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&2\\0&1&1\end{pmatrix} \quad , \quad A_1=T_{2,1}(2)I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad : \quad A_1M=M_1$$

Ajoutons à la troisième ligne de ces matrices moins 1/3 de fois leurs deuxièmes lignes :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = T_{3,2}(-1/3)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_2 M = M_2$$

Multiplions les deuxièmes lignes de ces matrices par 1/3 et les troisièmes lignes par 3, on obtient :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = D_2(1/3)D_3(3)A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad : \quad A_3 M = M_3$$

Ajoutons aux deuxièmes lignes de ces matrices le produit par $-2/3$ de leurs troisiémes lignes :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = T_{2,3}(-2/3)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad : \quad A_4 M = M_4$$

Ajoutons aux premières lignes de ces matrices leurs troisiémes lignes :

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_5 = T_{1,3}(1)A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad : \quad A_5 M = M_5 = I_3 \quad .$$

Il en résulte :

$$M^{-1} = A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = T_{1,3}(1)T_{2,3}(-2/3)D_2(1/3)D_3(3)T_{3,2}(-1/3)T_{2,1}(2) \, .$$

Chic, on retrouve le résultat de la première question. On peut rajouter que M s'écrit comme produit de matrices élémentaires :

$$M = (M^{-1})^{-1} = T_{2,1}(-2)T_{3,2}(1/3)D_3(1/3)D_2(3)T_{2,3}(2/3)T_{1,3}(-1) \quad .$$

3) Le système linéaire équivaut à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m-1 \\ -2m+1 \\ 4m-1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système $*(m)$ admet l'unique solution :

$$(5m-1, -2m+1, 4m-1)$$