Chapitre 02 : Fonctions analytiques

I. Fonction de la variable complexe :

On rappelle la définition d'une fonction en mathématiques :

« ***Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B, est une application qui fait correspondre à chaque élément de A, un seul et unique élément en B*** »

Déf. 2.1 :

La fonction complexe est la fonction f dont le domaine de définition et l'intervalle des valeurs sont des sous-ensemble du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Une fonction complexe est également appelée, Fonction à valeurs complexes ou Fonction de la variable complexe.

Une fonction complexe f est dénotée typiquement par la variable complexe $z = x + iy$ et son image par la variable $w = f(z)$.

Dans ce qui suit, on réservera la notation $w = f(z)$ pour les fonctions complexes et la notation $y = f(x)$ sera réservée la fonction réelle de la variable réelle x.

Exemple 1: ***l'expression : $z^2 - (2+i)z$ peut être évaluée pour tout nombre complexe z donné et donnera toujours comme résultat un nombre complexe unique : c'est une fonction complexe.***

Il est souvent pratique d'exprimer les entrées et les sorties d'une fonction complexe en termes de leurs parties réelle et imaginaire.

Si on considère : $w = f(z)$ l'image donc de $z = x + iy$ pourra s'écrire donc comme : $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ou $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont respectivement : la partie réelle et la partie imaginaire :

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Exemple 2: la fonction complexe: $f(z) = z^2$ peut-être réécrite en fonction de ses deux parties réelle et imaginaire :

$$\boldsymbol{w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv}$$

Par identification : $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$

I.1. la fonction exponentielle complexe:

D'après la définition de la forme exponentielle d'un nombre complexe introduite au chapitre 1, on définit ici la fonction exponentielle complexe :

Déf. 2.2 :

La fonction e^z définie par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Est appelée **la fonction exponentielle complexe.**

On reviendra sur les propriétés de cette fonction dans le chapitre 03 sur les fonctions complexes élémentaires.

On rappellera ici qu'un nombre complexe s'écrit en notation complexe avec les coordonnées polaires comme : $z = x + iy = r.e^{i\theta}$

Ceci nous permet de déduire qu'une fonction complexe peut être exprimée dans ce système de coordonnées :

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

Exemple 3: la fonction complexe: $\boldsymbol{f(z) = z^2}$ ***peut-être réécrite en fonction de ses deux parties réelle et imaginaire :***

$$\boldsymbol{w = f(z) = z^2 = \left(r.e^{i\theta}\right)^2 = r^2.e^{i2\theta} = r^2}\ \cos 2\theta + \boldsymbol{ir^2}\ \sin 2\theta = \boldsymbol{u + iv}$$

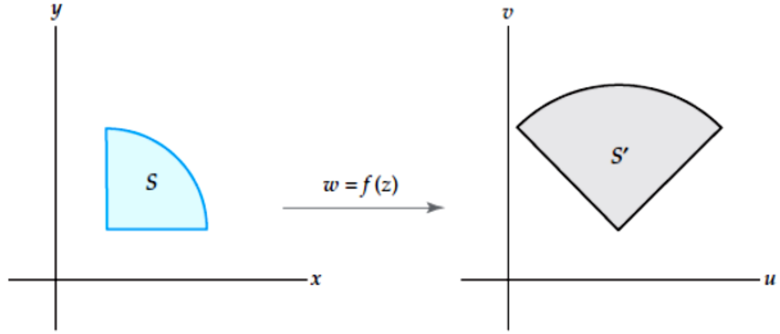
Par identification : $\boldsymbol{u}(r,\theta) = \boldsymbol{r^2}\ \cos 2\theta$ ***et*** $\boldsymbol{v}(r,\theta) = \boldsymbol{r^2}\ \sin 2\theta$

II.1. Fonctions complexes comme Transformation (f image de z) :

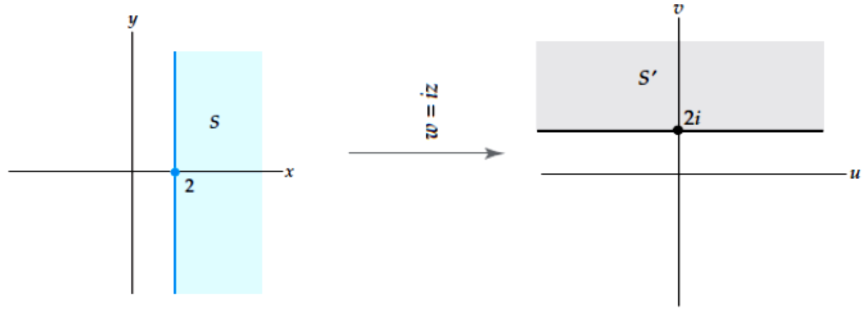
On rappelle que pour représenter un nombre complexe il nous faut un plan (2D) donc pour représenter la fonction d'une variable complexe (avec ses deux parties réelle et imaginaire) il faudra encore deux autres dimensions pour représenter graphiquement la fonction complexe par rapport sa variable, ce qui est techniquement impossible. C'est pour cette raison que la représentation géométrique d'une fonction complexe (développée par le mathématicien allemand Bernhard RIEMANN) repose sur l'utilisation de deux plan complexes ; le premier comprendra l'ensemble des points complexes z et le second où sera représenté les images de chaque point complexe du premier plan $w = f(z)$, donnant ainsi la représentation de la fonction complexe comme une transformation géométrique (en anglais « Mapping » provenant du mot anglais « map » qui signifie une carte). On parlera également de transformation complexe pour désigner la représentation de la fonction complexe. C'est un outil très utile qui fait correspondre l'ensemble de départ z vers l'ensemble d'arrivée $w = f(z)$

Notation : Soit un ensemble S de points z dans le plan complexe dénoté : $\boldsymbol{z - plan}$. Si $w = f(z)$ est une transformation complexe (image), alors on appellera l'ensemble des images des points de S par la fonction complexe f **: l'image de S sous $\boldsymbol{f}$** et il sera noté S'.

Cette définition se généralise sur tout type d'ensemble de points complexe, qu'il soit un domaine, fermé, ouvert ou une courbe quelconque.



Exemple 4: trouver l'image du demi-plan $\boldsymbol{Re(z) \geq 2}$ ***sous la transformation complexe*** $\boldsymbol{w = f(z) = iz}$ ***et représenter le résultat.***



II.2. Les courbes paramétriques dans le plan complexe :

Déf. 2.3 :

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle t, alors l'ensemble C formé de tous les points $z(t) = x(t) + iy(t)$; $a \leq t \leq b$, est appelé **une courbe paramétrique complexe.** La fonction complexe du réel t : $z(t) = x(t) + iy(t)$ est appelée **la paramétristation** de C.

Quelques courbes paramétriques élémentaires :

- **Ligne :** qui contient les deux points z_0 et z_1 :

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1 t \; ; -\infty < t < +\infty$$

- **Segment droit :** entre deux points z_0 et z_1 :

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1 t \; ; 0 \leq t \leq 1$$

- **Rayon :** qui parte d'un point z_0 et qui contient z_1 :

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1 t \; ; 0 \leq t < +\infty$$

- Cercle : centré en z_0 avec un rayon r :

$$z(t) = z_0 + r.(\cos t + i \sin t) \text{ ou } z(t) = z_0 + r.e^{it} \text{ avec } 0 \leq t \leq 2\pi$$

II.3. Image d'une courbe paramétrique sous une transformation complexe :

Si $w = f(z)$ est une transformation complexe et si C est une courbe paramétrique donnée par la paramétristation $z(t), a \leq t \leq b$ alors :

$$w(t) = f\big(z(t)\big), a \leq t \leq b$$

Est la paramétristation de C' est l'iimage de C sous $w = f(z)$

Exemple 5: sous $w = z^2$, trouver l'image du demi-cercle défini par :

$$\boldsymbol{z(t) = 2.e^{it}} \textbf{ avec } \boldsymbol{0 \leq t \leq \pi}$$

III. Transformation linéaire

On rappelle qu'une fonction réelle de la forme $f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$, est appelée une fonction linéaire. Dans le même raisonnement on définit en analyse complexe ; une fonction complexe linéaire qui est de la forme : $f(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}$.

On traitera dans ce qui suit, trois transformations géométriques de base : Translation, Rotation et Homothétie (agrandissement ou réduction), notés respectivement : T, R et H.

Translation : une fonction linéaire complexe du type :

$$T(z) = z + b, b \neq 0$$

Est appelée une Translation. Elle déplace l'image du point z vers le nouveau point $w = T(z)$. Si on pose : $z = x + iy$ et $b = x_0 + iy_0$, alors on trouve : $w = z + b = (x + x_0) + i(y + y_0)$.

Rotation : une fonction linéaire complexe du type :

$$R(z) = az, |a| = 1$$

Est appelée une Rotation. Si on pose en notation complexe : $z = r.e^{i\theta}$ et $a = 1.e^{i\varphi}$ alors on trouve : $w = R(z) = r.e^{i\theta} \times 1.e^{i\varphi} = r.e^{i(\theta+\varphi)}$.

Homothétie : une fonction linéaire complexe du type :

$$R(z) = az, a \in \mathbb{R}^+$$

Est appelée Homothétie. On trouve : $w = H(z) = r.e^{i\theta} \times a = ar.e^{i\theta}$

On retiendra deux cas possibles :

- Si $a > 1$: alors $ar > r$ on parle dans ce cas d'Agrandissement
- Si $a < 1$: alors $ar < r$ on parle dans ce cas de Réduction

On en déduit d'une manière générale, que toute fonction linéaire complexe de la forme : $f(z) = az + b; \{a \neq 0, b \neq 0\} \in \mathbb{C}$ est une composition de plusieurs transformations linéaires élémentaires et pour tout point z_0 du plan complexe, l'image de ce dernier :

$w_0 = f(z_0) = az_0 + b$ est obtenu par :

(i) Une rotation de z_0 par un angle $\varphi = Arg(a)$ par rapport à l'origine ;

(ii) Une homothétie en multipliant le résultat par $|a|$;

(iii) Une translation le tout par un pas b.

Remarque : Une transformation complexe linéaire $w = az + b$ peut modifier la taille d'une figure dans un plan complexe, mais elle ne touche pas à sa forme.

Exemple 6: Trouver l'image du rectangle défini par les sommets : $\{-1+i, 1+i, 1+2i, -1+i2\}$ ***sous la transformation :***

$\boldsymbol{f(z) = 4iz + 2 + i3}$.

IV. Transformation non linéaire :

On définit une **fonction polynomiale complexe** de la forme :

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0; n \in \mathbb{N}\ et\ \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\} \in \mathbb{C}$$

En général, une transformation complexe du type polynomiale est assez compliquée à représenter mais il existe certains cas particuliers l'action de la transformation peut être facilement appréhendée. Pour l'instant, le seul cas des transformations polynomiales correspondants à $n = 1$ on été déjà traitées dans la section précédente.

Dans cette section on va étudier le cas des fonctions polynomiales complexes spéciales z^n pour $n \geq 2$; qui à l'inverse des transformations linéaires ($n = 1$) les transformations non linéaires ($n \geq 2$) ne préservent pas la forme de base d'un ensemble de points du plan complexe.

D'un autre côté, on associe aux transformations polynomiales complexes du type $z^n; n \geq 2$ les fonctions racines principales d'ordre n : $z^{1/n}; n \geq 2$. A noter que ces dernières fonctions, sont les fonctions inverses de z^n et elles sont définies sur des domaines restreints.

On retiendra que les transformations complexes associées à z^n et $z^{1/n}$ sont étroitement liées.

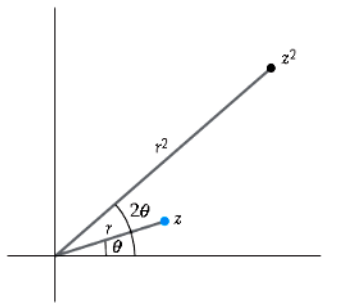
IV.1. Fonctions puissances spéciales

IV.1.1. La fonction z^2

Pour tout $z = x + iy \rightarrow w = f(z) = z^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$, qu'on peut écrire sous forme exponentielle :

$$z = r.e^{i\theta} \rightarrow w = f(z) = z^2 = \left(r.e^{i\theta}\right)^2 = r^2.e^{i2\theta}$$

C'est cette notation qui permet de mieux visualiser l'effet de cette transformation.



Exemple 7: Trouver l'image (C') de l'arc (C) défini par:

$$|z| = 2, 0 \leq arg(z) \leq \pi/2$$

Sous la transformation : $w = f(z) = z^2$.

IV.1.2. La fonction $z^n, n > 2$

De la même manière et avec le même raisonnement pour $n > 2$ la fonction polynomiale dans sa forme exponentielle :

$$z = r.e^{i\theta} \to w = f(z) = z^n = \left(r.e^{i\theta}\right)^n = r^n.e^{in\theta}$$

Ou le module de z est agrandit (contracté) de r^n et son argument est augmenté pour devenir $n\theta$.

Exemple 8: Trouver l'image (C') du disque (C) défini par:

$$|z| \leq 2, 0 \leq arg(z) \leq \pi/2$$

Sous la transformation : $w = f(z) = z^3$.

IV.2. La fonction racine n-ième $z^{1/n}$

IV.2.1. La fonction racine carrée principale $z^{1/2}$

Dans la section (§3.5) du chapitre 1, on a vu que les n racines non répétés d'un nombre complexe non nul $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sont données en module et argument comme suit :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \; ; k = 0,1, \ldots n-1$$

Pour le cas particulier de $n = 2$ nous avons :

$$\boldsymbol{w_k = \sqrt[2]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[2]{r}.e^{i(\theta+2k\pi)/2} \; ; k = 0,1}$$

On définit ainsi la fonction racine carrée principale ($k = 0 : \theta = Arg(z)$) :

Def. 2.4 :

La fonction $z^{1/2}$ définie par :

$$z^{1/2} = \sqrt{|z|}.e^{iArg(z)/2}$$

Est appelée la **fonction racine carrée principale.**

Si on pose $\theta = Arg(z)$ alors l'écriture précédente de $z^{1/2}$ deviendra :

$$z^{1/2} = \sqrt{r}.e^{i\theta/2}$$

Remarque : Il faut noter que :

$w_k = \sqrt[2]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[2]{r}.e^{i(\theta+2k\pi)/2}$;$k = 0,1,..n-1$

ne définit pas une fonction au sens propre mais juste une application à valeurs multiples, vu la périodicité des fonctions $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (ainsi que $e^{i\theta}$). Pour s'assurer ainsi qu'on a une fonction définie comme une application bijective, on choisit ainsi une seule racine pour $k = 0$ qu'on appelle racine principale

Exemple 9: Trouver les valeurs de la fonction racine carrée principale $z^{1/2}$ pour les points suivants :

$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{z = 4}$; $(\boldsymbol{b})\boldsymbol{z = -2i}$; $(\boldsymbol{c})\boldsymbol{z = -1 + i}$

IV.2.2. La fonction racine principale d'ordre n: $z^{1/n}$

Def. 2.5 :

D'une manière générale pour ≥ 2 , la fonction $z^{1/n}$ définie par :

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}.e^{iArg(z)/n}$$

Est appelée la **fonction racine principale d'ordre** n

Exemple 10: Trouver les valeurs de la fonction racine principale d'ordre n $z^{1/n}$ pour les points suivants :

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{z^{1/3}; z = i}$; $(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{z^{1/5}; z = 1 - i\sqrt{3}}$

IV. 3. Les fonctions inverses

Par définition une fonction est dite bijective si chaque élément de l'ensemble de départ z possède sous l'action de $f(z)$ une seule et unique image dans l'ensemble d'arrivée seule $w = f(z)$. Dans ce cas la fonction $f(z)$ peut avoir une fonction inverse définie comme suit :

Déf. 2.6 :

Si f est une fonction complexe bijective dans un domaine de définition A dont l'image est le domaine de valeurs B, alors **la fonction inverse de $\boldsymbol{f}$**, notée f^{-1}, est la fonction dont le domaine de définition est B dont l'image est le domaine de valeurs A telque : $f^{-1}(w) = z$ si $w = f(z)$.

On peut également stipuler que si f transforme un ensemble de point S en l'ensemble S', alors f^{-1} transforme S' en S.

Il en découle également de la définition 2.6 que :

$f^{-1}\big(f(z)\big) = f(f^{-1}(z) =)z$

Et la composition : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ telque la fonction identité : $I(z) = z$.

Exemple 11: Montrer que la fonction $\boldsymbol{f(z) = z + i3}$ est une fonction bijective sur tout le plan complexe et trouver sa fonction inverse.

Indication. f bijective $\leftrightarrow \boldsymbol{f(z_1) = f(z_2) \rightarrow z_1 = z_2}$

IV.3.1. La fonction inverse de z^n

En analyse complexe, pour une fonction du type $z^n; n \geq 2$ définir la fonction inverse n'est pas aussi direct. Ceci nécessite peu d'attention, notamment pour le domaine de définition qui permet de définir une telle fonction inverse.

Examinons, le cas de deux points dans le plan complexe, donnés par :

$z_1 = r.e^{i\theta}$ et $z_2 = r.e^{i(\theta + 2\pi/n)}$, avec $r \neq 0$ et $n \geq 2$.

Il est clair que même si $|z_1| = |z_2| = r$, on a toujours : $z_1 \neq z_2$, car il s'agit de deux points distincts sur le plan complexe.

Appliquant maintenant une fonction puissance $f(z) = z^n$ sur les deux points : $w_1 = f(z_1) = \left(r.e^{i\theta}\right)^n = r^n.e^{in\theta}$ et de même on a :

$$w_2 = f(z_2) = \left(r.e^{i(\theta + 2\pi/n)}\right)^n = r^n.e^{in(\theta + 2\pi/n)} = r^n.e^{i(n\theta + 2\pi)}$$

$$= r^n.e^{in\theta}.e^{i2\pi} = r^n.e^{in\theta} = w_1$$

Ce résultat implique que $f(z)$ n'est pas bijective du moment que $f(z_1) = f(z_2)$ alors que $z_1 \neq z_2$. En effet, les n points distincts :

$z_1 = r.e^{i\theta}; z_2 = r.e^{i(\theta + 2\pi/n)};\ z_3 = r.e^{i(\theta + 4\pi/n)}; \ldots .z_n = r.e^{i\left(\theta + 2(n-1)\pi/n\right)}$

Sont tous projetés sous l'application $f(z) = z^n$ dans le même point : $w = r^n.e^{in\theta}$

Exemple 12: Représenter les points et leurs images respectives sous l'application $f(z) = z^6$ ***:***

$\boldsymbol{z_1 = 1.e^{i\pi/12}; z_2 = 1.e^{i5\pi/12};\ z_3 = 1.e^{i9\pi/12}; z_4 = 1.e^{i13\pi/12};\ z_5 = 1.e^{i17\pi/12};}$

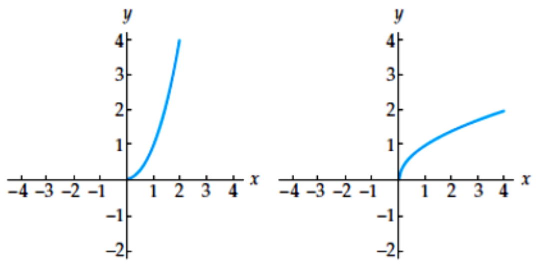
$\boldsymbol{z_6 = 1.e^{i21\pi/12}}$***. Commenter le résultat.***

La discussion précédente, nous conduit à un résultat important : la fonction $f(z) = z^n$ n'est pas une fonction bijective et donc elle ne peut accepter une fonction inverse.

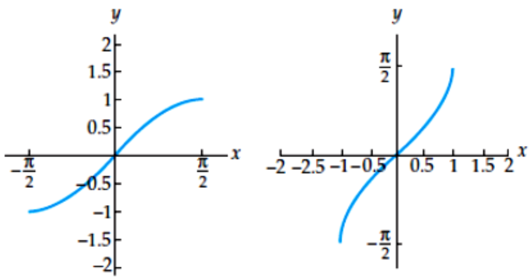
Cette situation peut être également rencontrée en analyse réelle : $f(x) = x^2; f(x) = \sin x$ toutes les deux définies sur $D =]-\infty, +\infty[$; pour remédier à ça on procède à restreindre le domaine de définition de $f(x)$ pour s'assurer qu'elle soit bijective et par la suite on peut définir sa fonction inverse :

$$f(x) = x^2 \to Dom(f) = [0, +\infty[\to f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f(x) = \sin x \to Dom(f) = [-\pi/2, +\pi/2[\to f^{-1}(x) = \arcsin x$$



(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



(a) $g(x) = \sin x$ **(b)** $g^{-1}(x) = \arcsin x$

Le même raisonnement peut être appliqué pour les fonctions complexes, notamment du genre $f(z) = z^n; n \geq 2; D = \{\mathbb{C}\}$, afin de définir une fonction inverse. Il faut donc restreindre le domaine de définition pour que cette fonction devienne bijective. Ainsi toute fonction complexe aura un domaine de définition restreint qu'on notera $Dom(f)$ à qui va correspondre un domaine de valeurs de la même fonction (image de $Dom(f)$) qu'on notera $Ran(f)$, tel que :

$$Dom(f) \xrightarrow{f(z)} Range(f) \xrightarrow{f^{-1}(z)} Dom(f)$$

Afin de définir $Dom(f)$ pour les fonctions puissances, examinons le cas de $f(z) = z^2$, ou la variable complexe s'écrit dans la notation complexe :

$$z = r.e^{i\theta}; r \in \mathbb{R}^+;\ \theta = \mathrm{Arg}(z)$$

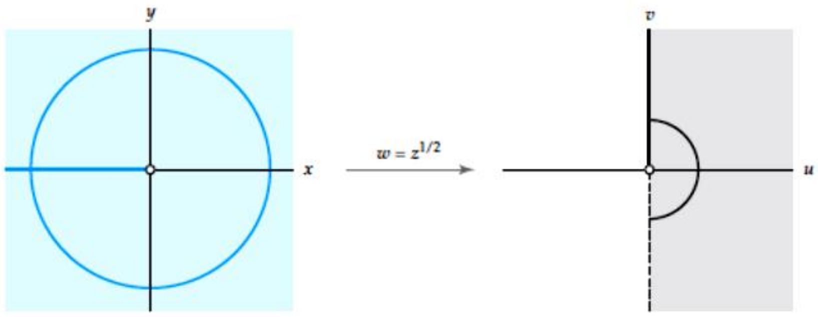
Alors pour tout $w = f(z) = \left(r.e^{i\theta}\right)^2 = r^2.e^{i2\theta} = \rho.e^{i\varphi}$ et par identification on retrouve : $\rho = r^2 \in \mathbb{R}^+, \varphi = Arg(w)$ et pour que cette image soit unique, le domaine de définition de φ doit vérifier :

$-\pi < -\varphi = 2\theta \leq \pi \to {}^{-\pi}/_2 < \theta \leq {}^{\pi}/_2$; ainsi la fonction inverse qui va ramener la variable w à son image $z = f^{-1}(w) = w^{1/2} = \sqrt{w}$.

La fonction inverse f^{-1} est donc la racine carrée principale tel que : $(z^2)^{1/2} = z$. Où chaque point z n'a qu'une et une seule image seulement via la fonction puissance carrée $f(z) = z^2$ et de même sous la fonction racine carrée principale : $f^{-1}(z) = z^{1/2}$:

$$Dom(f) = Ran(f^{-1}) =]^{-\pi}/_2, {}^{\pi}/_2] \to Range(f) = Dom(f^{-1}) =]-\pi, \pi]$$

Avec : $r, \rho \in \mathbb{R}^+$.



(a) Domain of $z^{1/2}$ (b) Range of $z^{1/2}$

On généralise le résultat précédent pour les fonctions $z^n; n > 2$:

$$f(z) = z^n = w = \left(r.e^{i\theta}\right)^n = r^n.e^{in\theta} = \rho.e^{i\varphi}$$

Et on retrouve le domaine de définition restreint de $f(z)$ afin qu'elle soit bijective :

$$\boldsymbol{r \in \mathbb{R}^+ \,;\, -\frac{\pi}{n} < \arg(z) = \theta \leq \frac{\pi}{n}}$$

tel que : $\rho = r^n \in \mathbb{R}^+; -\pi < \mathrm{Arg}(w) = \varphi \leq \pi$

Exemple 13: Trouver l'image de l'ensemble S défini par :

$\boldsymbol{|z| = 3; \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \pi}$

sous la racine cubique principale $f(z) = z^{1/3}$.

IV.3.2. La fonction multivaluée :

Précédemment, avant de défini les domaines de définition restreints qui donnent lieu à des fonction proprement dit, autant qu'application bijective, les applications du types z^n ou $z^{1/n}$ sont soit surjective ou injective dans un sens et son inverse, respectivement à cause des plusieurs valeurs que peut prendre la variable pour une seule image ou l'inverse, une variable ayant plusieurs images. Cette propriété, plus simple à voir dans l'écriture exponentielle d'un nombre complexe, impose souvent dans les calculs à faire usage de ces applications. On appellera ce genre d'application à plusieurs valeurs dans le plan complexe :

Fonction multivaluée, fonction multiforme, multivoque ou simplement multifonction

Même si l'utilisation du mot « fonction » n'est pas juste en analyse mathématique, mais par abus de langage ce genre de notation est d'usage en plan complexe.

Pour différencier entre une fonction « au sens propre » et une fonction multivaluée, on réservera la notation en lettre majuscule pour ces dernières alors que les lettres minuscules désigneront une fonction (application bijective) :

fonction : $f(z), g(z); h(z)$ ....

Fonction multivaluée ou Multifonction : $F(z), G(z), H(z), \ldots$

A titre d'exemple, la fonction $g(z) = z^{1/3}$ fait référence à la racine cubique principale, alors que $G(z) = z^{1/3}$ représente la multifonction qui assigne les trois racines cubiques à la valeur de z donnée.

V. Fonction réciproque :

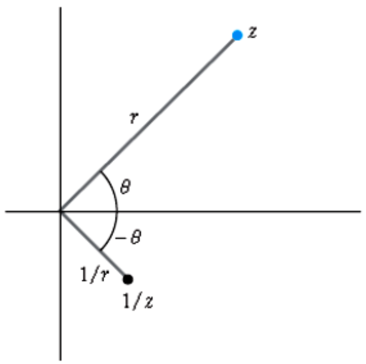
D'une manière analogue aux fonctions réelles, on définit dans le plan complexe ; **les fonctions complexes rationnelles** qui sont de la forme : $f(z) = {p(z)}/{q(z)}$, ou les deux expressions $p(z)$ et $q(z)$ sont toutes les deux des fonctions polynomiales complexes. Dans ce qui suit, on va étudier la fonction complexe rationnelle la plus basique, à savoir la fonction réciproque $1/z$, comme une transformation dans le plan complexe.

V.1. Fonction réciproque :

La fonction $1/z$, dont le domaine de définition est l'ensemble de tous les complexes non nuls, est appelée **fonction réciproque.** Pour commencer, on va réécrire cette fonction réciproque dans la notation exponentielle. Pour tout $z \neq 0$, si on met : $z = r.e^{i\theta}$, alors on obtient :

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r.e^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Ainsi, on constate que sous la transformation $1/z$, tout nombre complexe non nul, donne une image (nombre complexe) dont le module est l'inverse du module de z et l'argument de cette image est le négatif de l'argument de z.

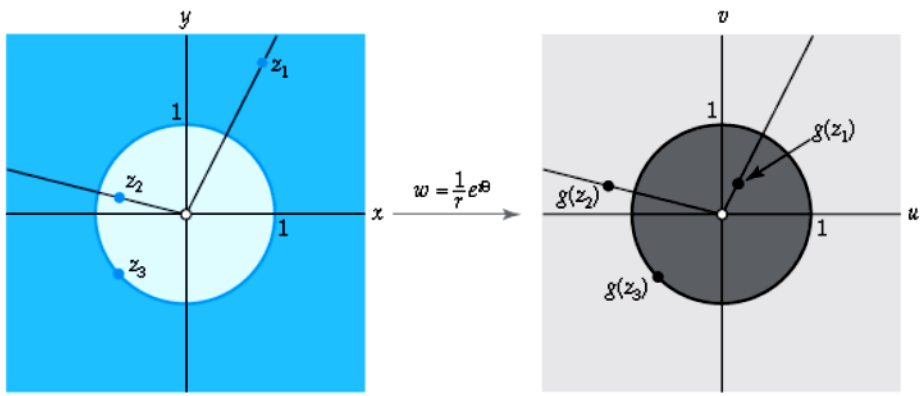


V.2. Inversion dans le cercle unitaire :

La fonction : $g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$ définie sur le domaine des complexes non nuls, est appelée **inversion dans le cercle unitaire**. En effet, on remarque que pour tout $z = 1.e^{i\theta}$, l'image de cet élément par la fonction $g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{1}{1}e^{i\theta} = 1.e^{i\theta} = z$; ce qui signifie que chaque élément du cercle unitaire est représenté via cette application par lui-même.

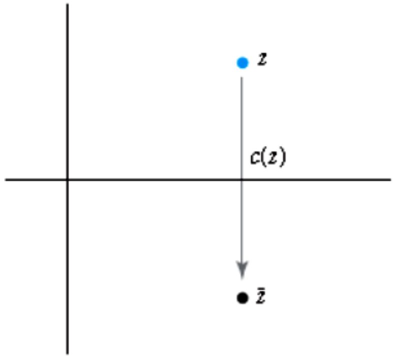
On remarquera également que pour tous les autres nombres complexes :

- $|z| = r > 1 \rightarrow g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$; $\frac{1}{r} < 1$: élément en dehors du cercle et image à l'intérieur du cercle
- $|z| = r < 1 \rightarrow g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$; $\frac{1}{r} > 1$: élément à l'intérieur du cercle et image à l'extérieur du cercle



V.2. Conjugaison complexe :

La seconde transformation complexe qui est également utile pour décrire les transformations réciproques, c'est la réflexion à travers l'axe réel. Or, sous cette transformation, un point (x, y) devient $(x, -y)$.



Il est assez simple de vérifier ceci en utilisant la fonction : $c(z) = \bar{z}$, appelée **Fonction de la conjugaison complexe.**

Appliquant cette fonction sur un nombre complexe dans sa forme exponentielle : $z = r.e^{i\theta} \rightarrow c(z) = \bar{z} = \overline{(r.e^{\iota\theta})} = \bar{r}.\overline{e^{\iota\theta}} = r.e^{\overline{i\theta}} = r.e^{-i\theta}$

V.3. La transformation réciproque :

Ainsi après avoir définit les deux transformations précédentes, à savoir : l'inversion dans le cercle unitaire et la conjugaison complexe, il s'ensuit que la fonction réciproque : $f(z) = {}^1\!/_z$ peut être écrite comme une composition des deux premières fonctions : $c(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$:

$$c(g(z)) = c\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = f(z)$$

Ainsi une transformation réciproque d'un complexe z_0 consiste à :

(i) Projeter z_0 par rapport le cercle unitaire

(ii) Réfléchir le résultat par rapport l'axe réel

Exemple 14: Trouver l'image du demi-cercle suivant sous $w = {}^1\!/_z$:

$|z| = 2;\ 0 \leq arg(z) \leq \pi$

V.4. La fonction réciproque dans le plan complexe étendu :

On parle d'un plan complexe étendu quand on veut correspondre à la notion de l'infiniment grand l'existence d'un point idéal ∞. Dans ce cas on appelle ce plan qui contient ces points : **plan complexe étendu.**

Déf.2.7 :

La fonction réciproque dans le plan complexe étendu est définie par :

$$f(z) = \begin{cases} {}^1\!/_z, si\ z \neq 0\ ou\ \infty \\ \infty,\ \ si\ z = 0 \\ 0, si\ z = \infty \end{cases}$$

Exemple 15: Trouver l'image de la ligne $x = 1$, sous la transformation réciproque $w = {}^1\!/_z$

V.5. **Application :**

On peut démontrer que la fonction réciproque dans le plan complexe étendu transforme :

(i) Les lignes verticales $x = k, k \neq 0$, en cercles : $\left|w - \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$

(ii) Les lignes horizontales $y = k, k \neq 0$ en cercles : $\left|w - i\frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|$

VI. Limite et continuité :

Le concept le plus important en analyse élémentaire, est bien celui de la limite. D'une manière intuitive, on entend par $lim_{x \to x_0} f(x) = L$ le fait que les valeurs de la fonction $f(x)$ peuvent être prises arbitrairement proches du nombre réel L, si les valeurs de x sont choisies suffisamment proche (mais non égales) de x_0. Dans l'analyse réelle les concepts de continuité, dérivation et l'intégrale sont très liés à cette notion de limite.

Pareillement, la limite dans l'analyse complexe est similaire à la limite dans l'analyse réelle dans le sens que $lim_{z \to z_0} f(z) = L$ signifie également que les valeurs que peut prendre $f(z)$ sont proches du nombre complexe L, tant que les valeurs de z sont choisies de telle sorte qu'elles soient le plus proche possible de z_0.

Cependant, une différence majeure existe entre les deux notions de limites réelle et complexe :

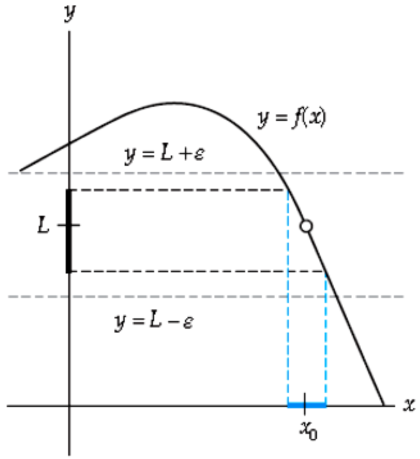
- Dans la limite réelle, on approche x_0 par deux directions : à gauche et à droite ;
- Alors que dans la limite complexe, on peut approcher z_0 avec une infinité de directions, mais tout en donnant la même valeur de la limite L de la fonction $f(z)$.

VI.1. Les limites :

VI.1.1. Les limites réelles :

Pour une fonction $f(x)$, on dit que la limite de f lorsque x tend vers x_0, existe et elle est égale à L ; si pour chaque $\varepsilon > 0$ il y un $\delta > 0$ tel que : $|f(x) - L| < \varepsilon$

Tant que $0 < |x - x_0| < \delta$



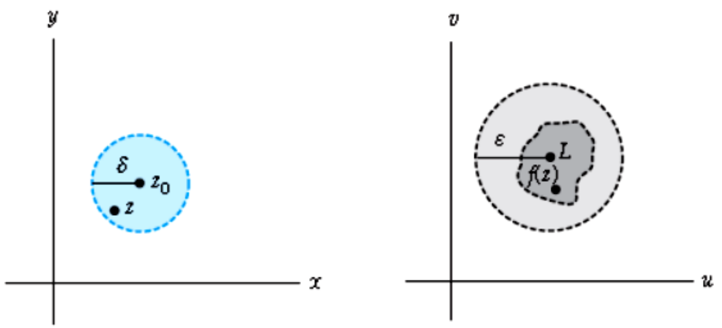
VI.1.2. Les limites complexes :

Déf. 2.8 :

On suppose que la fonction complexe f est définie dans un voisinage avec exclusion de z_0 et on suppose également que L est un nombre complexe. **La limite de f lorsque z tend vers z_0 est égale à L**, notée :

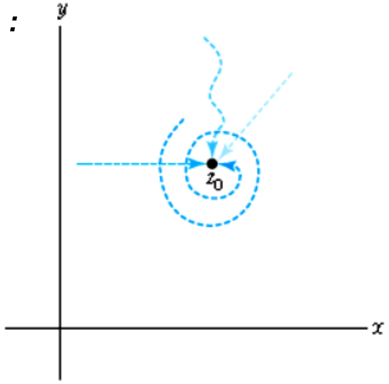
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:$|f(z) - L| < \varepsilon$ pour tout z : $0 < |z - z_0| < \delta$.



Critère de non existence de la limite :

Si f approche les deux nombres complexes $L_1 \neq L_2$ par deux courbes ou chemins différents passants par z_0, alors $\lim_{z\to z_0} f(z)$ est non-exsitante (ou n'existe pas)



Exemple 16: Montrer que la $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$ n'existe pas

Dans le cas ou une fonction complexe $f(z)$ s'écrit sous la forme des deux parties réelle et imaginaire : $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, alors en exploitant les propriétés des limites réelles, on déduira une loi qui permet de calculer la limite de $f(z)$ lorsqu'on sait calculer celle de $u(x,y)$ et $v(x,y)$, en instant que dans ce cas, les fonctions réelles u et v sont des fonctions à plusieurs variables.

Théorème 2.1. Partie réelle et imaginaire d'une limite

Supposant que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$ et $L = u_0 + iv_0$. Alors on énoncer que : $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

Exemple 17: utiliser le théorème 2.1 pour calculer :

$$\lim_{z\to 1+i}(z^2+i)$$

Théorème 2.2. Propriétés des limites complexes

Supposant que f et g sont deux fonctions complexes. Si :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L$$

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = M$$

Alors :

$(i)\ \lim\limits_{z\to z_0} cf(z) = cL, c$: est une constante complexe,

$(ii)\ \lim\limits_{z\to z_0}(f(z) \pm g(z)) = L \pm M,$

$(iii)\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z).g(z) = L.M,$

$(iv)\ \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}, M \neq 0$

On notera deux résultats de bases du théorème 2.2 :

$$\lim_{z\to z_0} c = c, c\text{: est une constante complexe}$$

$$\lim_{z\to z_0} z = z_0$$

Exemple 18: utiliser le théorème 2.2, ainsi que ses deux résultats basiques pour calculer les limites:

$$(a)\ \lim_{z\to i}\frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$$

$$(b)\ \lim_{z\to 1+i\sqrt{3}}\frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - i\sqrt{3}}$$

VI. 2. Continuité des fonctions complexes :

La définition de la continuité d'une fonction complexe est similaire à celle d'une fonction réelle.

Déf. 2.9. Continuité d'une fonction complexe :

Une fonction complexe f est **continue dans un point z_0** si :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

De même que pour une fonction réelle, si une fonction f est continue dans un point, alors les trois conditions suivantes sont requises :

Critères pour la continuité :

*Une fonction complexe f est est **continue dans un point z_0** si chacune des trois conditions est satisfaite :*

(i) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe,*

(ii) f *est définie en* z_0,

(iii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Si une fonction complexe n'est pas continue dans un point donné, on dit alors que cette fonction est discontinue en ce point. Comme c'est le cas pour la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$: discontinue dans les deux points i et $-i$.

Exemple 19:

- ***Vérifier si $f(z) = z^2 - iz + 2$ est continue en $z_0 = 1 - i$.***
- ***Montrer que $f(z) = z^{1/2}$ est discontinue en $z_0 = -1$***

VI.2.1. Propriétés des fonctions continues :

De même que pour la limite, on étudie la continuité d'une fonction complexe qui s'écrit en fonction de ses deux parties réelle et imaginaire : $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$

Théorème 2.3. Partie réelle et imaginaire d'une fonction continue :

On suppose que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $z_0 = x_0 + iy_0$. Alors ont dit que la fonction complexe f est continue en z_0 si et seulement si les deux fonctions réelles u et v sont continues dans le point (x_0, y_0).

Exemple 20: en utilisant le théorème 2.3, montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$

Théorème 2.4. Propriétés des fonctions continues :

si f et g sont deux fonctions complexes continues en z_0, alors les fonctions suivantes le sont également dans ce même point :

$(i) cf(z)$, c : est une constante complexe,

$(ii) f(z) \pm g(z)$,

$(iii) f(z).g(z)$,

$(iv) \dfrac{f(z)}{g(z)}, g(z_0) \neq 0$

Théorème 2.5. Continuité des fonctions polynomiales :

Les fonctions polynomiales sont continues sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$

A l'inverse des fonctions polynomiales complexes, les fonctions rationnelles complexes : $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ne sont pas toujours continues sur la totalité du plan complexe $\mathbb{C}$, mais elles le sont uniquement sur leur domaine de définition, tel que $q(z) \neq 0$.

VI.2.2. Fonctions bornées :

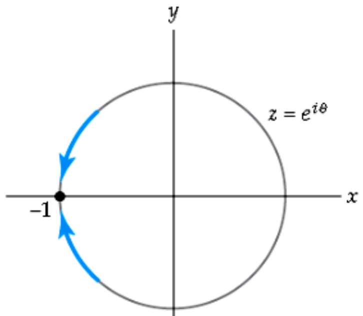
Propriété de limitation :

Si une fonction complexe f est continue sur une région fermée et bornée R, alors f est bornée sur R. Ainsi, il existe une constante réelle $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \{R\}$.

VI.2.3. Branches de fonction multivaluée :

On entend par branche d'une fonction multivaluée $F(z)$ définie sur un domaine D, toute fonction complexe $f_i(z)$ définie et continue sur un certain domaine D_i et qui affecte exactement une seule valeur de $F(z)$ pour tout point $z \in D_i$.

Exemple 21: En utilisant la Fonction racine carrée principale, définie par : $f(z) = z^{1/2} = \sqrt{|z|}.e^{iArg(z)/2}$, montrer qu'elle n'est pas continue dans le point $z_0 = -1$



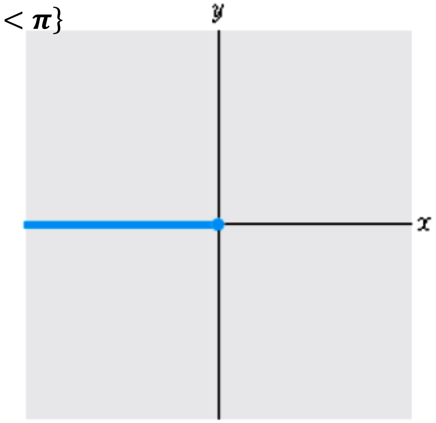
En déduire que $f(z) = z^{1/2}$ n'est pas une branche de la fonction multivaluée $F(z) = z^{1/2}, D = \mathbb{C}$

Montrer que $f_1(z) = z^{1/2}; D \equiv \{-\pi < \theta < \pi\}$ est une branche de $F(z)$

VI.2.4. Coupures et points de branchement :

En reprenant l'exemple précédent, on dit que fonction :

$f_1(z) = z^{1/2}; D_1 \equiv \{|\boldsymbol{z}| > \boldsymbol{0}; -\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{Arg(z)} < \boldsymbol{\pi}\}$



est une branche principale de la fonction multivaluée $F(z) = z^{1/2}$. Généralement on parle d'une **coupure** lorsqu'on exclue une portion de courbe appartenant au domaine de définition de $F(z)$, tel que la branche $f_i(z)$ soit définie et continue.

Une autre branche pour la même fonction multivaluée peut être définie, tel que : $f_2(z) = z^{1/2}; D_1 \equiv \{|\boldsymbol{z}| > \boldsymbol{0}; \boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{Arg(z)} < \boldsymbol{3\pi}\}$, où la coupure est la même, afin que la branche $f_2(z)$ soit une fonction définie et continue.

Exemple 22: calculer pour $z = i$; $f_1(z)$ et $f_2(z)$ qui sont des branches de la fonction multivaluée $F(z) = z^{1/2}$ citées plus haut.

Dans la définition des branches $f_i(z)$ d'une fonction multivaluée, un point qui commun entre les différentes coupures qui servent à définir le domaine D_i d'une branche, est appelé : **Point de Branchement.**

VII. La dérivée d'une fonction complexe :

Déf. 3.1. :

Supposons que la fonction complexe f est définie dans un voisinage de z_0. La dérivée de f à z_0, noté f' existe et elle donnée comme :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Dans ce cas la fonction f est dite **dérivable** en z_0

Exemple 20:

Appliquer la définition 3.1 pour trouver la dérivée de la fonction: $\boldsymbol{f(z) = z^2 - 5z}$

Les règles de dérivation :

$f(z)$ et $g(z)$: deux fonctions définies et dérivables en z

1. *Règle de la constante:* $\frac{d}{dz}c = 0$ et $\frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$
2. *Règle de la somme:* $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$
3. *Règle du produit:* $\frac{d}{dz}[f(z).g(z)] = f'(z)g(z) + f(z).g'(z)$
4. *Règle de la division:* $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z).g(z) - f(z).g'(z)}{[g(z)]^2}$
5. *Règle de la composition:* $\frac{d}{dz}[f(g(z))] = f'(g(z)).g'(z)$

Exemple 21:

Utiliser les règles de dérivation pour calculer les dérivées de: $\boldsymbol{(a)\ f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z;\ (b)\ f(z) = \frac{z^2}{4z+1}}$

VII. 2. La fonction analytique :

Déf. 3.2: Analyticité dans un point

Une fonction complexe $w = f(z)$ est dite **analytique en un point $\boldsymbol{z_0}$** si elle est dérivable en ce point et dans chaque point dans son voisinage.

Une fonction complexe $f(z)$ est dite **analytique dans un domaine D** si elle est analytique en chaque point de ce domaine. Dans ce cas, on parle de fonction **Holomorphe** ou **régulière.**

Une fonction **analytique dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$** est appelée une **fonction entière**

Théorème 3.1. : fonctions polynomiales et rationnelle (fractionnaire)

1. Une fonction polynomiale complexe:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0;$$

$$n \in \mathbb{N}\ et\ \{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1,\ a_0\} \in \mathbb{C}$$

Est une fonction entière

2. Une fonction rationnelle: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, est analytique dans tout domaine D qui ne contient aucun point z_0 pour lequel $q(z_0) = 0$

$p(z)\ et\ q(z)$: deux fonctions polynomiales

z_0: est appelé **un point singulier** de $f(z)$

Théorème 3.2. : la dérivabilité implique la continuité

Si f est dérivable dans un point z_0 dans un domaine D, alors f est forcément continue dans ce point z_0.

Théorème 3.3. : la règle de l'Hôpital

Supposons que f et g sont deux fonctions analytiques en z_0 avec $f(z_0) = 0$ et $g(z_0) = 0$ mais $g'(z_0) \neq 0$. alors:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Exemple 22:

Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer la limite suivante:

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{\boldsymbol{z^2 - 4z + 5}}{\boldsymbol{z^3 - z - 10i}}$$

VII.2. Les équations de Cauchy-Riemann :

Théorème 3.4. : Les équations Cauchy-Riemann

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est dérivable dans un point $z = x + iy$. Alors en z, les dérivées partielles de 1er ordre de u et v existent et satisfont les équations de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Exemple 23:

Vérifier que la fonction $\boldsymbol{f(z) = z^2 + z}$ satisfait les équations C-R.

Critère de non-analyticité:

Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites en chaque point z dans un domaine D, alors la fonction:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ne peut être analytique sur D.

Exemple 24:

Montrer que la fonction $\boldsymbol{f(z) = 2x^2 + i(y^2 - x)}$ n'est analytique en aucun point.

Critère d'analyticité:

Supposons que les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues et possèdent les dérivées partielles de premier ordre dans un domaine D.

Si u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann en tout point de D, alors la fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique sur D.

Exemple 25:

pour $\boldsymbol{f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}}$ ***, donner $\boldsymbol{D = Dom(f)}$ et montrer qu'elle est analytique sur $\boldsymbol{D}$.***

Théorème 3.5:

Si les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues et possèdent les dérivées partielles de premier ordre au voisinage d'un point z, et si elles satisfont les équations Cauchy-Riemann en z, alors la fonction complexe $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ est dérivable en z et sa dérivée donnée par:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Théorème 3.6: Fonctions constantes

Supposons la fonction: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ est analytique sur un domaine D.

Si $f'(z)=0$ sur D, alors $f(z)=c$ sur D

VIII. Les fonctions harmoniques:

Définition 3.3:

La fonction à valeur réelle φ des deux variables $x$et y qui possède des dérivées partielles continues de 1er et 2nd ordre sur un domaine D et satisfait l'équation suivante appelée équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

Cette fonction est dite **Harmonique** sur D.

Théorème 3.7:

Supposons que la fonction complexe $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ est analytique sur un domaine D. Alors, les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont harmoniques sur D.

Exemple 25:

pour la fonciton entière $f(z)=z^2$, ***donner*** $u(x,y)$ et $v(x,y)$ ***et montrer qu'elles sont harmoniques sur*** $\mathbb{C}$.

VIII.1. La fonction harmonique conjuguée:

Supposons que la fonction réelle $u(x,y)$ est harmonique sur un domaine D. Alors, il est possible de trouver une autre fonction réelle harmonique $v(x,y)$, tel que $u(x,y)$et $v(x,y$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann, alors on peut construire une fonction complexe :

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ qui sera analytique sur le domaine D.

La fonction $v(x,y)$ est appelée **l'harmonique conjuguée** de $u(x,y)$.

Exemple 26:

1. Vérifier que $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y})=x^3-3xy^2-5y$ *est harmonique*

2. Trouver la fonction harmonique conjuguée de $u(x,y)$