Chapitre 01 : Le plan complexe

1. Propriétés des nombres complexes :

On définit le nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$. Cette propriétés permit au mathématiciens de proposer des solutions imaginaires avec discriminant négatif pour des équations quadratique du type $a.x^2 + b.x + c = 0$.

Rappelons le discriminant d'une équation quadratique : $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$

Définition 1.1 : *un nombre complexe est tout nombre qui s'écrit sous la forme : $z = a + ib$. Où a et b sont des réels, i est le nombre imaginaire unitaire.*

$a = Re(z)$: est appelé partie réelle de z ;

$b = Im(z)$: est appelé partie imaginaire de z .

Remarque : tout multiple du nombre imaginaire unitaire i est un nombre imaginaire pur.

Définition 1.2 : égalité. *On dit que les nombres complexe $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ sont égaux, si :*

$a_1 = Re(z_1) = a_2 = Re(z_2)$ et $b_1 = Im(z_1) = b_2 = Im(z_2)$

1.1. Opérations arithmétiques :

Soient les nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ *et* $z_2 = a_2 + ib_2$. On définit les opérations mathématiques suivantes sur les nombres complexes:

a) Addition : $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

b) Soustraction : $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

c) Multiplication : $z_1.z_2 = (a_1 + ib_1).(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$

d) Division : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a_2^2+b_2^2} + i\,\frac{(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$; $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$

Ces opérations vérifient les règles suivantes :

Règle de commutation : $\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1.z_2 = z_2.z_1 \end{cases}$

Règle d'association : $\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3 \end{cases}$

Règle de distribution : $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

1.2. L'élément neutre, unitaire, conjugué et l'inverse :

- On définit le nombre complexe nul (zéro) par : $0 + i0$; tel que :

  $z + (0 + i0) = (a + ib) + (0 + i0) = a + ib = z$

  C'est l'élément neutre pour l'opération d'addition.

- On définit le nombre complexe unitaire par : $1 + i0$; tel que :

  $z.(1 + i0) = (a + ib)(1 + i0) = a + ib = z$

  C'est l'élément neutre pour l'opération de multiplication.

- On définit **le conjugué** d'un nombre complexe par :

  $\bar{z} = z^* = \overline{(a + ib)} = a - ib$

  Il faut noter que la conjugaison est distributive :

  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $\bar{\bar{z}} = z$

  On remarquera également que :

  $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2Re(z) \rightarrow Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

  $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2Im(z) \rightarrow Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

  $z.\bar{z} = (a + ib).(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

- On revient sur la division pour remarquer que :

  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{a_2^2+b_2^2}$ avec: $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$

- Dans le système des nombres complexes chaque nombre z possède un unique inverse par rapport l'addition z' tel que : $z + z' = 0 \rightarrow z' = -z$

- Egalement par rapport la multiplication, chaque $z \neq 0$ possède un inverse unique z'' tel que : $z.z'' = 1 \rightarrow z'' = \frac{1}{z} = z^{-1}$

  z^{-1} est appelé aussi le réciproque de z.

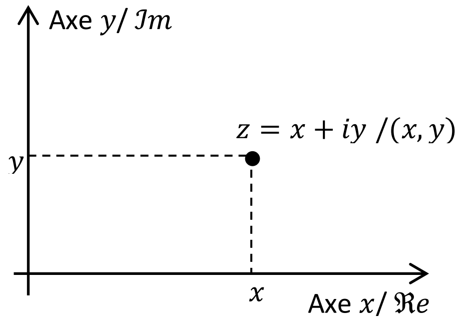
Application : i^n

1- **Calculer $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}$**

2- **Déduire une règle pour i^n en fonction de la parité de n**

2. Le plan complexe :

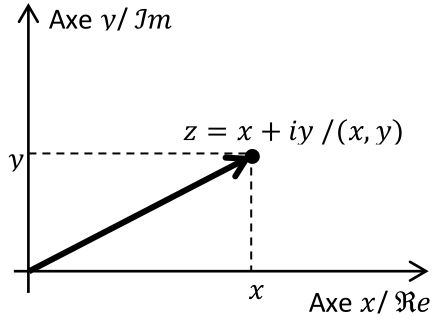
Comme on peut représenter chaque nombre complexe z par un couplet de réels a et b, on aura toujours besoin d'utiliser un plan pour représenter ce nombre.



On utilisera à cet effet, deux axes pour définir ce plan : un axe des réels $\Re e/x$ et un axe des imaginaires $\mathfrak{Im}/y$; ainsi on écrira toute variable complexe : $z = x + iy$ en fonction des deux variables réelles x et y.

2.1. Représentation vectorielle :

On peut également interpréter chaque paire de réels (x, y) comme étant les composantes d'un vecteur 2D. Alors, un nombre complexe $z = x + iy$ peut être également vu comme un vecteur 2D où le point initial de ce vecteur est l'origine des axes et le point terminal est donné par le point (x, y).



Cette représentation nous ramène à définir la longueur de ce vecteur par les lois de la géométrie:

Définition 1.3 : Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.2. Propriétés :

on reliera ce qui a été défini précédemment (section §1) avec la définition du module de z : $|z^2| = z.\bar{z}$ et $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$

avec : $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z^2| = |z|^2$

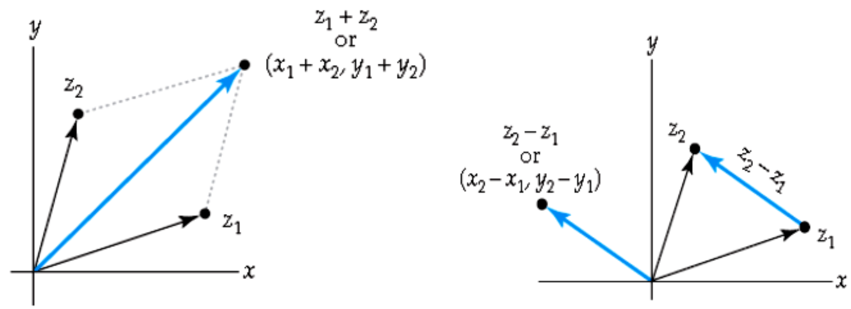
2.3. La distance dans le plan complexe :

L'addition des nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ *et* $z_2 = x_2 + iy_2$ donnée précédemment, devient dans la notation de couplet (vectorielle) :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \leftrightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ceci est tout simplement la définition des composantes du vecteur $z_1 + z_2$ dans la représentation vectorielle. Le même raisonnement nous donnera le vecteur :

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) \leftrightarrow (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

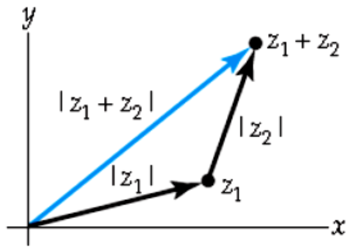


Dans ce dernier cas, la distance entre les deux points z_1 et z_2 est définie par :

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2.4. Les inégalités :

On retiendra que quel que soient les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ *et* $z_2 = x_2 + iy_2$ on a toujours : $|\, z_1 + z_2| \leq |\, z_1| + |\, z_2|$



De même, en considérant que : $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$ alors on a :

$|\, z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |\, z_1 + z_2| + |-z_2|$ sachant que $|-z_2| = |\, z_2|$

Ceci nous permet donc de déduire : $|\, z_1 + z_2| \geq |\, z_1| - |\, z_2|$

De même : $|\, z_1 + z_2| = |\, z_2 + z_1| \geq |\, z_2| - |\, z_1| \rightarrow |\, z_1 + z_2| \geq \big||\, z_1| - |\, z_2|\big|$

En remplaçant z_2 par $-z_2$ dans la 1ère inégalité on obtient :

$$|\, z_1 + (-z_2)| \leq |\, z_1| + |-z_2| \rightarrow |\, z_1 - z_2| \leq |\, z_1| + |\, z_2|$$

De même en effectuant le même remplacement dans la 2ème inégalité, on a :

$$|\, z_1 - z_2| \geq \big||\, z_1| - |\, z_2|\big|$$

Donc : $\big||\, z_1| - |\, z_2|\big| \leq |\, z_1 \pm z_2| \leq |\, z_1| + |\, z_2|$

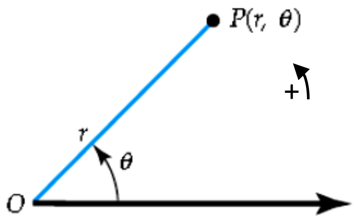
On en déduit d'une manière générale, l'inégalité suivante :

$$|\, z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |\, z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

3. Forme polaire et exponentielle des nombres complexes :

3.1. Forme polaire des nombres complexes :

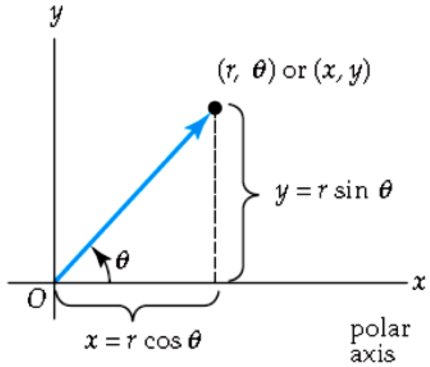
D'une manière géométrique simple on pourra définir une formulation des composantes x et y du nombre $z = x + iy$ en fonction des paramètres polaires r et θ :



$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \rightarrow z = x + iy = r.\cos\theta + ir.\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Avec : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$; $-\pi \leq \theta < \pi$

L'angle d'inclinaison θ du vecteur z est mesuré en radians, positif dans le sens inverse du mouvement des aiguilles de la montre.



L'angle θ est appelé « argument » de z et il est noté : $\theta = \arg(z)$

Il faut remarquer que $\arg(z)$ n'est pas unique à cause de la périodicité 2π des deux fonctions $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

Exercice : écrire sous la forme polaire : $z = -\sqrt{3} - i$

3.2. Argument principal :

Comme il a été discuté précédemment, $\arg(z)$ représente un ensemble infini de valeurs de θ, on retiendra alors que l'argument θ qui est unique et qui est compris dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$ *ou* $(-\pi \leq \theta < \pi)$ est appelé **Argument principal** et sera noté : $-\pi \leq \theta = Arg(z) < \pi$ [avec un A majuscule].

3.3. Multiplication et division :

La forme polaire est surtout convenable pour les opérations de multiplication et division, comme on le verra dans ce qui suit.

Soient : $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *et* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Calculons le produit $z_1.z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

On obtient après développement:

$$z_1 . z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

Et pour tout $z_2 \neq 0$, le rapport z_1/z_2 donnera :

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

Connaissant les règles des fonctions trigonométriques :

$\cos(A \pm B) = \cos A . \cos B \mp \sin A . \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A . \cos B \pm \cos A . \sin B$

On pourra simplifier le produit et le rapport comme suit :

$$z_1 . z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Tel que : $\arg(z_1 . z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ et $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

3.4. Puissance entière de z :

En mettant $z_1 = z_2$ Le résultat précédent nous permet de déduire l'expression de z^n ($n \in \mathbb{N}$) comme suit : $z_1 . z_2 = z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]$

Ainsi : $z^3 = z^2 . z = r^3[\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)]$, et ainsi de suite. On en déduit :

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Pour le cas particulier ou $|z| = r = 1$, alors $z = (\cos\theta + i \sin\theta)$, on obtient la relation appelée « **« Formule de Moivre »** :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Remarque : ***la formulation polaire fait intervenir deux paramètres qui identifie le nombre complexe z et qui sont : r et θ. Ceci ramène certains utilisateurs à réduire l'écriture dans une notation réduite des fonctions trigonométriques:***

$\boldsymbol{\cos\theta + i \sin\theta = cis\, \theta \rightarrow z = r . cis\theta}$

Comme on peut trouver également une autre notation réduite en engineering :

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = r/\underline{\theta}}$$

3.5. Racine entière de z :

Soient: $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ et $w = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, tel que : $w^n = z$.

Ceci implique que : $\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ et par identification on a : $r = \rho^n$ et $\cos\theta + i \sin\theta = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$. La solution de cette équation est donc :

$\rho = \sqrt[n]{r}$: Module de w

$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}; k = 0,1, \dots n-1$: Argument de w

On obtient ainsi n racines distinctes de z :

$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$; $k = 0,1, \dots n-1$

Pour la valeur $k = 0$, on obtient une racine unique w_0 , qui signifie une image unique via l'application $z^{1/n}$. On appelle w_0 ***Racine Principale*** de z, avec $\varphi = Arg(w_0)$ comme Argument Principal

Exercice : trouver les racines d'ordre 4 : $\boldsymbol{\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1+i}}$

3.6. Formulation exponentielle :

Sachant que le développement limité des deux fonctions sinusoïdales :

$$\cos\theta = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!}(-1)^n; n = 0,1, \dots \dots$$

$$\sin\theta = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{6!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n; n = 0,1, \dots \dots$$

On peut démontrer que : $\boldsymbol{\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}}$ **;** sachant que :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}(-1)^{2n}; n = 0,1, \dots \dots$$

Tout nombre complexe pourra s'écrire alors : $z = r . e^{i\theta}$

Application : en utilisant le DL de $\boldsymbol{e^{i\theta}}$, montrer: $\boldsymbol{\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}}$

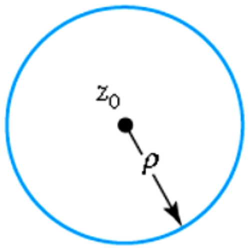
4. Ensemble de points dans un plan complexe :

Dans cette section, on donnera les définitions essentielles et terminologie nécessaire pour les ensembles de points dans un plan complexe.

4.1. Le cercle :

Posons $z_0 = x_0 + iy_0$. Comme on définit la distance entre un point quelconque $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ par : $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, on dit que tout point z qui satisfait l'équation :

$|z - z_0| = \rho, \rho > 0$ appartient un ensemble de points qui se trouve sur le cercle de centre z_0 et de rayon ρ.



$|z - z_0| = \rho$

4.2. Disque et voisinage :

Tout z qui satisfait l'inégalité suivante : $|z - z_0| \leq \rho, \rho > 0$, représente un ensemble de points qui peuvent appartenir au cercle $|z - z_0| = \rho$ comme ils peuvent être localisés à l'intérieur du disque de rayon ρ et centré en z_0.

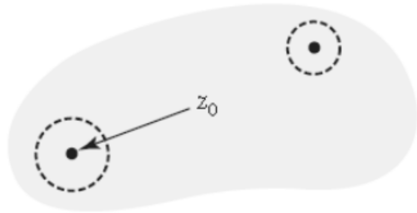
Les points qui vérifient par contre l'inégalité stricte : $|z - z_0| < \rho$, reposent uniquement à l'intérieur du disque sans qu'ils appartiennent au cercle $|z - z_0| = \rho$. Cet ensemble est appelé « voisinage de z_0 »

On peut également définir un voisinage avec exclusion dont le centre est exclu par les inégalités strictes simultanées : $0 < |z - z_0| < \rho$.

4.3. Ensemble ouvert :

Un point z est dit point intérieur d'un ensemble S du plan complexe s'il existe un certain voisinage de z_0 résidant complètement à l'intérieur de S.

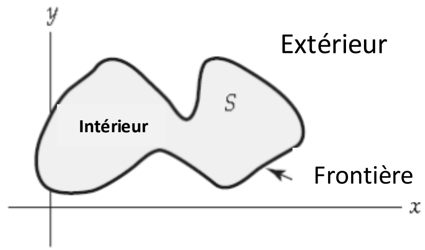
Si chaque point de S est intérieur, alors on parle dans ce cas d'un ensemble ouvert.



D'autre part, si chaque voisinage de z_0 qui appartient à S, contient au moins un point dans S et au moins un point en dehors de S, alors dans ce cas z_0 est un **point limite.**

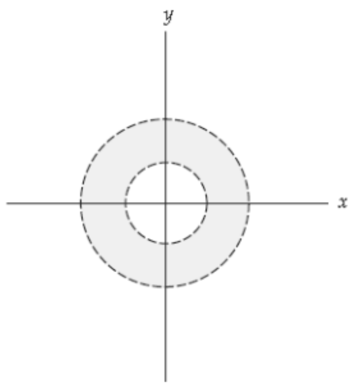
Un ensemble de points limites d'un ensemble S constitue **la frontière** de cet ensemble (limites).

Un point z qui ne figure ni à l'intérieur de S, ni dans frontière est un point dit : **extérieur.**



4.4. Couronne :

Considérons d'une part un ensemble de points S_1, satisfaisant l'inégalité stricte suivante : $|z - z_0| > \rho_1$ et qui représente un ensemble de points à l'extérieur du cercle défini par $|z - z_0| = \rho_1$ de rayon ρ_1 et centré en z_0 et d'autre part l'ensemble S_2 : $|z - z_0| < \rho_2$ qui représente les points résidants à l'intérieur du cercle de rayon ρ_2 et centré en z_0.



Si $0 < \rho_1 < \rho_2$, alors l'ensemble des points satisfaisant les inégalités strictes simultanées : $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ est l'intersection des deux ensembles S_1 et S_2 et il est appelé **Couronne circulaire.**

En mettant $\rho_1 = 0$; on retrouve la définition de l'ouvert avec exclusion de z_0.

4.5. Domaine :

si une paire de points z_1 et z_2 appartenant à un ensemble S, peuvent être connecté par une ligne polygonale formée d'un ensemble fini de segments joints bout à bout et qui repose entièrement dans l'ensemble S, alors ce dernier est dit : **connecté.** Un ouvert connecté est appelé **Domaine.**

4.6. Région :

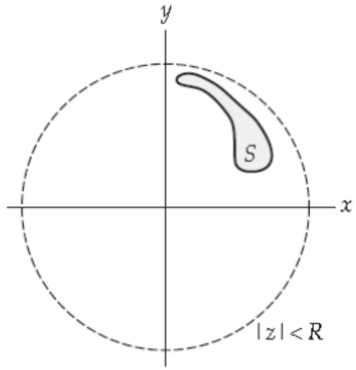
On appelle région, tout ensemble de points dans le plan complexe contenant : la totalité, quelques-uns ou aucun de ses points limites. D'après cette définition et puisque un ouvert est un ensemble qui ne contient aucun de ses points limites alors il est définit comme une région.

Une région qui contient tous ses points limites (frontière) est appelée **ensemble fermé.** C'est le cas du disque $|z - z_0| \leq \rho$ qui est un exemple d'une région fermée, qu'on appelle **disque fermé**. Le voisinage d'un point z_0 : $|z - z_0| < \rho$ est dans ce cas une région ouverte et on parle dans ce cas d'un **disque ouvert**. Si par contre le centre z_0 est exclu de ce disque, on parle d'une région perforée.

4.7. Ensemble borné :

On dit qu'un ensemble S dans le plan complexe, qu'il est borné s'il existe un réel $R > 0$ tel que : $|z| < R$ pour tout $z \in S$.

Dans le cas contraire, on parle d'un ensemble non-borné.



5. Application : formule quadratique

Dans le cas d'une équation quadratique en nombre complexe z :

$a.z^2 + b.z + c = 0 \,;\, a \neq 0$

On cherche les racines de cette forme d'une manière similaire à celle utilisée dans les nombres réelles. On commence par calculer le discriminant Δ tel que:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

D'une manière générale les racines sont données par :

$$z_i = \frac{-b + i(b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$$

Exercice :

1. **résoudre l'équation quadratique : $\boldsymbol{z^2 + 4z + 5 = 0}$**
2. **résoudre l'équation quadratique : $\boldsymbol{z^2 + (1 - i)z - 3i = 0}$**