Série n°03

1. Trouver la fonction dérivée f' des fonctions suivantes :
(a) $f(z) = z^2 e^{z+i}$; (b) $f(z) = \frac{3e^{2z} - ie^{-z}}{z^3 - 1 + i}$;
(c) $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$; (d) $f(z) = ie^{1/z}$

2. Donner les expressions suivantes en termes de x et y :
(a) $\left|e^{z^2 - z}\right|$; (b) $\arg\left(e^{z - i/z}\right)$; (c) $\arg\left(e^{i(z+\bar{z})}\right)$; (d) $\overline{ie^z + 1}$

3. Exprimer les fonctions suivantes sous la forme $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:
(a) $f(z) = e^{-iz}$; (b) $f(z) = e^{-i\bar{z}+i}$;
(c) $f(z) = e^{z^2}$; (d) $f(z) = e^{1/z}$

4. En utilisant les équations de Cauchy-Riemman et la continuité des fonctions réelles $u(x,y)$ *et* $v(x,y)$ comme conditions suffisantes de différentiabilité, déterminer où les fonctions suivantes sont différentiable :
(a) $f(z) = e^{2\bar{z}+i}$; (b) $f(z) = e^{z^2}$

5. Trouver les images des ensembles suivants, sous la transformation exponentielle :
(a) La ligne : $y = -2$;
(b) (b) la ligne : $x = 3$;
(c) La bande infinie : $1 < x \le 2$; le carré défini par les sommets : $0, 1, 1+i$ *et* i
(d) La bande semi-inf. :
$-\infty < x \le 0; 0 \le y \le \pi$

6. Trouver toutes les valeurs complexes des logarithmes suivants :
$\ln(-5)$; $\ln(-ei)$; $\ln(-2+i2)$; $\ln(1+i)$;
$\ln(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$; $\ln(-\sqrt{3} + i)$

7. Donner la valeur principale du logarithme sous la forme : $a + ib$
$Ln\,(6 - i6)$; $Ln\,(-e^2)$; $Ln\,(-12 + i5)$;
$Ln\,(3 - i4)$; $Ln\,(1 + i\sqrt{3})^5$; $Ln\,(1+i)^4$

8. Trouver toutes les valeurs complexes vérifiant les équations suivantes :
(a) $e^z = 4i$; (b) $e^{z-1} = -ie^3$;
(c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$; (d) $e^{1/z} = -1$

9. Trouver les domaines dans lesquels les fonctions suivantes sont différentiables et calculer ensuite leurs dérivées :
(a) $f(z) = 3z^2 - e^{2iz} + iLn\,z$;
(b) $f(z) = (z+1)Ln\,z$;
(c) $f(z) = \frac{Ln\,(2z-i)}{z^2+1}$;
(d) $f(z) = Ln\,(z^2+1)$

10. Trouver les images des ensembles suivants sous la transformation $w = Ln\,z$:
(a) Un rayon $\arg(z) = \pi/6$;
(b) L'axe des y positifs ;
(c) Le cercle $|z| = 4$;
(d) L'anneau $3 \le |z| \le 5$

11. Trouver toutes les valeurs complexes possibles pour les formes puissance complexe suivantes :
$(-1)^{3i}$; $3^{2i/\pi}$; $(1+i)^{1-i}$; $(1+i\sqrt{3})^i$; $(-i)^i$.

12. On admet que z^α représente la valeur principale de la fonction puissance complexe définie sur le domaine : $|z| >$; $-\pi < \arg(z) < \pi$. Trouver les dérivées des fonctions ci-dessous dans les points correspondants :
(a) $f(z) = z^{3/2}; z = 1+i$
(b) $f(z) = z^{2i}; z = i$
(c) $f(z) = z^{1+i}; z = 1 + i\sqrt{3}$

13. Exprimer la valeur des fonctions trigonométriques suivantes sous la forme $a + ib$:
$\sin(4i)$; $\cos(-3i)$; $\cos(2 - i4)$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$;
$\tan(2i)$; $\cot(\pi + i2)$; $\sec\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$

14. Résoudre les équations suivantes :
$\sin z = i$; $\cos z = 4$; $\sin z = \cos z$; $\cos z = i \sin z$

15. Vérifier les identités trigonométriques suivantes :
- $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
- $\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$

16. Trouver les dérivées des fonctions suivantes :
$\mathrm{Sin}(z^2)$; $\cos(ie^z)$; $z.\tan\frac{1}{2}$;
$\sec(z^2 + (1-i)z + i)$

17. Exprimer les valeurs des fonctions hyperboliques suivantes dans la forme $a + ib$:
$\cosh(i\pi)$; $\sinh\left(i\frac{\pi}{2}\right)$; $\cosh\left(1 + i\frac{\pi}{6}\right)$; $\tan(2 + i3)$

18. Trouver toutes les valeurs complexes z qui satisfont les équations suivantes :
$\cosh z = i$; $\sinh z = -1$; $\sinh z = \cosh z$;
$\sinh z = e^z$

19. Trouver les dérivées des fonctions hyperboliques suivantes :
$\sin z . \sinh z$; $\tanh z$; $\tanh(iz - 2)$; $\cosh(iz + e^{iz})$

20. Trouver toutes les valeurs des quantités suivantes :
$\cos^{-1} i$; $\sin^{-1}\sqrt{2}$; $\tan^{-1} 1$; $\tanh^{-1}(1 + i2)$