

**Série n02-A : les fonctions complexes**

1. Evaluer les applications complexes dans les points donnés :

- (a)  $f(z) = z^2 \cdot \bar{z} - 2i$ ;  $z = \{2i; 1 + i; 3 - 2i\}$   
 (b)  $f(z) = |z|^2 - 2\text{Re}(iz) + z$ ;  
 $z = \{3 - 4i; 2 - i; 1 + 2i\}$   
 (c)  $f(z) = \log_e |z| + i\text{Arg}(z)$ ;  $z = \{1; 4i; 1 + i\}$   
 (d)  $f(z) = (xy - x^2) + i(3x + y)$ ;  
 $z = \{3i; 4 + i; 3 - 5i\}$   
 (e)  $f(z) = e^z$ ;  $z = \left\{2 - \pi i; \frac{\pi}{3} i; \log_e 2 - \frac{5\pi}{6} i\right\}$

2. Trouver la partie réelle  $u$  et imaginaire  $v$  des fonctions complexes suivantes :

- (a)  $f(z) = 6z - 5 + 9i$ ; (b)  $f(z) = -3z + 2\bar{z} - i$   
 (c)  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$ ; (d)  $f(z) = e^{2z+i}$

3. Trouver la partie réelle  $u$  et imaginaire  $v$  en fonction de  $r$  et  $\theta$  pour les fonctions complexes suivantes :

- (a)  $f(z) = \bar{z}$ ; (b)  $f(z) = z^4$ ; (c)  $f(z) = e^z$   
 (d)  $f(z) = z + \frac{1}{z}$

4. Donner le domaine de définition des applications suivantes :

- (a)  $f(z) = 2\text{Re}(z) - iz^2$ ; (b)  $f(z) = \frac{iz}{|z-1|}$   
 (c)  $f(z) = \frac{iz}{|z|-1}$ ; (d)  $f(z) = \frac{3z+2i}{z^3+4z^2+z}$

5. Quel est l'intervalle de valeurs des applications complexes suivantes :

- (a)  $f(z) = \text{Im}(z)$ ;  $|z| \leq 2$   
 (b)  $f(z) = |z|$ ;  $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1$   
 (c)  $f(z) = \bar{z}$ ; *demi-plan*  $\text{Im}(z) > 0$

6. Pour la fonction  $f(z) = e^z$ , montrer que :

- (a)  $|e^z| = e^x$   
 (b)  $e^{z+2\pi i} = e^z$ ; déterminer la période  
 (c)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

7. Trouver l'image  $S'$  de l'ensemble  $S$  sous la transformation complexe  $w = f(z)$  :

- (a)  $f(z) = \bar{z}$ ;  $S$ : *ligne horizontale*  $y = 3$   
 (b)  $f(z) = 3z$ ;  $S$ : *demi-plan*  $\text{Im}(z) > 2$   
 (c)  $f(z) = (1 + i)z$ ;  $S$ : *ligne verticale*  $x = 2$   
 (d)  $f(z) = iz + 4$ ;  $S$ : *demi-plan*  $\text{Im}(z) \leq 1$

8. Dans ce qui suit, tracer et commenter en premier la courbe paramétrique  $C$  suivants. Ensuite, trouver la courbe paramétrique  $C'$ , image de  $C$  (tracer et commenter) :

- (a)  $z(t) = 2(1 - t) + it$ ;  $0 \leq t \leq 1$ ;  $f(z) = 3z$   
 (b)  $z(t) = i(1 - t) + (1 + i)t$ ;  $0 \leq t \leq \infty$ ;  
 $f(z) = -z$   
 (c)  $z(t) = 1 + 2e^{it}$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;  $f(z) = z + 1 - i$   
 (d)  $z(t) = t$ ;  $0 \leq t \leq 2$ ;  $f(z) = e^{itz}$

9. Trouver l'image d'un triangle de sommets  $\{0, 1, i\}$  sous les transformations suivantes :

- (a)  $f(z) = z + 2i$ ; (b)  $f(z) = e^{i\frac{\pi}{4}z}$ ; (c)  $f(z) = -3z + i$

10. Exprimer les transformations linéaires suivantes comme une composition de rotation, homothétie et une translation :

- (a)  $f(z) = 3iz + 4$ ; (b)  $f(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - i\sqrt{3}$

11. Trouver l'image des ensembles suivants, sous la transformation  $w = z^2$ .

- (a) *la ligne*  $x = 3$ ; (b) *la ligne*  $y = -1/4$ ;  
 (c) *l'arc*  $|z| = \frac{1}{2}$ ;  $0 \leq \arg(z) \leq \pi$

12. Donner la valeur de la racine principale pour les fonctions puissances suivantes, dans les points donnés :

- (a)  $z^{1/2}$ ;  $z = -i$ ; (b)  $z^{1/2}$ ;  $z = 2 + i$ ;  
 (c)  $z^{1/3}$ ;  $z = -1$ ; (d)  $z^{1/4}$ ;  $z = -1 + i\sqrt{3}$

13. Trouver l'image de l'ensemble donné sous la transformation réciproque  $w = 1/z$  :

- (a) le cercle  $|z| = 5$   
 (b) demi-cercle  $|z| = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$   
 (c) le rayon  $\arg(z) = \pi/4$   
 (d) la ligne  $y = 4$