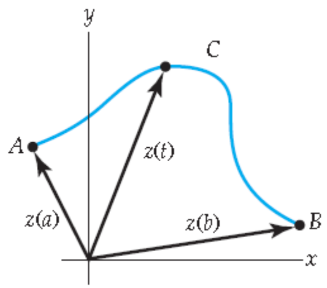
Chapitre 04 : Intégrales complexes



I. Notions sur les courbes :

Une courbe paramétrique $C(t)$ est caractérisée par son paramétrisation :

$z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$

La notion de courbe lisse, lisse par morceaux ou fermée est contenue dans la formulation précédente. Or, si on suppose que la dérivée de $z(t)$ existe et notée $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, on dit que la courbe $C(t)$ est lisse si sa dérivée est continue et non nulle sur l'intervalle $a \leq t \leq b$.

$A: z(a) = x(a) + iy(a)$: le point initial de la courbe C

$B: z(b) = x(b) + iy(b)$: le point initial de la courbe C

I.1. Les contours :

Les notions de courbe lisse, courbe lisse par morceau et courbe fermé, peuvent être interprétée facilement à partir de l'équation paramétrique :

$$z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$$

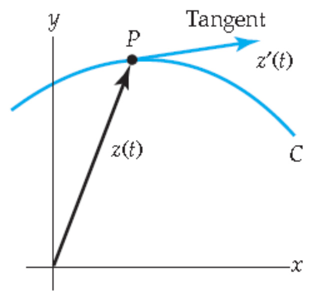
Supposant que la dérivée de $z(t)$ existe et elle donnée par :

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), a \leq t \leq b$$

On dit que C est une courbe lisse sur le plan $\mathbb{C}$ si $z'(t)$ est continue et ne s'annule jamais sur l'intervalle $a \leq t \leq b$.

Autrement, la courbe C ne peut avoir de coins aigus ou des pointes.

Une courbe lisse (ou régulière) par morceau, possède une tangente tournante continue à l'exception ou les points dans lesquels se joignent les courbes $C_1, C_2, \ldots C_n$.



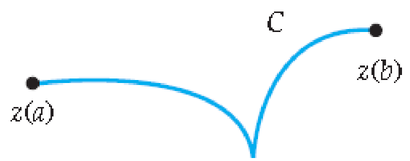
Une courbe est dite simple si pour tout $t_1 \neq t_2$: $z(t_1) \neq z(t_2)$, à l'exception peut-être à $t = a$ et $t = b$.

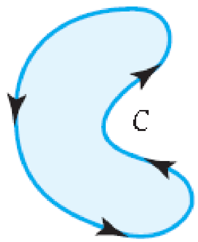
Dans ce cas la courbe est dite une courbe fermée si : $z(a) = z(b)$

Elle dite simple fermée si $z(t_1) \neq z(t_2)$ pour tout $t_1 \neq t_2$ et $z(a) = z(b)$.

En analyse complexe, une courbe lisse, ou lisse par morceau est appelée aussi « Contour » ou « Chemin ».

on dit qu'une courbe possède une orientation positive si elle évolue dans le sens contraire des aiguilles de la montre pour $a \leq t \leq b$, alors qu'elle possède un sens négative si elle évolue dans le même sens des aiguilles de la montre.





II. L'intégrale complexe :

Une intégrale compexe d'une fonction f de variable complexe z qui est définie sur un contour C est notée : $\int_C f(z)dz$

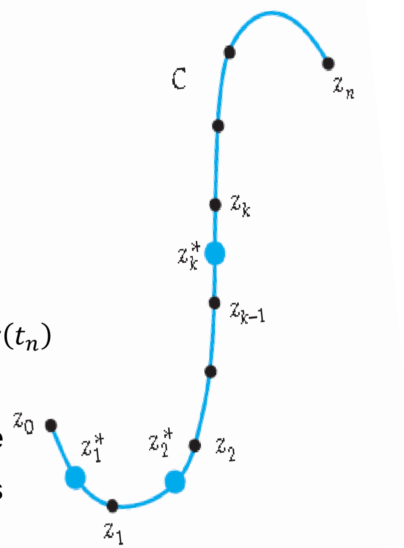
II.1. Les étapes d'une intégrale complexe :

1- Soit une fonction complexe f d'une variable complexe z, définie sur tous les points d'une courbe lisse C qui repose sur une certaine région du plan $\mathbb{C}$. $C: z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$

2- Soit P la partition de l'intervalle du paramètre $[a,b]$ en n sous-intervalles : $[t_{k-1}, t_k]$ de longueur $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$:

$a = t_0 < t_1 < \cdots t_{n-1} < t_n = b$

Ceci induit une partition de la courbe C en n sous-arcs dont les points initiaux et finaux sont les paires :



$z_0 = x(t_0) + iy(t_0)$ $\quad$ $z_1 = x(t_1) + iy(t_1)$

$z_1 = x(t_1) + iy(t_1)$ $\quad$ $z_2 = x(t_2) + iy(t_2)$

. .

. .

. .

$z_{n-1} = x(t_{n-1}) + iy(t_{n-1})$ $\quad$ $z_n = x(t_n) + iy(t_n)$

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}; k = 1,2, \dots n$

3- Soit $\|P\|$ la norme de la partition P de $[a,b]$, qui est la longueur maximale des sous-intervalles Δt_k.

4- On choisit un point : $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ sur chaque sous arc de C.

5- on forme n produits : $f(z_k^*).\Delta z_k$, $k = 1,2, \dots n$ et on somme ces produits : $\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*).\Delta z_k$

Définition 1 : Intégrale complexe

L'intégrale complexe de f sur C est définie par :

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*).\Delta z_k$$

Si la limite dans la définition 1 existe alors on dit que f est intégrable sur C. Cette limite existe que ce soit f est continue en tout point de C et que C soit lisse ou lisse par morceaux.

On utilise la notation : $\oint_C f(z)dz$ pour une intégrale complexe sur une courbe fermée orientée positivement et $-\oint_C f(z)dz$ dans le cas inverse. Une intégrale complexe est en effet une intégrale de contour.

II.2. Fonction complexe à variable réelle :

En général si f_1 et f_2 sont des fonctions réelles pour une variable réelle t alors : $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ est une fonction complexe (à valeurs complexes) de la variable réelle t sur l'intervalle : $a \le t \le b$, alors on peut écrire que :

$$\int_a^b f(t).dt = \int_a^b f_1(t).dt + i\int_a^b f_2(t).dt$$

On notera les propriétés suivantes pour $f(t)$ et $g(t)$:

(1) $\int_a^b k.f(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$; $k = Cte \in \mathbb{C}$;

(2) $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;

(3) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$; (4) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

Exercice 1 : Évaluez l'intégrale $\int_C \bar{z}\,dz$; $C: x = 3t, y = t^2$; $-1 \le t \le 4$

II.3. Évaluation d'une intégrale de contour :

Théorème 4.1 : Si f est continue sur une courbe lisse C donnée par : $z(t) = x(t) + iy(t), a \le t \le b$, alors :

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z).z'(t).dt$$

Exercice 2 : Évaluer l'intégrale :

$\oint_C \frac{1}{z} dz,\ C: x = \cos t\,, y = \sin t\,; 0 \le t \le 2\pi$

Théorème 4.2 : Propriétés :

Supposons les fonctions complexes f et g continues sur un domaine D et C est une courbe lisse reposant entièrement sur D, alors :

(1) $\int_C\ k.f(z)dt = k\int_C\ f(z)dz\,; k = Cte \in \mathbb{C}$;

(2) $\int_C\ (f(z) + g(z))dz = \int_C\ f(z)dz + \int_C\ g(z)dz$;

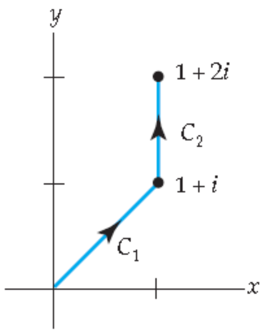
(3) $\int_C\ f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$;

(4) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C\ f(z)dz$

Exercice 3 : Évaluez l'intégrale complexe suivante :

$\int_C\ (x^2 + iy^2)\,dz$

Sur la courbe C montrée sur la figure ci-contre.



Théorème 4.3 : Théorème de la borne supérieure

Si f est une fonction continue sur une courbe lisse C et si $|f(z)| \le M$ pour tout z sur C, alors : $\left|\int_C\ f(z)dz\right| \le ML$; où :

$L = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}dz = \int_a^b |z'(t)|dz$

Exercice 4 : Trouver une limite supérieure pour la valeur absolue de :

$\oint \frac{e^z}{z^2+1} dz$ ou $C: |z| = 4$

Remarques : il n'existe pas une paramétrisation unique d'une courbe C :

$z(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t\,; 0 \le t \le 2\pi$

$z(t) = e^{i2\pi t} = \cos t + i\sin t\,; 0 \le t \le 1$

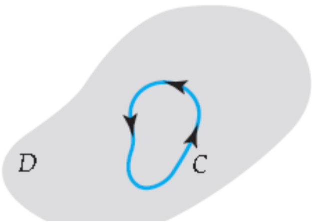
$z(t) = e^{i\frac{\pi t}{2}} = \cos\frac{\pi t}{2} + i\sin\frac{\pi t}{2}\,; 0 \le t \le 4$

C'est une paramétrisation du cercle unitaire : $C: |z| = 1$

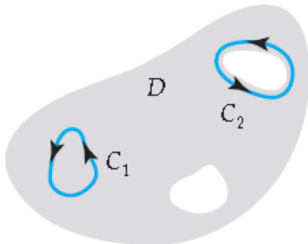
III. Théorème de Cauchy-Goursat :

III.1. Domaines simplement et multiplement connexes :

Un domaine D est dit simplement connexe si quelque soit la courbe simple et fermée C, entièrement reposant sur D, peut être rétrécie dans un point, sans qu'elle ne quitte D.



D'autre part, un domaine est dit multiplement connexe, n'est pas simplement connexe, c-à-d contient des vides ou trous, tel que s'il existe des courbes simple et fermé reposant entièrement sur D, elles ne peuvent pas être rétrécie sans qu'elle ne quitte le domaine D.



On parle de domaine, doublement connexe (1 trou), triplement connexe (2 trous), etc…

III.2. Théorème de Cauchy :

Théorème 4.4 :

Supposant que la fonction f est analytique sur un domaine simplement connexe D et que f' est continue sur D, alors, pour tout contour simple et fermé C dans D, on a : $\oint_C f(z)dz = 0$

Indication : la démonstration peut être faite en utilisant le théorème de Green qui exprime une intégrale de ligne en une intégrale double (surface)

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Avec : $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, u *et* v vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

III.3. Théorème de Cauchy-Goursat

Théorème 4.5 :

Supposant que la fonction f est analytique sur un domaine simplement connexe D. Alors pour tout contour simple fermé C dans D, on a :

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Exercice 5 : Évaluez l'intégrale : $\oint_C e^z dz$ en utilisant le théorème de Cauchy-Goursat sur un contour quelconque sur $\mathbb{C}$.

Une autre variante du théorème de Cauchy-Goursat peut être stipulée comme suit :

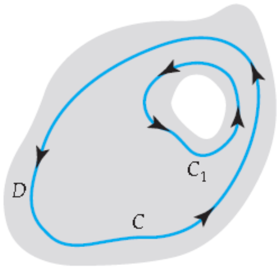
Si f est analytique sur tout point dans et sur une courbe C simple et fermée, alors : $\oint_C f(z)dz = 0$

Exercice 6 : Évaluez l'intégrale : $\oint_C \frac{1}{z^2} dz$;

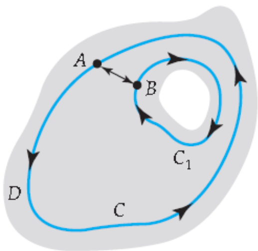
$C: ellipse: (x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-5)^2 = 1$

III.4. Théorème de Cauchy-Goursat pour des domaines multiplement connexes :

Si f est analytique sur un domaine D multiplement connexe, qu'on supposera pour faire simple, que c'est un domaine doublement connexe (un seul trou). C et C_1 sont des contours simples fermés sur D. C_1 entoure le trou (vide) montré sur la figure ci-contre. f est analytique sur tout point sur chaque contour et à l'intérieur de C et l'extérieur de C_1.



(a)



(b)

En introduisant le raccourci AB, la région limitée entre les deux courbes devient maintenant simplement connexe, alors on peut écrire :

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{AB} f(z)dz + \oint_{-AB} f(z)dz + \oint_{-C_1} f(z)dz = 0$$

Donc :

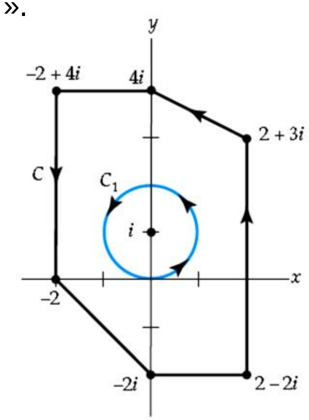
$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz = 0$$

C'est « le principe de la déformation du contour ».

Exercice 7 : Évaluez l'intégrale complexe :

$$\oint \frac{dz}{z-i}$$

Et ce sur le contour montré sur la figure ci-contre.



Le résultat de l'exemple précédent, peut être généralisé comme suit :

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i; n = 1 \\ 0; \quad n \neq 1 \end{cases}$$

$z_0 = Cte \in \mathbb{C}$ à l'intérieur de tout contour C simple fermé.

Exercice 8 : Évaluez l'intégrale complexe suivant :

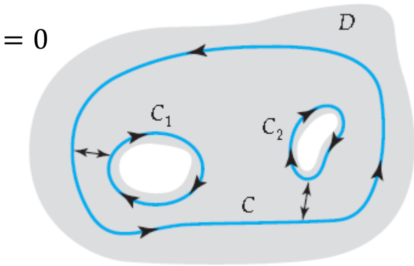
$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z+3} dz$; $C: |z-2| = 2$

Dans le cas particulier du domaine triplement connexe D, ci-contre, on a également de la même manière que précédemment :

$\oint_C f(z)dz + \oint_{-C_1} f(z)dz + \oint_{-C_2} f(z)dz = 0$

alors :

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$



Théorème 6 :

Supposant $C, C_1, C_2, \ldots C_n$ des contours simples fermés avec une orientation positive tel que $C_1, C_2, \ldots C_n$ sont à l'intérieur de C mais les régions internes de chaque $C_k; k = 1,2 \ldots n$ n'ont aucun point en commun.

Si f est analytique sur chaque contour et à chaque point intérieur de C et extérieur de $C_k; k = 1,2 \ldots n$:

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

Exercice 9 : Évaluez l'intégrale complexe suivant :

$\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$; $C: |z| = 4$

Théorème 7 : Analycité implique indépendance du chemin d'intégrale

Supposant que la fonction f est analytique dans un domaine simplement connexe D et que C est un contour quelconque entièrement dans D, alors : $\oint_C f(z)dz$ est indépendant du chemin C.

Définition 2 : Supposant f continue sur D. Si une fonction F existe, tel que : $F'(z) = f(z)$ en chaque point sur D, alors F est appelée fonction primitive de f.

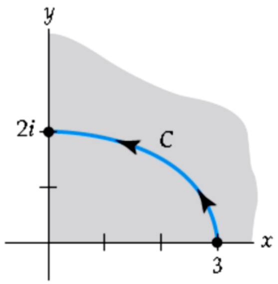
Exercice 10 : Évaluez l'intégrale $\int_C \cos z\, dz$ entre $z_0 = 0$ et $z_1 = 2 + i$

Quelques conclusions :

- C est fermé, alors : $z_0 = z_1 \rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$
- Si une fonction continue f possède une primitive F sur D, alors $\oint_C f(z)dz$ est indépendant du chemin
- Si f est une fonction continue et que $\oint_C f(z)dz$ est indépendant du chemin C dans D, alors f possède une primitive F sur D

Exercice 11 : Évaluez l'intégrale $\int_C \frac{1}{z} dz$ sur C

Exercice 12 : Évaluez l'intégrale $\int_C \frac{1}{z^{1/2}} dz$ sur $C: segment\ droit\ entre\ z_0 = 0$ et $z_1 = 9$



IV. Les formules de l'intégrale de Cauchy :

1ère Formule : supposant f analytique sur un domaine D simplement connexe et que C est une courbe simple fermé dans D. Pour tout point $z_0 \in C$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Exercice 13 : Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i} dz$ sur $C: |z| = 2$

Exercice 14 : Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z}{z^2+9} dz$ sur $C: |z - 2i| = 4$

2ème Formule : supposant f analytique sur un domaine D simplement connexe et que C est une courbe simple fermé dans D. Pour tout point $z_0 \in C$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Exercice 15 : Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz$ sur $C: |z| = 1$

Exercice 16 : Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz$ sur $C \equiv C_1 + C_2$