Chapitre 4

La résolution du système des équations linéaires

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions élémentaires d'algèbre linéaire que nous utiliserons dans le reste de l'ouvrage. Pour les démonstrations et pour plus de détails.

4.2 Généralités sur les matrices

Nous allons passer en revue certaines définitions sur les matrices qui interviennent en algèbre matricielle.

4.2.1 Matrice inverse

S'il existe, inverse de A la matrice notée A^{-1} telle que $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = I$.
Une matrice qui possède un inverse s'appelle inversible où régulière.

4.2.2 Matrice diagonales et triangulaires

* Une matrice A telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ s'appelle une matrice diagonale. Son déterminant vaut $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Son inverse est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $1/a_{ii}$. A^{-1} n'existe donc que si $a_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

* Une matrice A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ s'appelle une matrice triangulaire supérieure. Son déterminant est égal à $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Son inverse est une matrice triangulaire supérieure. Le produit de deux matrices supérieures est une matrice supérieure.

* Une matrice A telle que $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ s'appelle une matrice triangulaire inférieure. Son déterminant est égal à $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Son inverse est une matrice triangulaire inférieure. Le produit de deux matrices inférieures est une matrice inférieure.

Matrice symétrique

Une matrice est dite symétrique si $A^T = A$. Donc $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$

Il faut faire attention que le produit de deux matrices symétriques n'est pas obligatoirement une matrice symétrique.

Matrice Conjuguée

Soit A une matrice dont les éléments appartiennent à $\mathbb{C}$. B est la conjuguée de A si $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ $\forall i, j$. On notera $B = \overline{A}$ on a $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$, $\overline{BA} = \overline{B}\ \overline{A}$, $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$

Si A est une matrice réelle alors $A = \overline{A}$.

Matrice adjointe

Soit A une matrice dont les éléments appartiennent à $\mathbb{C}$. B est l'adjointe de A si $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i, j$.

B : est donc la transposée conjuguée de A. On notera $B = A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$ on a $(A^*)^* = A$, $(AB)^* = B^*\ A^*$.

Matrice hermitienne

Une matrice A est dite hermitienne si $A = A^*$. On a $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Ses éléments diagonaux sont des nombres réels.

Matrice orthogonale

On dit que A est une matrice orthogonale si $A^{-1} = A^T$.

Matrice unitaire

Une matrice A est dite unitaire si $A^* = A^{-1}$.

Matrice normale

Une matrice A est dite normale si $A^*A = A\ A^*$. Une matrice unitaire est normale.

4.2.3 Matrice définie positive

Une matrice A est défie positive si $x^T Ax > 0$, $\forall x \neq 0$

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Soit $x = (x_1, x_2)^T$ un vecteur quelconque non nul. On a : $Ax = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$ et $x^T Ax = x_1 (x_1 + x_2) + x_2 (x_1 + 5x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2$ qui est toujours strictement positif quels que soient x_1 et x_2 non nuls simultanément.

Les éléments diagonaux d'une matrice définie positive sont strictement positifs $\left(\text{car } a_{ii} = e_i^T Ae_i > 0\right)$

4.2.4 Matrice de permutation

Une matrice de permutation est une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf un et un seul égal à 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. Une telle matrice s'obtient en permutant lignes et colonnes de la matrice identité.

Soient $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

on obtient :

$PA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

4.2.5 Les propriétés de déterminant

Soient A et B deux matrices carrées et λ est un nombre réel ou complexe

$\det(A) = \det\left(A^T\right)$

$\det(A\ B) = \det(B\ A) = \det(A)\det(B)$

$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$\det(B^{-1}AB) = \det(A)$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Soit $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$ alors

$\det[\lambda a_1, a_2, ..., a_n] = \lambda \det[\lambda a_1, a_2, ..., a_n]$

$\det[a_1, a_2 + \lambda a_1, ..., a_n] = \det[a_1, a_2, ..., a_n]$

$\det[a_2, a_1, ..., a_n] = -\det[a_1, a_2, ..., a_n]$

4.3 Généralités sur les systèmes linéaires

On suppose connue une matrice carrée complexe A de dimension n ainsi qu'un vecteur b de $\mathbb{C}^n$. Le problème que nous allons chercher à résoudre consiste à trouver le vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ qui vérifie :

$$Ax = b$$

c'est ce que l'on appelle un système d'équations linéaires ou, plus simplement, un système linéaire. Si nous l'explicitons complètement, il s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ou encore

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.2}$$

Ce système a une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si ce déterminant est nul alors le système peut avoir une infinité de solutions où n'en avoir aucune. Prenons un exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1. \\ 2x_1 + 4x_2 = 2. \end{cases}$$

La seconde équation est le double de la première et le déterminant de la matrice est nul. Si l'on donne à x_1 une valeur quelconque, alors $x_2 = \frac{1-x_1}{2}$. Si l'on donne à x_2 une valeur quelconque, alors $x_1 = 1 - 2x_2$. Ce système à donc une infinité de solutions. Par contre si nous remplaçons la seconde équation par $2x_1 + 4x_2 = a \neq 2$, alors on ne peut pas avoir simultanément $2(x_1 + 2x_2) = 2(1) = a \neq 2$ et le système n'a donc aucune solution.

4.3.1 Cas d'une matrice diagonale

Tous les éléments sont nuls sauf ceux diagonale principale

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

La résolution $Ax = b$ est alors immédiate, si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ et $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, on a $x_i = \frac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

ceci es supposant bien sur que tous les a_i sont non nuls.

4.3.2 Cas d'une matrice triangulaire supérieure (où inférieure)

Tous les éléments au-dessous (où au-dessus) de la diagonale sont nuls

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas on utilisera toujours une méthode directe de résolution par remontée soit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On commence par résoudre le dernière équation ; on substituée le résultat obtenu pour x_n dans la précédente, ce qui permet de calculer x_{n-1}, etc$\cdots$

$$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_{n-1} = \left(b_{n-1} - a_{n-1n} x_n\right) / a_{n-1n-1} \\ \vdots \\ x_i = \left(b_i - a_{in} x_n - a_{in-1} x_{n-1} - \cdots - a_{ii+1} x_{i+1}\right) / a_{ii} \end{cases}$$

Le cas des matrices triangulaires inférieures se traite de façons identique par un procédé de descente.

Il existe deux grandes familles de méthodes de résolution :

a)- Les méthodes directes qui permettent de résoudre le système soit par triangularisation ou soit par factorisation de la matrice A. Les principales méthodes sont :

- La méthode de Gauss.
- La méthode de Gauss-Jordan.
- La factorisation LU.

b)- Les méthodes itératives qui introduisent une notion de convergence vers la solution. Les principales méthodes sont :

- La méthode de Jacobi.
- La méthode de Gauss-Seidel.

4.4 Les méthodes directes

4.4.1 Méthode de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss a pour but de transformer le système de départ en un système ayant la même solution de la forme $Ux = c$ où U est une matrice triangulaire supérieure et c un vecteur. La résolution est en deux étapes :

* Triangularisation de la matrice A.
* Résolution du système triangulaire.

Triangularisation de la matrice A

On suppose une nouvelle matrice s'écrit comme $B = [A; b]$, on injecte le vecteur b et la matrice A d'une nouvelle matrice B.

Pour triangularisation la matrice A, on utilise la technique suivante :

Supposons pour simplifier la méthode que $a_{11} \neq 0$, a_{11} est le premier pivot de l'élimination. On commence la triangularisation, en annulant les éléments da la première colonne de A situées en dessous de la diagonale. Cette opération peut être réalisée en multipliant A, à gauche, par la matrice $P^{(1)}$

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dont l'inverse est :

$$\left(P^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est alors équivalent au système $A^{(1)}x = b^{(1)}$, telle que $A^{(1)} = P^{(1)}A$ et $b^{(1)} = P^{(1)}b$ où $B^{(1)} = \left[A^{(1)}; b^{(1)}\right]$ de la forme :

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & a_{3n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

dont les coefficients $a_{ij}^{(1)}$ sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij}/a_{11} & j = 2, 3, \cdots, n+1 \\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)} & 2 \leq i \leq n \text{ et } 2 \leq j \leq n+1 \end{cases}$$

comme det $\left(P^{(1)}\right) = 1/a_{11}$, on a : det $\left(A^{(1)}\right) = \det(A)/a_{11} \neq 0$,

La matrice $A^{(1)}$ est régulière et l'un au moins de ses éléments $a_{i2}^{(1)}$, $i = 2, 3, \cdots, n$ est différent de zéro. Après d'éventuelles permutations de lignes, on peut supposer que $a_{22}^{(1)} \neq 0$ et appliquons de nouveau le même procédé à la deuxième colonne de $A^{(1)}$. On obtient de proche en proche à la $k^{ième}$ application du procédé un système équivalent au système $Ax = b$ de la forme : $A^{(k)}x = b^{(k)}$ où les matrices $A^{(k)}$ et $b^{(k)}$ sont données par : $A^{(k)} = P^{(k)}A^{(k-1)} = P^{(k)}P^{(k-1)} \cdots P^{(1)}A$

$b^{(k)} = P^{(k)}b^{(k-1)} = P^{(k)}P^{(k-1)} \cdots P^{(1)}b$

et sont de la forme :

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} & a_{1n+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{kk+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{kn+1}^{(k)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k)} & a_{k+1n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{nn+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

On continue la triangularisation, lorsque $a_{k+1k+1}^{(k)}$ est non nul, en multipliant $A^{(k)}$ à gauche par la matrice :

$$P^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_{1k}^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & 1/a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{k+2k+1}^{(k)}/a_{k+1k+1}^{(k)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{nk+1}^{(k)}/a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

les éléments de la matrice $A^{(k+1)}$ et le vecteur $b^{(k+1)}$ s'écrit dans l'algorithme suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}/a_{kk}^{(k)} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)} \\ b_i^{(k+1)} = a_{in+1}^{(k+1)} \end{cases}$$

et ainsi de suite jusqu'à $k = n-1$, La matrice $A^{(n)} = P^{(n)}P^{(n-1)} \cdots P^{(1)}A$ est triangulaire supérieure et la résolution du système $A^{(n)}x = b^{(n)}$ système équivalant à $Ax = b$ est immédiate. On a trouvé une matrice de passage $P = P^{(n)}P^{(n-1)} \cdots P^{(1)}$ telle que la matrice $A^{(n)} = U = PA$ soit triangulaire supérieure et le nouveau vecteur $b^{(n)} = c = Pb$.

Après triangularisation, le système $Ux = c$ se résout en cascade en commençons par x_n.

Remarques

La méthode de Gauss n'est correctement définie que si les pivots $a_{k+1k+1}^{(k)}$ sont non nuls pour $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Si le terme diagonal $a_{k+1k+1}^{(k)}$ est nul, il faut choisir un autre terme non nul de la colonne k pour terminer les calculs, en permutant l'ordre des lignes de la matrice.

4.4.2 Exercice d'application de la méthode de Gauss

Exercice :

On considère la matrice A et le vecteur b

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices Let U sont triangulaires inférieure et supérieure respectivement.

Solution :

Nous utilisons l'algorithme de la méthode de Gauss :

on a à la première étape :

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(1)} = P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{19}{3} \end{bmatrix} \text{ et } b^{(1)} = P^{(1)}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Puis à la deuxième étape :

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \\ -0 & -\frac{2}{13} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & \frac{81}{13} \end{bmatrix} \text{ et } b^{(2)} = P^{(2)}b^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{69}{13} \\ \frac{162}{13} \end{bmatrix}$$

et en fin à la dernière étape :

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{81} \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(3)} = P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } x = b^{(3)} = P^{(3)}b^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{69}{13} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système triangulaire : $A^{(3)}x = b^{(3)}$

ce qui donne $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ et donc : $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.4.3 Programme en Matlab de la méthode de Gauss

$$
\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
& close\ all \\
a &= input('entrer\ la\ matrice\ a =') \\
b &= input('donner\ le\ \sec ond\ membre\ du\ système') \\
n &= length(b) \\
aa &= [a\ b] \\
for\ k &= 1 : n \\
for\ i &= k+1 : n \\
m(i,k) &= aa(i,k)/aa(k,k); \\
for\ j &= 1 : n+1 \\
aa(i,j) &= aa(i,j) - m(i,k) * aa(k,j); \\
& end \\
& end \\
& end \\
a &= aa(:, 1 : n); \\
b &= aa(:, n+1); \\
x(n) &= b(n)/a(n,n); \\
fori &= n-1 : -1 : 1 \\
s &= 0; \\
fork &= i+1 : n \\
s &= s + a(i,k) * x(k); \\
& end \\
x(i) &= (b(i) - s)/a(i,i); \\
& end \\
& x
\end{aligned}
$$

4.4.4 Factorisation LU

La factorisation LU (Lower Upper) pour une matrice A inversible consiste à déterminer deux matrices triangulaires, l'une inférieure L et l'autre supérieure U telles que $A = LU$.

Cette décomposition, unique, existe si et seulement si les n mineures de A sont non nuls.

La matrice U est obtenue par la méthode d'élimination de Gauss. Et la matrice L fait intervenir les pivots successifs de l'algorithme de Gauss.

On a $A = LU$ et on a aussi $A^{(n)} = U = P^{(n)} P^{(n-1)} \cdots P^{(1)} A = L^{-1} A$

alors

$$L = \left(P^{(1)}\right)^{-1} \left(P^{(2)}\right)^{-1} \cdots \left(P^{(n)}\right)^{-1} \tag{4.3}$$

Une fois calculée L et U, résoudre le système de départ consiste à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

4.4.5 Exercice d'application de la méthode de Factorisation LU

Exercice :
On considère la matrice A et le vecteur b

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices Let U sont triangulaires inférieure et supérieure respectivement.

Solution :
Nous utilisons l'algorithme de la méthode de Gauss :
on a à la première étape :

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(1)} = P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{19}{3} \end{bmatrix} \text{ et } b^{(1)} = P^{(1)}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Puis à la deuxième étape :

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 \\ -0 & -\frac{2}{13} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & \frac{81}{13} \end{bmatrix} \text{ et } b^{(2)} = P^{(2)}b^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{69}{13} \\ \frac{162}{13} \end{bmatrix}$$

et en fin à la dernière étape :

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{81} \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(3)} = P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } x = b^{(3)} = P^{(3)}b^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{69}{13} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système triangulaire : $A^{(3)}x = b^{(3)}$

ce qui donne $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ et donc : $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Décomposons à présent A en LU. U n'est autre que la matrice $A^{(3)}$ que nous venons de déterminer : $U = A^{(3)}$.

D'autre part,

$$L = (P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{13}{3} & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{81}{13} \end{bmatrix}.$$

où

$$\left(P^{(1)}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0\\-2&1&0\\2&0&0\end{bmatrix},\quad\left(P^{(2)}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{13}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad\left(P^{(3)}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{81}{13}\end{bmatrix},$$

4.4.6 Programme en Matlab de la méthode de Factorisation LU

$$\begin{aligned}
& clc\\
& clear\ all\\
& close\ all\\
a &= input('entrer\ la\ matrice\ a =')\\
b &= input('donner\ le\ \sec ond\ membre\ du\ système')\\
n &= length(b)\\
aa &= [a\ b]\\
for\ k &= 1:n\\
for\ i &= k+1:n\\
m(i,k) &= aa(i,k)/aa(k,k);\\
for\ j &= 1:n+1\\
aa(i,j) &= aa(i,j)-m(i,k)*aa(k,j);\\
& end\\
& end\\
& end\\
a &= aa(:,1:n);\\
b &= aa(:,n+1);\\
x(n) &= b(n)/a(n,n);\\
fori &= n-1:-1:1\\
s &= 0;\\
fork &= i+1:n\\
s &= s+a(i,k)*x(k);\\
& end\\
x(i) &= (b(i)-s)/a(i,i);\\
& end\\
& x
\end{aligned}$$

4.4.7 Factorisation de Cholesky

Méthode de factorisation pour une matrice A définie positive et symétrique. Il existe une unique matrice L triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont strictement positifs telle que $A = LL^T$. Les éléments de L sont, pour $i = 1$ à n

$$\left\{\begin{array}{ll} L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} & \\ L_{ji} = \frac{1}{a_{ii}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right) & \quad j = i+1 \text{ à } n \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Le système à résoudre $Ax = b$ se ramène alors à la résolution de deux systèmes triangulaires :

$$\left\{\begin{array}{l} Ly = b \\ L^T x = y \end{array}\right. \tag{4.5}$$

4.4.8 Exercice d'application de la méthode de Factorisation de Cholesky

Exercice :
On considère la matrice A et le vecteur b

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Montrer que A esr symétrique et définie positive. Résoudre alors le système $Ax = b$ par la méthode de Cholesky.

Solution :
Une matrice symétrique est définie positive si ${}^t x A x \geq 0$ quel que soit le vecteur x. considérons donc un vecteur $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. On a

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 \geq 0$$

la matrice A est donc bien définie positive.
La méthode de cholesky consiste à décomposer A en $L^t L$ où L est triangulaire inférieure. On a

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & \sqrt{39}/3 & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 2\sqrt{39}/39 & 9\sqrt{13}/13 \end{bmatrix}$$

Posons ${}^t L x = y$ et résolvons le système $Ly = b$, ce qui donne : $\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 23\frac{\sqrt{39}}{13} \\ y_3 = 18\frac{\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$

Il ne reste plus qu'à résoudre ${}^t L x = y$, ce qui donne : $x_3 = 2$, $x_2 = 5$, $x_1 = 1$.

4.4.9 Programme en Matlab de la méthode de Factorisation de Cholesky

$$\begin{aligned}
& clc;\ clear\ all;\ close\ all; \\
a &= input('entrer\ la\ matrice\ a =') \\
b &= input('donner\ le\ \sec ond\ membre\ du\ système') \\
[n,m] &= size(a); \\
if\ n\tilde{} &= m \\
& error('seulement\ les\ systèmes\ carrées') \\
& end \\
for\ k &= 1:n-1 \\
if\ \ a(k,k) &< =0 \\
& error('pivont\ nul\ ou\ négatif') \\
& end \\
a(k,k) &= sqrt(a(k,k)); \\
a(k+1 &: n,k) = a(k+1:n,k)/a(k,k); \\
for\ j &= k+1:n \\
a(j &: n,j) = a(j:n,j) - a(j:n,k)*a(j,k); \\
& end \\
& end \\
& a(n,n) = sqrt(a(n,n)); a = tril(a); \\
y(1) &= b(1)/a(1,1); \\
for\ j &= 2:n;\ s=0; \\
for\ k &= 1:j-1;\ s = s + a(j,k)*x(k);\ end; \\
y(j) &= (b(j)-s)/a(j,j);\ end \\
a &= a';\ x(n) = b(n)/a(n,n); \\
for\ i &= n-1:-1:1 \\
s &= 0; \\
for\ k &= i+1:n \\
s &= s + a(i,k)*x(k); \\
& end \\
x(i) &= (b(i)-s)/a(i,i) \\
& end
\end{aligned}$$

4.4.10 Méthode de Gauss-Jordin

La méthode de Gauss-Jordan est une variante de la méthode de Gauss. Elle consiste à diagonaliser la matrice A, au lieu de la triangulariser, en faisant apparaitre l'unité la diagonale. Pour cela, on définit comme dans la méthode de triangularisation de Gauss, trois suites de matrice $A^{(k)}$, $P^{(k)}$ et $b^{(k)}$, telles que :

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= P^{(1)}A;\ b^{(1)} = P^{(1)}b \\ &\vdots \\ A^{(k)} &= P^{(k)}A^{(k-1)};\ b^{(k)} = P^{(k)}b^{(k-1)} \\ &\vdots \\ A^{(n)} &= P^{(n)}A^{(n-1)};\ b^{(n)} = P^{(n)}b^{(n-1)} \end{aligned}$$

avec

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix};\quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n-1}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn-1}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

et nous pouvons écrire dans le cas générale :

$$P^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & -a_{1k+1}^{(k)}/a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -a_{kk+1}^{(k)}/a_{k+1k+1}^{(k)} & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{k+2k+1}^{(k)}/a_{k+1k+1}^{(k)} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{nk+1}^{(k)}/a_{k+1k+1}^{(k)} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et ainsi se suite jusqu'à $k = n-1$, la matrice $A^{(n)} = P^{(n)}P^{(n-1)}\cdots P^{(1)}A$ de sorte que $A^{(n)} = I$, alors $A^{-1} = P^{(n)}P^{(n-1)}\cdots P^{(1)}$.

La résolution du système $Ax = b$ est la solution du système $A^{(n)}x = b^{(n)}$ avec $A^{(n)} = I$, a partir de ça la solution $x = b^{(n)}$.

Remarques :

La différence entre les deux méthodes Gauss et Gauss-Jordan est :

1- La matrice de passage $P^{(k)}$ est une triangulaire inférieure par rapport à la méthode de Gauss et par contre dans la méthode de Gauss-Jordan est une matrice quelconque.

2- Par la méthode de Gauss-Jordan, nous pouvons calculer l'inverse d'une matrice si elle existe.

3- Par la méthode de Gauss, nous pouvons déterminer deux matrices L et U telle que : $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure (Factorisation LU).

4.4.11 Exercice d'application de la méthode de Gauss-Jordan

Exercice :

On considère la matrice A et le vecteur b :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss-Jordan.
Solution :
Nous utilisons l'algorithme de la méthode de Gauss-Jordan :
on a à la première étape :

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(1)} = P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \text{ et } b^{(1)} = P^{(1)}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Puis à la deuxième étape :

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \text{ et } b^{(2)} = P^{(2)}b^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{40}{3} \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix}$$

et en fin à la dernière étape :

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } A^{(3)} = P^{(3)}A^{(2)} = I \text{ et } x = b^{(3)} = P^{(3)}b^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La mtrice inverse de de la matrice A est donnée par :

$$A^{(1)} = P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.4.12 Programme en Matlab de la méthode de Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
& close\ all \\
a &= input('entrer\ la\ matrice\ a =') \\
b &= input('donner\ le\ \sec ond\ membre\ du\ système') \\
aa &= [a\ b] \\
[m, n] &= size(aa) \\
for\ j &= 1 : m - 1 \\
for\ k &= 2 : m \\
if\ aa(j, j) &= = 0 \\
t &= aa(1, :); aa(1, :) = aa(k, :); \\
aa(k, &:) = t; \\
& end \\
& end \\
for\ i &= j + 1 : m \\
aa(i, &:) = aa(i, :) - aa(j, :) * (aa(i, j)/aa(j, j)); \\
& end \\
& end \\
for\ j &= m : -1 : 2 \\
for\ i &= j - 1 : -1 : 1 \\
aa(i, &:) = aa(i, :) - aa(j, :) * (aa(i, j)/aa(j, j)); \\
& end \\
& end \\
for\ l &= 1 : m \\
aa(l, &:) = aa(l, :)/aa(l, l); \\
x(l) &= aa(l, n); \\
& end \\
& aa \\
& x'
\end{aligned}
$$

4.5 Les méthodes itératives

Les méthodes itératives s'inspirent de l'analyse. Ce sont des méthodes de point fixe. Elles cherchent à définir une suite qui verge vers la solution. Ici, au bout d'un nombre fini d'étapes, en n'obtient jamais, par nature, la solution exacte. Pourtant certaines méthodes itératives s'en approchent très vite. Ces méthodes sont les seules à pouvoir fournir des résultats précis pour les très gros systèmes.

Nous cherchons à résoudre le système linéaire (4.2) , que l'on peut noter matriciellement : $AX = b$

Pour résoudre ce système il faut déterminant de la matrice A est déférent de zéro.

4.5.1 Principe des méthodes itératives

L'objectif des méthodes itératives est de construire, à partir d'un vecteur $X^{(0)}$, une suite de vecteurs $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, ..., X^{(n)}, ...$ qui converge vers la solution exacte du système (4.2) .

Ayant choisi une norme $\|.\|$ sur K^n, cette dernière condition retraduit par :

$$\lim_{n\to\infty} \left\|X^{(n)} - X\right\| = 0 \tag{4.6}$$

Le critère (4.6) a l'inconvénient d'utiliser l'inconnue x. Désignons toujours par $\|.\|$ la norme subordonnée associée.

$$X^{(n)} - X = A^{-1}\left(AX^{(n)} - AX\right)$$

alors

$$\left\|X^{(n)} - X\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|AX^{(n)} - b\right\|$$

De même il est clair que

$$\left\|AX^{(n)} - b\right\| \leq \|A\| \left\|X^{(n)} - X\right\|$$

Par suite (4.6) est équivalent à :

$$\lim_{n\to\infty} \left\|AX^{(n)} - b\right\| \tag{4.7}$$

Le critère (4.7) ne dépend que des données du système (4.2) .

Définition : dans ce qui suit nous allons étudier les processus itératifs linéaires du type suivant :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = M\ X^{(k)} + N \\ X^{(0)} \text{ arbitraire} \\ M \in M_n(K),\ N \in K^n \end{cases} \tag{4.8}$$

Nous allons chercher les conditions sur la matrice M et le vecteur N pour que le processus itératifs soit convergent et que la limite soit une solution du système (4.2) .Si la suit $X^{(k)}$ converge vers X, alors nous pouvons écrire $X = M\ X + N$ ou $(I - M) X = N$

ceci nous amène à ne chercher que des méthodes itératives pour les quelles $I - M$ est inversible.

4.5.2 Méthode de Jacobi

On décompose A sous la forme : $A = D - E - F$ où quels que soient les indices i et j on a :

$D(i,j) = \delta_{ij}A(i,j)$; $E(i,j) = -A(i,j)$ si $j < i$ et $E(i,j) = 0$ si non ; $F(i,j) = -A(i,j)$ si $j > i$ et $F(i,j) = 0$ sinon.

Pour développer cette méthode il faut que D est inversible. par compariasant avec le système (4.8) , on obtient :

$AX = b$ équivalant $(D - E - F)\,X = b$

équivalant aussi $DX = (E - F)\,X + b$

alors

$$X = D^{-1}(E + F)\,X + D^{-1}b \tag{4.9}$$

donc

$$\begin{aligned} M &= D^{-1}(E + F) \\ N &= D^{-1}b \end{aligned}$$

M est appelée la matrice de Jacobi et sera noté J.

4.5.3 Exercices d'application de la méthode de Jacobi

Exercice 01 :

Trouver la matrice de Jacobi J du système $AX = b$ où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solution 01 :

La matrice $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est inversible où $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,la matrice $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

alors $E + F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ donc la matrice de Jacobi s'écrit :

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire la solution du système (4.2) par la méthode de Jacobi comme suit :

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j \neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad \forall\ i = 1, 2, ..., n \tag{4.10}$$

ainsi $x_1^{(k+1)}$ est calculé à partir de $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$, en annulant la 1^{er} composante ; $x_2^{(k+1)}$ est calculé à partir de $x_1^{(k)}, x_3^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$, en annulant la deuxième composante ; et ainsi de suit.

Les n composantes de $x^{(k)}$ doivent être conservées en mémoire jusqu'au calcul de $x_n^{(k+1)}$.

Exercice 02 :

Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Jacobi où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

et le vecteur initial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solution 02 :
L'algorithme de la méthode de Jacobi s'écrit comme : $x^{(k+1)} = J\ x^{(k)} + D^{-1}b$

La matrice de Jacobi : $J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ et $D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

On donne les résultats sur le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^{(k)}$	0	1.5	0.875	1.125					
$x_2^{(k)}$	0	1.25	1.0625	0.9375					
$x_3^{(k)}$	0	-0.125	0.125	-0.03125					

alors la solution est $x^T = (1,1,0)$.

4.5.4 Programme en Matlab de la méthode de Jacobi

```
clc
clear all
close all
a = input('entrer la matrice a =')
b = input('donner le second membre du système')
n = length(b)
x0 = zeros(n,1);
err = 1;
while err > 10^-6
for j = 1:n
x(j) = (b(j) - a(j,[1:j-1,j+1:n]) * x0([1:j-1,j+1:n]))/a(j,j);
end
err = max(abs(x' - x0));
x0 = x'
end
r = x'
```

4.5.5 Méthode de Gauss- Seidel

A étant toujours décomposée sous la forme $A = D - E - F$ comme pour la méthode de Jacobi, avec toujours D inversible, on remarque que $D - E$ est aussi inversible (puisque $\det(D-E) = \det(D) \neq 0$).

$AX = b$ équivalant $(D - E - F)X = b$
équivalant aussi $(D - E)X = FX + b$
alors

$$X = (D-E)^{-1}FX + (D-E)^{-1}b \tag{4.11}$$

donc

$$M = (D-E)^{-1}F$$
$$N = (D-E)^{-1}b$$

dans cette méthode, la matrice M est appelée la matrice de Gauss-Seidel et sera noté G.

4.5.6 Exercices d'application de la méthode de Gauss- Seidel

Exercice 01 :

Trouver la matrice Gauss-Seidel du système $AX = b$ où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solution 01 :

La matrice $D - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ est inversible et $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On utilise la méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse de $(D - E)$.

la première matrice de passage $P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(D-E)^{(1)} = P^{(1)}(D-E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

la deuxième matrice de passage $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$, $(D-E)^{(2)} = P^{(2)}(D-E)^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

et la troisième matrice de passage $P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $(D-E)^{(3)} = P^{(3)}(D-E)^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

alors $(D-E)^{-1} = P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

donc la matrice de Gauss-Seidel M s'écrit :

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire l'expression de la solution du système (4.2) par la méthode de Gauss-Seidel comme suit :

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad \forall\ i = 1, 2, ..., n \tag{4.12}$$

ainsi la i ième composante $x^{(k+1)}$ est calculée à partir des $(i-1)$ premières composantes de $x^{(k+1)}$ et des $(n-i-1)$ dernières composantes de $x^{(k)}$.

Exercice 02 :

Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss-Seidel où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur initial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solution 02 :

L'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel s'écrit comme : $x^{(k+1)} = G\, x^{(k)} + (D-E)^{-1} b$

La matrice de Gauss-Seidel s'écrit : $G = (D-E)^{-1} F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ et $(D-E)^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{1}{16} \end{bmatrix}$

On donne les résultats sur le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	0	1.5	1.0625	1.015625	1.00390625	1.0009765625	1.0002441406
$x_2^{(k)}$	0	0.875	0.96875	0.9921875	0.998046875	0.9995117187	0.9998779297
$x_3^{(k)}$	0	0.0625	0.015625	-0.00390625	0.0009765625	0.0002441406	0.0000610351

alors la solution est $x^T = (1, 1, 0)$.

4.5.7 Programme en Matlab de la méthode de Gauss- Seidel

$$
\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
& close\ all \\
a &= input('entrer\ la\ matrice\ a =') \\
b &= input('donner\ le\ \sec ond\ membre\ du\ système') \\
n &= length(b) \\
x0 &= zeros(n,1); \\
err &= 1; \\
while\ err &> 10\hat{}-6 \\
for\ j &= 1:n \\
if\ j &= =1 \\
x(1) &= (b(1)-a(1,2:n)*x0(2:n))/a(1,1); \\
elseif\ j &= =n \\
x(n) &= (b(n)-a(n,1:n-1)*x0(1:n-1))/a(n,n); \\
& else \\
x(j) &= (b(j)-a(j,1:j-1)*x(1:j-1)-a(j,j+1:n)*x0(j+1:n))/a(j,j); \\
& end \\
& end \\
err &= \max(abs(x'-x0)); \\
& x0 = x'; \\
& end \\
r &= x'
\end{aligned}
$$

4.6 La convergence des méthodes itératives

La convergence des méthodes itératives où l'expression (4.8) est liée à la notion de rayon spectral de la matrice M (dans la méthode de Jacobi $M = J$ et dans la méthode de Gauss Seidel $M = G$). Nous étudions, maintenant, cette notion.

4.6.1 Rayon Spectral

On appelle rayon spectral de $M \in M_n(K)$ et note $\rho(M)$ le plus grand des modules des vecteurs propres de M :

$\rho(M) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } M\}$

Exemple :

Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ une matrice diagonale donc le rayon spectral de cette matrice est $\rho(M) = \max_{1\leq i\leq 3} \{|\lambda_i|\}$

$\rho(M) = \max\{1,2,3\} = 3$

Nous utilisons le théorème suivant pour étudier la convergence des méthodes itératives.

Théorème :

Soit $M \in M_n(K)$, $(I-M)$ inversible et $N \in K^n$. La méthode itérative :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = MX^{(k)} + N \\ X^{(0)} \in K^n \end{cases}$$

converge, quelque soit le vecteur initial $X^{(0)}$, si et seulement si $\rho(M) < 1$.

Remarques :

1- En pratique, le calcul de $\rho(M)$ est très compliqué, il suffit alors de vérifier si $\|M\| < 1$ puisque $\rho(M) \leq \|M\|$.

2- Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a- $\|M\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |M_{ij}| < 1$

b- $\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}| < 1$

c-$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|^2} < 1$

3- Si $|M_{ij}| < \frac{1}{n}$; $\forall i,j$ où n est la dimension du système, alors les algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent.

4- Si $|a_{ii}| > \sum_{j\neq 1}^{n} |M_{ij}| \quad \forall i$

où $\quad |a_{ii}| > \sum_{i\neq j}^{n} |M_{ij}| \quad \forall j$ alors le processus converge.

(Dans ce cas on dit que la matrice A est à diagonale dominante).

5- La méthode de Gauss-Seidel présente l'avantage suivant par rapport à celle de Jacobi. On n'est pas obligé de connaitre toutes les composantes de $X^{(k)}$ pour pouvoir calculer $X^{(k+1)}$, et aussi la convergence de la méthode de Gauss-Seidel plus rapide que la méthode de Jacobi.

4.7 Série des exercices

Exercice 4 - 1 :

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$1-\begin{cases} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 5 \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 = 3 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 1 \end{cases},\; 2-\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2\,x_2 + 4\,x_3 = 1 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 1 \end{cases},\; 3-\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + 4\,x_4 = 2 \\ -4\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - 7\,x_4 = -9 \\ 4\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 8\,x_4 = 2 \\ -3\,x_2 - 12\,x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Exercice 4 - 2 :

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1)- Trouver la décomposition LU de la matrice A par la méthode de Gauss.
2)- Trouver A-1 et B-1 par la méthode de Gauss –Jordan.
3)- En déduire $det(A)$ et $det(B)$.
4)- En déduire les solutions de $AX = (4, 6, -1)^t$ et $BX = (-2, 0, 0, 2)^t$.

Exercice 4 - 3 :
On souhaite résoudre le système linéaire suivant $AX = b$, par la méthode de Gauss.
La matrice A et le vecteur b sont définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

1) Que se passe t-il si on applique l'algorithme de Gauss ?
2) Pour résoudre ce problème, on introduit la matrice de permutation suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecrire le système équivalent au système précédent qui a PA comme matrice associée.
3) Appliquer la méthode de Gauss à ce nouveau système et calculer la factorisation LU associée.
4) Résoudre le système à partir de la factorisation LU obtenue.

Exercice 4 - 4 :
On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -14 & 18 & -27 \\ 4 & -4 & 7 \\ 12 & -12 & 22 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -56 & -14 & 1 \\ 12 & 4 & 0 \\ 48 & 12 & 0 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 296 \\ -64 \\ -240 \end{bmatrix}$$

I)- 1 – Décomposer B en LU où L et U sont deux matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement.
I)- 2 – Inverser la matrice B par la méthode de Gauss-Jordan.
I)- 3 – En déduire la solution du système $Bx = b$.
I)- 4 – On considère la suite de vecteurs : $Y^{(n)} = A^n Y^{(0)}$et $Y^{(0)} = (1, 0, 0)^T$
I)- 4 – 1 – Calculer $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ et $Y^{(3)}$.
I)- 4 – 2 – Donner le polynôme caractéristique de A qui définir par la relation suivante : $P_3(\lambda) = \sum_{i=0}^{3} x_i \lambda^i$ où $x_0 = 1$ et x_i, $i = 1, ..., 3$ sont des solutions du système qui s'écrit comme $\left(Y^{(2)}, Y^{(1)}, Y^{(0)}\right) (x_1, x_2, x_3)^T = -Y^{(3)}$.

Exercice 4 - 5 :
1)- Montrer que la matrice A est symétrique et définie positive.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

2)- Résoudre alors le système $AX = b$ par la méthode de Choleski où $b^t = (0, 23, 16)$.

Exercice 4 - 6 :
On considère la matrice A et le vecteur b :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

01)- Résoudre le système par la méthode de Jacobi et par la méthode de Gauss-Seidel. On partira du vecteur $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

02)- Retrouver la solution précédente en inversant A par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 4 - 7 :
On considère la matrice A et le vecteur b :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 18 & -27 \\ 4 & -4 & 7 \\ 12 & -12 & 22 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 296 \\ -64 \\ -240 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

01)- Montrer, sans le calcul des valeurs propres, que la méthode de Jacobi correspondante à (4.16) converge quelque soit $X^{(0)}$.

02)- Résoudre le système $AX = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices L et U sont triangulaires inférieure et supérieure respectivement. En déduire A^{-1} .

03)- Résoudre le même système, avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$, par la méthode de Jacobi. On partira de $X^{(0)} = (1, 0, 0)^t$.

04)- Résoudre le même système par la méthode de Gauss-Seidel. On prendra le même vecteur initial qu'à la question précédente et avec la même précision.

Exercice 4 - 8 :
On considère le système linéaire :

$$Ax = b \tag{4.17}$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice réelle, carrée, d'ordre n , inversible et d'éléments diagonaux a_{ii}, $i = 1, ..., n$ non nuls, x et b donnée sont deux vecteurs de R^n notés : $x^t = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $b^t = (b_1, b_2, ..., b_n)$.

On décompose A en $A = M - N$ où M et N sont les matrices d'éléments :

$$M_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \geqslant j \\ 0 & i < j \end{cases}, \qquad N_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & i \geqslant j \end{cases},$$

1- Vérifier que le système (4.17) est équivalent au système :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \tag{4.18}$$

On associe à ce système le schéma itératif :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \tag{4.19}$$

Ecrire une condition suffisante de convergence de (4.19).

2- Etablir une relation de récurrence permettant de calculer les éléments g_{ij} et x_j des matrices $G = M^{-1}N$ et $x = M^{-1}b$ en fonction des éléments a_{ij} de A et b_i de b.

3- Montrer que :

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} + b_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{4.20}$$

4- Application : on considère le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En partant du vecteur initial $x^{(0)t} = (1, 0, 0)$, déterminer la solution de ce système à l'aide du schéma (4.19).