Chapitre 03 : Fonctions élémentaires

I. Fonction exponentielle complexe :

On rappelle la définition d'une fonction exponentielle complexe :

Déf. 3.1 :

La fonction e^z définie par :

$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ Est appelée fonction exponentielle complexe.

Pour une fonction exponentielle complexe, les propriétés sont similaires avec une exponentielle réelle, telle que la différentiabilité partout sur ***R*** de e^x : $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

Théorème 3.1 :

La fonction exponentielle e^z est entière et sa dérivée est donnée par : $\frac{d}{dz}e^z = e^z$

On vérifie bien que pour $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ est analytique et répond aux conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

En plus du fait que la dérivée de e^z :

$$f'(z) = \frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

Exemple 1: Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{iz^4(z^2 - e^z)}; (\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{exp\{z^2 - (1+i)z + 3\}}$

I.2. Module, argument et conjugué de e^z :

Si on pose $w = e^z$ dans la forme polaire, alors on peut l'écrire :

$$w = e^x \cos y + ie^x \sin y = r(\cos\theta + \sin\theta)$$

Par identification, on trouve :

$r = e^x$

$\theta = y + 2n\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Vérifiant bien que : $|e^x| = e^x$; du moment que dans *R* : $\forall x; e^x > 0$

Et $\arg(z) = y + 2n\pi;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Un résultat important est déduit : $\forall z \in \mathbb{C}; e^z \neq 0$.

Le conjugué de e^z est également obtenu :

$$\overline{e^z} = e^x \cos y - ie^x \sin y = e^x \cos(-y) + ie^x \sin(-y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

Ceci conclut donc que : $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

I.3. Propriétés algébriques :

Si z_1 et z_2 sont deux complexes alors on a :

(1) $e^0 = e^{0+i0} = 1$

(2) $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

(3) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1}.e^{-z_2} = e^{z_1-z_2}$

(4) $(e^{z_1})^n = e^{nz_1};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

I.4. Périodicité de e^z :

Comme $\boldsymbol{e^z}$ définie par les deux fonctions cosinus et sinus ; qui sont elles-mêmes périodiques, on en déduit que la fonction $\boldsymbol{e^z}$ est également périodique de période $i2\pi$: $e^{z+i2\pi} = e^z$

« *La fonction exponentielle complexe est périodique avec une période purement imaginaire* $i2\pi$: $f(z+i2\pi)=f(z)$ »

Ceci peut être également vérifié pour : $i4\pi; i6\pi\pi; \dots . i2k\pi,\ k=\pm1,\pm2,\dots$

Mais la première région de périodicité $-\pi<y\leq\pi$ est définie comme « région fondamentale ».

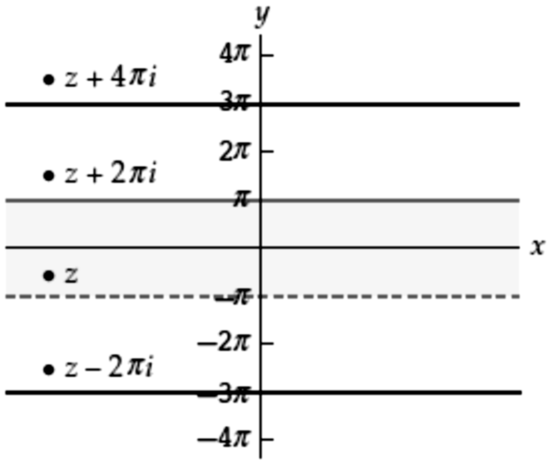

Figure 1. Région fondamentale de exp(z)

I.5. Transformation sous e^z :

Comme $z=x+iy$ on s'intéresse aux cas suivants :

Cas 1 : z est une ligne verticale : $z=a+it; a=Cte. et -\pi<t\leq\pi$:

Donc sous $\boldsymbol{e^z = e^a . e^{it} \rightarrow r=e^a;\ \theta=t+2n\pi}$

Ceci montre que pour toute région périodique sous $\boldsymbol{e^z}$ donne lieu à un ensemble de cercles concentriques de rayon $\boldsymbol{e^a>0}$ **:**

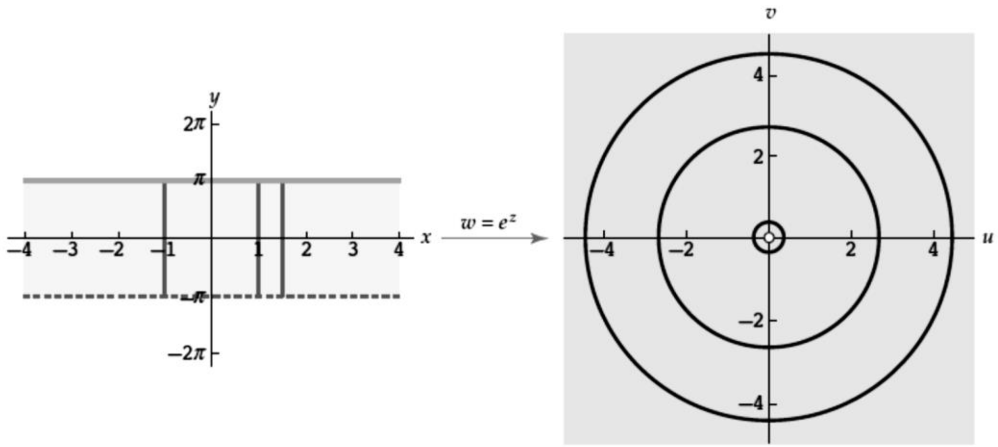

Figure 2. Transformation de segments verticaux sous exp(z)

Cas 2 : z est une ligne horizontale : $z=t+ib; b=Cte. et -\infty<t\leq\infty$

Donc sous $\boldsymbol{e^z = e^t . e^{ib} \rightarrow s=e^t\ avec\ 0<s<\infty}$

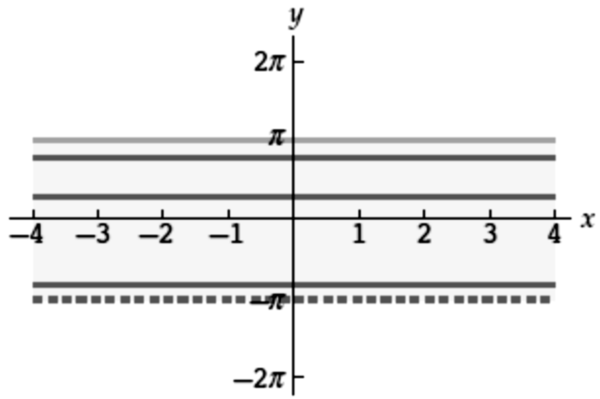

Figure 3. Z est sous forme de lignes horizontales

Les images $w=f(z)=s.e^{ib}$ ce sont des segments droits de longueur $\boldsymbol{s=e^t}$ et qui sont portés sur une direction définie par l'argument *b*.

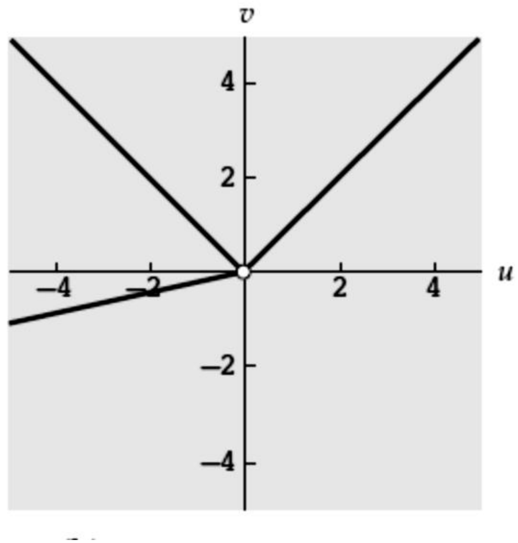

Figure 4. Image sous exp(z) de lignes horizontales

On résume les propriétés des transformations sous e^z comme suit :

(i) $w = e^z$ transforme la région fondamentale $-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi$ en un ensemble $|w| > 0$.

(ii) $w = e^z$ transforme le segment vertical : $x = a, -\pi < y \leq \pi$ en un cercle $|w| > e^a$.

(iii) $w = e^z$ transforme la ligne horizontale $-\infty < x < \infty, y = b$ en un rayon porté sur un angle $\arg(w) = b$.

II. Fonction logarithme complexe :

Comme on l'a déjà vu dans la fonction exponentielle complexe, elle n'est pas une fonction univoque comme c'est le cas pour la fonction exponentielle réelle. Ceci dit, dans la plan des complexes ***C*** et pour un complexe donné fixe et non nul, l'équation : $e^w = z$ a une infinité de solutions (à cause de la périodicité de l'argument). Ceci peut être mieux expliqué en supposant : $w = u + iv$ une solution de l'équation $e^w = z$ et dans ce cas on écrira : $|e^w| = |z|$ et $\arg(w) = \arg(z)$ et il en découle de l'identification que : $e^u = |z|$ et $v = \arg(z)$ ou d'une manière équivalente : $u = \log|z|$ et $v = \arg(z)$. Cependant, pour un complexe non nul *z* on peut montrer que :

$$si\ e^w = z, alors: w = \log|z| + iarg(z)$$

A cause de l'infinité des arguments de *z*, l'équation ci-dessus donne une fonction multivaluée (à valeurs multiples) $w = G(z)$ qui est donnée par la définition suivante :

Déf.3.2.

La fonction multivaluée $\ln z$ définie par :

$\ln z = \log|z| + iarg(z)$ Est appelée le ***Logarithme Complexe*** de z.

En utilisant la notation exponentielle de $z = r.e^{i\theta}$, alors on peut réécrire le logarithme complexe de z dans la forme suivante :

$\ln z = \log r + i(\theta + 2n\pi); n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ avec $r > 0$.

Remarque : *la notation $log\, x$ est utilisée pour définir le logarithme népérien (à base de e) de la valeur réelle positive non nulle x.*

Exemple 2. Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e^w = i}; (\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{e^w = 1 + i}; (\boldsymbol{c})\boldsymbol{e^w = -2}$

II.1. Les identités logarithmiques :

Les identités suivantes sont facilement démontrables par la définition II.1, qui sont analogues aux identités logarithmiques réelles :

Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls et n un entier, alors :

(i) $\ln(z_1.z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

(ii) $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$

(iii) $\ln z_1^n = n \ln z_1$

II.2. Valeur principale du logarithme complexe :

La fonction complexe $Ln\ z$ définie par :

$Ln\ z = \log|z| + iArg(z)\,;$

$-\pi < Arg(Z) \leq \pi$: $est\ l'argument\ principal\ de\ z$

Est appelée la valeur principale du logarithme complexe.

Exemple 3. Calculer ;es valeurs principales du logarithme complexe Lnz pour :

$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e^w} = \boldsymbol{i}; (\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{e^w} = \mathbf{1} + \boldsymbol{i}; (\boldsymbol{c})\boldsymbol{e^w} = -\mathbf{2}$

II.3. La fonction Lnz inverse de la fonction e^z :

Si la fonction exponentielle complexe $f(z) = e^z$ est définie sur ***la région fondamentale*** $-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi$, donc $f(z)$ est une fonction univoque (un-à-un) et la fonction inverse de $f(z)$ est la valeur principale du logarithme complexe : $f^{-1}(z) = Ln\ z$.

II.4. Analyticité du logarithme complexe :

Comme la fonction logarithme complexe est une fonction multivaluée donc elle ne vérifie pas les conditions de continuité et dérivabilité sur tout le plan complexe, c'est pour ainsi qu'on définit une fonction logarithmique complexe définie sur le domaine $\mathbb{C} - \{]-\infty, 0]\}$ ou $\mathbb{C} - \{Re(z) \leq 0\}$. On parle dans ce cas d'une fonction logarithme complexe qui constitue une ***Branche Principale*** de $f(z) = \ln z$. Cette branche est définie comme :

$f_1(z) = \log|z| + iArg(z) = \log r + i\theta$ avec $-\pi < Arg(z) = \theta < \pi$

Ce qui exclut tout $x \in]-\infty, 0]$.

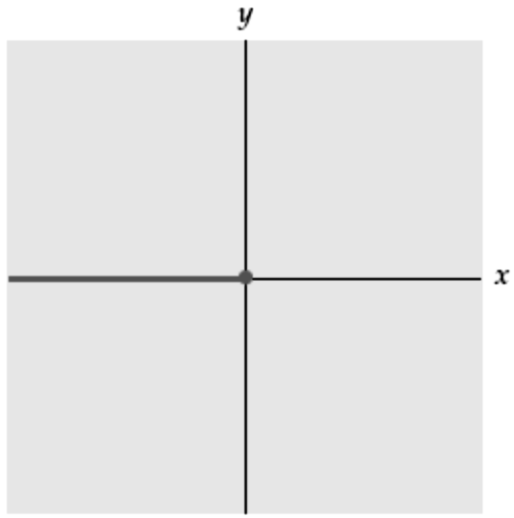

Figure 5. Domaine de définition de $f_1: \mathbb{C} - \{]-\infty, \mathbf{0}]\}$

Ceci nous permet d'obtenir une fonction analytique sur ce domaine : continue et dérivable qui vérifie le théorème suivant :

Théorème 3.2. Analyticité de la branche principale de lnz

La branche principale f_1 du logarithme complexe définie par :

$f_1(z) = \log|z| + iArg(z) = \log r + i\theta$ avec $-\pi < Arg(z) = \theta < \pi$

Est une fonction analytique et sa dérivée est donnée par :

$$f_1'(z) = \frac{df_1}{dz} = \frac{1}{z}$$

Exemple 4. Trouver les dérivées des fonctions suivantes dans le domaine approprié :

$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{z}.\boldsymbol{Lnz}$; $(\boldsymbol{b})\boldsymbol{Ln}(\boldsymbol{z}+\mathbf{1})$

II.5. Transformations sous $Ln\,z$:

Comme la fonction $Ln\,z$ constitue une fonction inverse de l'exponentielle complexe e^z on peut déduire les propriétés de transformation suivantes sous une fonction logarithmique complexe :

(i) $w = Ln\,z$ transforme l'ensemble $|z| > 0$ en une région $-\infty < u < \infty, -\pi < v < \pi$.

(ii) $w = Ln\,z$ transforme un cercle définie par $|z| = r$ en une un segment de ligne verticale $u = \log r,\ -\pi < v < \pi$.

(iii) $w = Ln\,z$ transforme un rayon $\arg(z) = \theta$ en une ligne horizontale $-\infty < u < \infty, v = \theta$.

III. Puissance complexe :

On sait déjà comment manipuler une puissance entière d'un nombre complexe du type z^n, par contre lorsqu'il s'agit d'un exposant complexe, il n'est pas évident de calculer ou de résoudre une expression comme : $(1+i)^i$, pour cela on fait appelle au deux fonctions exponentielle complexe et logarithme complexe :

Def. 3.3 :

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la puissance complexe z^α est définie comme : $z^\alpha = e^{\alpha.\ln z}$

Il est possible de vérifier que pour un exposant n entier, la fonction puissance z^n est une fonction univoque, par contre lorsqu'il s'agit d'un exposant complexe comme c'est le cas pour z^α on parle ici d'une ***fonction puissance complexe*** multivaluée.

Exemple 5. Trouver les valeurs des puissances complexes suivantes :

$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}\boldsymbol{i}}, (\boldsymbol{b})(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{i}}$

Les puissances complexes définies plus haut, vérifient les propriétés suivantes qui sont analogues dans le cas des puissances réelles :

(i) $z^{\alpha_1}.z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1+\alpha_2}$

(ii) $z^{\alpha_1}/z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1-\alpha_2}$

(iii) $(z^\alpha)^n = z^{n\alpha}; n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

III.1. Valeur principale d'une puissance complexe :

On rappelle que dans la définition III.1 la puissance complexe est une multivaluée définie avec le $\ln z$ qui est déjà une multivaluée. On peut définir une valeur principale d'une puissance complexe en utilisant la valeur principale du logarithme complexe :

Déf. 3.4 :

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la fonction définie par :

$z^\alpha = e^{\alpha.Ln\,z}$ est appelée ***La valeur principale de la puissance complexe z^α***

Exemple 6. Trouver les valeurs principales des puissances complexes suivantes :

$(\boldsymbol{a})(-\mathbf{3})^{\boldsymbol{i}/\boldsymbol{\pi}}, (\boldsymbol{b})(\mathbf{2}\boldsymbol{i})^{\mathbf{1}-\boldsymbol{i}}$

III.2. Analyticité de la fonction puissance complexe :

Etant définie avec la fonction logarithme complexe et l'exponentielle complexe, la fonction puissance complexe est définie analytique sur le domaine : $D = \mathbb{C} - \{]-\infty, 0]\}$ et on parle dans ce cas de la ***fonction branche principale de la puissance complexe*** :

$$f_1(z) = z^\alpha = e^{\alpha.(\log r + i\theta)}, \qquad -\pi < \theta < \pi$$

Cette fonction analytique (continue et dérivable) sur D et sa dérivée est définie par :

$$f_1'(z) = \frac{d}{dz} e^{\alpha.Ln\,z} = e^{\alpha.Ln\,z}.\frac{d}{dz}[\alpha.Ln\,z] = e^{\alpha.Ln\,z}.\frac{\alpha}{z} = \alpha.z^{\alpha-1}$$

Exemple 7. Trouver les dérivées de la valeur principale de z^i dans le point $z = 1 + i$:

IV. Fonction trigonométriques complexes :

Déf. 3.5 :

Les fonctions complexes **Sinus** et **Cosinus** sont définies par :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

On définit également à partir de là les fonctions trigonométriques complexes qui ont découlent de la définition du Sinus et Cosinus, d'une manière analogue aux fonctions trigonométriques réelles :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \sec z = \frac{1}{\cos z}; \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Exemple 8. : Dans chaque partie, exprimer les fonctions trigonométriques données ci-dessous sous la forme $a + ib$:

$\boldsymbol{(a)\ \cos i, (b)\ \sin(2+i), (c)\ \tan(\pi - 2i)}$

IV.1. Identités trigonométriques :

Comme les fonctions trigonométriques réelles, les fonctions trigo. Complexes vérifient les identités suivantes :

(i) $\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$

(ii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(iii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 . \cos z_2 \pm \cos z_1 . \sin z_2$

(iv) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 . \cos z_2 \mp \sin z_1 . \sin z_2$

(v) $\sin 2z = 2. \sin z . \cos z, \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

IV.2. Périodicité :

On déduit trivialement que les fonctions trigonométriques complexes Sinus et Cosinus sont périodiques et leur période est de 2π :

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \cos(z + 2\pi) = \cos z$$

IV.3. Zéros des fonctions Sinus et Cosinus Complexes :

Les fonctions Sinus et Cosinus complexes admettent d'une manière analogue des zéros dans les valeurs réelles suivantes :

$\sin z = 0 \ ssi\ z = n\pi$

$\cos z = 0 \ ssi\ z = \frac{(2n+1)}{2}\pi$, avec $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

IV.4. Analyticité :

Les dérivées des fonctions Sinus et Cosinus complexes sont obtenues à partir de leurs définitions en fonction de l'exponentielle complexe. On obtient :

$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$; $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$

$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$; $\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$

$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z . \tan z$; $\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z . \cot z$

V. Fonctions hyperboliques complexes :

Déf. 3.6. :

Les fonctions hyperboliques complexes sont définies par :

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ et } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

On en déduit également les autres fonctions hyperboliques :

$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$

Il faut également remarquer que les fonctions hyperboliques $\sinh z$ et $\cosh z$ sont entières car e^z l'est déjà.

V.1. Dérivées des fonctions hyperboliques complexes :

Les fonctions hyperboliques complexes sont obtenues à partir de leurs définitions en fonction de l'exponentielle complexe. On obtient alors :

$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z\,;\ \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$

$\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z\,;\ \frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$

$\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z.\tanh z\,;\ \frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z\,.\coth z$

V.2. Relations avec les fonctions trigonométriques complexes :

Il est assez intéressant de voir quelle la relation entre les fonctions hyperboliques et trigonométriques complexes, du moment que leurs expression ont la même forme à un facteur près.

Remplaçons z par iz dans la déf. 2.6 et on obtient :

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = i \sin z$$

Ou, autrement : $\sin z = -i \sinh(iz)$

De manière similaire on obtient le passage entre les différentes fonctions hyperboliques et trigonométriques comme suit :

$\sin z = -i \sinh(iz)\ \ et \cos z = \cosh(iz)$

$\sinh z = -i \sin(iz)\ \ et \cosh z = \cos(iz)$

$\tan(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \sinh z}{\cosh z} = i \tanh z$

V.3. Identités des fonctions hyperboliques complexes :

Les égalités ci-dessus peuvent être utilisées pour démontrer les identités des fonctions hyperboliques :

(i) $\sinh(-z) = -\sinh z\,, \cos h(-z) = \cosh z$

(ii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(iii) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \,.\cosh z_2 \pm \cosh z_1 \,.\sinh z_2$

(iv) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \,.\cosh z_2 \pm \sinh z_1 \,.\sinh z_2$

(v) $\sinh 2z = 2.\sinh z\,.\cosh z\,, \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$

VI. Fonctions Trigonométriques et hyperboliques inverses :

VI.1. Fonctions trigonométriques inverses :

En cherchant de trouver des solutions à l'équation $\sin w = z$, on en a besoin de définir la fonction inverse tel que : $z = \sin^{-1} w$. Pour cela ; partant de la définition d'une fonction sinus complexe :

$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$ ou autrement : $e^{2iw} - 2iz\, e^{iw} - 1 = 0$

Et là on est ramené à résoudre une équation quadratique en e^{iw} :

$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2} \rightarrow iw = \ln\left[iz + (1 - z^2)^{1/2}\right]$

Ou : $w = -i \ln\left[iz + (1 - z^2)^{1/2}\right]$

Ceci nous conduit à définir ***le sinus inverse*** :

$\sin^{-1} z = -i \ln\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right]$: ***Sinus inverse***

Qui est une fonction multivaluée, du moment qu'elle s'écrit en fonction du logarithme complexe.

Le même procédé est utilisé pour définir les autres fonctions trigonométriques inverses :

$\cos^{-1} z = -i \ln\left[z + i(1-z^2)^{1/2}\right]$: ***Cosinus inverse***

$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left[\frac{i+z}{i-z}\right]$: ***Tangente inverse***

Les dérivées de ces fonctions sont définies uniquement sur des domaines ou ces fonctions sont continues et dérivables (ça revient de définir des branches de ces fonctions multivaluée) :

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$$

VI.2. Fonctions hyperboliques inverses :

De la même manière que précédemment, on procède à la définition des fonctions hyperboliques inverses comme solutions des équations du type : $\sinh w = z$, et on obtient :

$\sinh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2+1)^{1/2}\right]$: **Sinus Hyperbolique inverse**

$\cosh^{-1} z = \ln\left[z + i(z^2-1)^{1/2}\right]$: **Cosinus Hyperbolique inverse**

$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$: **Tangente hyperbolique inverse**

Pour des branches de ces fonctions définies sur un domaine D où elles sont continues et dérivables, on a :

$$\frac{d}{dz}\sinh^{-1} z = \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$$

Exemple 9. :

1- ***Trouver toutes les valeurs de :*** $\boldsymbol{sin^{-1}\sqrt{5}}$
2- ***Trouver la valeur de la dérivée de*** $\boldsymbol{sin^{-1} z}$ ***dans le point*** $\boldsymbol{z = i}$ ***(vérifier que ce point appartient au domaine de définition).***
3- ***Admettant que*** $\boldsymbol{cosh^{-1} z}$ ***représente une branche du cosinus hyperbolique inverse obtenu en utilisant comme branche de la fonction puissance quadratique complexe et le logarithme complexe :*** $\boldsymbol{f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, 0 < \theta < 2\pi}$. ***Trouver les valeurs suivantes :***
4- $\boldsymbol{(a)\ cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}, (b)\ \frac{d}{dz}cosh^{-1} z\Big|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}}}$