

Série n02-A : les fonctions complexes

1. Evaluer les applications complexes dans les points donnés :

- (a) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z} - 2i$; $z = \{2i; 1 + i; 3 - 2i\}$
 (b) $f(z) = |z|^2 - 2\text{Re}(iz) + z$;
 $z = \{3 - 4i; 2 - i; 1 + 2i\}$
 (c) $f(z) = \log_e |z| + i\text{Arg}(z)$; $z = \{1; 4i; 1 + i\}$
 (d) $f(z) = (xy - x^2) + i(3x + y)$;
 $z = \{3i; 4 + i; 3 - 5i\}$
 (e) $f(z) = e^z$; $z = \left\{2 - \pi i; \frac{\pi}{3} i; \log_e 2 - \frac{5\pi}{6} i\right\}$

2. Trouver la partie réelle u et imaginaire v des fonctions complexes suivantes :

- (a) $f(z) = 6z - 5 + 9i$; (b) $f(z) = -3z + 2\bar{z} - i$
 (c) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$; (d) $f(z) = e^{2z+i}$

3. Trouver la partie réelle u et imaginaire v en fonction de r et θ pour les fonctions complexes suivantes :

- (a) $f(z) = \bar{z}$; (b) $f(z) = z^4$; (c) $f(z) = e^z$
 (d) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

4. Donner le domaine de définition des applications suivantes :

- (a) $f(z) = 2\text{Re}(z) - iz^2$; (b) $f(z) = \frac{iz}{|z-1|}$
 (c) $f(z) = \frac{iz}{|z|-1}$; (d) $f(z) = \frac{3z+2i}{z^3+4z^2+z}$

5. Quel est l'intervalle de valeurs des applications complexes suivantes :

- (a) $f(z) = \text{Im}(z)$; $|z| \leq 2$
 (b) $f(z) = |z|$; $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1$
 (c) $f(z) = \bar{z}$; *demi-plan* $\text{Im}(z) > 0$

6. Pour la fonction $f(z) = e^z$, montrer que :

- (a) $|e^z| = e^x$
 (b) $e^{z+2\pi i} = e^z$; déterminer la période
 (c) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

7. Trouver l'image S' de l'ensemble S sous la transformation complexe $w = f(z)$:

- (a) $f(z) = \bar{z}$; S : ligne horizontale $y = 3$
 (b) $f(z) = 3z$; S : *demi-plan* $\text{Im}(z) > 2$
 (c) $f(z) = (1 + i)z$; S : ligne verticale $x = 2$
 (d) $f(z) = iz + 4$; S : *demi-plan* $\text{Im}(z) \leq 1$

8. Dans ce qui suit, tracer et commenter en premier la courbe paramétrique C suivants. Ensuite, trouver la courbe paramétrique C' , image de C (tracer et commenter) :

- (a) $z(t) = 2(1 - t) + it$; $0 \leq t \leq 1$; $f(z) = 3z$
 (b) $z(t) = i(1 - t) + (1 + i)t$; $0 \leq t \leq \infty$;
 $f(z) = -z$
 (c) $z(t) = 1 + 2e^{it}$; $0 \leq t \leq 2\pi$; $f(z) = z + 1 - i$
 (d) $z(t) = t$; $0 \leq t \leq 2$; $f(z) = e^{itz}$

9. Trouver l'image d'un triangle de sommets $\{0, 1, i\}$ sous les transformations suivantes :

- (a) $f(z) = z + 2i$; (b) $f(z) = e^{i\frac{\pi}{4}z}$; (c) $f(z) = -3z + i$

10. Exprimer les transformations linéaires suivantes comme une composition de rotation, homothétie et une translation :

- (a) $f(z) = 3iz + 4$; (b) $f(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - i\sqrt{3}$

11. Trouver l'image des ensembles suivants, sous la transformation $w = z^2$.

- (a) la ligne $x = 3$; (b) la ligne $y = -1/4$;
 (c) l'arc $|z| = \frac{1}{2}$; $0 \leq \arg(z) \leq \pi$

12. Donner la valeur de la racine principale pour les fonctions puissances suivantes, dans les points donnés :

- (a) $z^{1/2}$; $z = -i$; (b) $z^{1/2}$; $z = 2 + i$;
 (c) $z^{1/3}$; $z = -1$; (d) $z^{1/4}$; $z = -1 + i\sqrt{3}$

13. Trouver l'image de l'ensemble donné sous la transformation réciproque $w = 1/z$:

- (a) le cercle $|z| = 5$
 (b) demi-cercle $|z| = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$
 (c) le rayon $\arg(z) = \pi/4$
 (d) la ligne $y = 4$