Chapitre 3

Méthodes des intégrations numériques

3.1 Introduction

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur. Ces méthodes se répartissent en deux grandes catégories : les méthodes des composées dans lesquelles la fonction f est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision et les méthodes de Gauss fondée sur les polynômes orthogonaux pour lesquelles les points de la subdivision sont imposés.

3.2 Méthode des trapèzes

3.2.1 Principe de la méthode

On remplace f sur chaque segment de la subdivision par la fonction affine du type $Ax + B$ qui prend les mêmes valeurs que f aux deux extrémités de ce segment.

La méthode d'approximation d'intégrale ainsi dénommée repose sur le calcul de l'aire d'un trapèze sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b - a) \tag{3.1}$$

On utilise l'interpolation de Lagrange entre deux points $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

$$P_1(x) = f(a)\ L_0(x) + f(b)\ L_1(x) \tag{3.2}$$

on intègre les deux membres de l'équation précédente

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)\int_a^b L_0(x)dx\ + f(b)\int_a^b L_1(x)dx + E_T \tag{3.3}$$

calculons maintenant les deux intégrales. On a par définition des polynômes d'interpolation de Lagrange

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{x-b}{a-b} \\ L_1(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \end{cases}$$

l'intégration les deux polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$ est donné par

$$\int_a^b L_0(x)dx = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)dx = \frac{b-a}{2},$$

$$\int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)dx = \frac{b-a}{2},$$

donc l'expression 3.3 s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + E_T, \tag{3.4}$$

où E_T est l'erreur de la méthode, cette formule s'appele formule des trapèzes.

3.2.2 Formule généralisée des trapèzes

Considérons alors une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ de pas h. cette subdivision est définie par n telle que $h = \dfrac{b-a}{n}$ et par la suite de réels : "a, $a+h, ..., a+kh, ..., a+nh = b$" sur chaque intervalle $[a+kh, a+(k+1)h]$ où k est un entier compris entre 0 et $(n-1)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

d'aprés l'utilisation de la formule des trapèzes entre les deux points (x_i, x_{i+1})

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1})) + E_{T_i} \ ,$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n)) + nE_{T_i} \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)) + E_T, \end{aligned} \tag{3.5}$$

cette formule s'appele formule généralisée des trapèzes.

3.2.3 L'erreur de la méthode des trapèzes

La fonction f qui s'écrit :

$$f(x) = P_1(x) + \varepsilon_1(x)$$

On a

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx + \int_a^b \varepsilon_1(x)dx$$

tel que $\qquad \varepsilon_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}w(x) \qquad /\alpha \in [a,b]$ (voir chapitre d'interpolation)

avec $\quad w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Dans ce cas la méthode des trapèzes ($n = 1$) alors :

$$\varepsilon_1(x) = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$E_T = \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_2(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varepsilon_n(x)dx \simeq n\int_{x_0}^{x_1} \varepsilon_1(x)dx$$

$$E_T = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2}.n\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx$$

alors

$$E_T = -\frac{f^{(2)}(\alpha)}{12n^2}(b-a)^3 \tag{3.6}$$

Dans le cas générale, on ne peut pas calculer E_T puisque le variable α n'est pas définit, à partir de ça nous utilisons le majorant de l'erreur

si f est une fonction de classe $C^2 sur$ $[a,\, b]$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$$

où $\quad M_2 = \sup\limits_{[a,b]}\left|f^{\ (2)}(\alpha)\right|$

alors

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)) + \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \tag{3.7}$$

3.2.4 Exercice d'application de la méthode des trapèzes

Exercice :

On considère l'intégrale

$$I = \int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I.

2. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.

Solution :

1. La valeur exacte est $I = [\ln(x)]_{x=1}^{x=2} = \ln(2) - \ln(1) = ln(2)$.

2. La méthode des trapèzes composite à $(n+1)$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{h}{2}(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b)) \qquad avec \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Ici on a $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1, b = 2, n = 3$ d'où $h = \frac{1}{3}$ et on obtient

$$I \simeq \frac{1}{6}(f(1) + 2f(1 + 1/3) + 2f(1 + 2/3) + f(2)) = \frac{1}{6}(1/1 + 2 * 3/4 + 2 * 3/5 + 1/2) = \frac{21}{30} = 0.7.$$

3.2.5 Programme en Matlab de la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
& close\ all \\
f &= input('les\ valeurs\ de\ la\ fonction\ pour\ chaque\ abscice') \\
a &= input('la\ valeur\ \min imale\ d''intervalle') \\
b &= input('la\ valeur\ \max imale\ d''intervalle') \\
n &= length(f) - 1 \\
for\ i &= 0 : n \\
x(i+1) &= a + i * h \\
& end \\
h &= (b-a)/n \\
s &= 0; \\
for\ i &= 2 : n - 1 \\
s &= s + f(i) \\
& end \\
Itrap &= (h/2) * (f(1) + 2 * s + f(n))
\end{aligned}$$

3.3 Méthode de Simpson

3.3.1 Principe de la méthode

On remplace f sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme P de degré 2 au plus, qui prend les mêmes valeurs que f aux deux extrémités et au milieu de ce segment.

La méthode de Simpson consiste a grouper trois points consécutifs de la courbe M_i, M_{i+1}, M_{i+2} et de remplacer l'arc de la courbe passant par ces trois points par un arc de parabole.

Dans cette méthode on utilisons le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2, ce dernier est donné par :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i) \tag{3.8}$$

où $L_i(x)$: sont les polynôme de Lagrange qui défini par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{3.9}$$

Pour calculer l'intégrale de f en passant de calculer l'intégrale de polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + \int_a^b \varepsilon_2(x)\,dx$$

on pose : $a = x_0$, $b = x_2$,

$$\begin{cases} x_1 = a + h \\ x_2 = a + 2h \end{cases}$$

alors $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2} = \dfrac{a+b}{2}$

on a :

$$f(x) = P_2(x) + \varepsilon_2(x)$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i)$$

On va calculer les polynômes de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x - b)}{2h^2}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-a)(x-b)}{-h^2}$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0}^{1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{2h^2}$$

et l'intégrale de polynôme $P_2(x)$ devient :

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = f_0\int_a^b L_0(x)\,dx + f_1\int_a^b L_1(x)\,dx + f_2\int_a^b L_2(x)\,dx$$

où

$$\int_a^b L_0(x)\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_a^b \left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right]dx = \frac{h}{3}$$
$$\int_a^b L_1(x)\,dx = \frac{1}{-h^2}\int_a^b \left[(x-a)(x-b)\right]dx = \frac{4h}{3}$$
$$\int_a^b L_2(x)\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_a^b \left[(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]dx = \frac{h}{3}$$

avec $h = \dfrac{b-a}{2}$

on remplace ces équations dans l'équation d'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_a^b P_2(x)\,dx &= f_0\int_a^b L_0(x)\,dx + f_1\int_a^b L_1(x)\,dx + f_2\int_a^b L_2(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_2 \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)\end{aligned}$$

donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + \int_a^b \varepsilon_2(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + E_S \tag{3.10}$$

cette formule s'appelle formule de Simpson.

3.3.2 Formule généralisée de Simpson

On divisons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux : $[x_0, x_1] = [x_1, x_2] = \cdots = [x_{n-1}, x_n]$ en posant $n = 2k$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_n = x_{n-1} + nh$ avec $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{2k}$
on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&= \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_2(x)\,dx + E_s \\
&= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2i} + f_n\right) + E_s \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Alors, la formule d'approximation de Simpson est :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i\ impaire} f_i + 2\sum_{i\ paire} f_i + f_n\right] + E_s \qquad (3.12)$$

3.3.3 L'erreur de la méthode de Simpson

Si f possède une dérivée quatrième continue alors en posant $M = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}M$$

Démonstration

Posons $E = \int_a^b [f(t) - P_2(t)]\,dt$, de sorte que dans la formule ci-dessus, le premier membre est $|E|$

posons $m = \dfrac{a+b}{2}$ et considérons le polynôme $S(x) = P(x) + \dfrac{4}{(b-a)^2}\left[P'(m) - f'(m)\right]Q(x)$

où $Q(x) = (x-a)(x-m)(x-b)$.

En a, m et b le polynôme S prend les mêmes valeurs que f. De plus, on a

$$Q(m) = (m-a)(m-b) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) = -\frac{(b-a)^2}{4}$$

donc $S'(m) = f'(m)$, le polynôme Q est de degré 3 et s'annule en a, m et b donc :

$$\int_a^b Q(t)\,dt = 0$$

d'après la formule d'intégration exacte, il s'ensuit que P et S ont la même intégrale sur $[a, b]$, autrement dit :

$$E = \int_a^b [f(t) - S(t)]\, dt$$

Posons $q(x) = (x-a)(x-m)^2(x-b)$ et écrivons l'égalité précédente sous la forme :

$$E = \int_a^b q(t) \frac{f(t) - S(t)}{q(t)} dt \tag{3.13}$$

Dans l'intégrale, le quotient n'est a priori pas défini en a, b et m mais la fonction $f - S$ est dérivable et vaut 0 en a

donc $\dfrac{f(t) - S(t)}{t-a}$ tend vers la limite $f^{'}(a) - S'(a)$ quand t tend vers a, en donnant cette limite comme valeur en a au quotient, on obtient une fonction continue en a.

De même, la fonction $\dfrac{f(t) - S(t)}{t-a}$ se prolonge par continuité en b. Au point m, le développement limité d'ordre deux de la fonction $U = f - S$ s'écrit :

$$U(t) = U(m) + U^{'}(m)(t-m) + \frac{U''(m)}{2}(t-m)^2 + o\left[(t-m)^2\right]$$

$$= \frac{U''(m)}{2}(t-m)^2 + o\left[(t-m)^2\right]$$

car $U(m) = U'(m) = 0$. On voit que $\dfrac{U(t)}{(t-m)^2}$ tend vers $\left(\dfrac{1}{2}\right) U^{''}(m)$ quand t tend vers m, ce qui permet encore de prolonger par continuité la fonction $\dfrac{U(t)}{(t-m)^2}$ en m.

Finalement, la fonction $\dfrac{f(t) - S(t)}{q(t)}$ est continue en tout point de $[a, b]$

Les valeurs $q(t)$ étant négatives ou nulles, nous pouvons appliquer a l'intégrale (3.18) la proposition suivante.

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit w une fonction intégrable à valeurs positives ou nulles et d'intégrale strictement positive alors il existe un nombre $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b w(t) f(t)\, dt = f(c) \int_a^b w(t)\, dt$$

en choisissant $w(t) = -q(t)$ on obtient :

$$E = \frac{f(c) - S(c)}{q(c)} \int_a^b q(t)\, dt \tag{3.14}$$

où c est un nombre dans $[a, b]$.

En raisonnant comme dans le calcul de l'erreur d'interpolation, on montre que $f(c) - S(c) = \frac{f^{(4)}(d)}{4!} q(c)$ pour certain nombre $d \in [a, b]$.
D'autre part, en intégrant le polynôme $q(t)$
on a :

$$\int_a^b q(t)\, dt = -\frac{(b-a)^5}{120}$$

et en reportant dans (3.14), il vient

$$E = -\frac{f^{(4)}(d)}{4!} \frac{(b-a)^5}{12} \tag{3.15}$$

3.3.4 Exercice d'application de la méthode de Simpson

Exercice :

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I.
2. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode de Simpson avec $n = 5$ sous-intervalles.

Solution :

1. La valeur exacte est $I = [-1/x]_{x=1}^{x=2} = -1/2 + 1 = 1/2$.
2. La méthode de Simpson composite à $(n+1)$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i\,:\,impair}}^{n-1} f(a+ih) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i\,:\,pair}}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\Big) \qquad avec \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Ici on a $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 1, b = 2, n = 5$ d'où $h = \frac{1}{5}$ et on obtient

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{1}{15}\left(f(1) + 4f(1+1/5) + 2f(1+2/5) + 4f(1+3/5) + 2f(1+4/5) + f(2)\right) \\ &= \frac{1}{15}\left(1 + 4 * 25/36 + 2 * 25/49 + 4 * 25/64 + 2 * 25/81 + 1/4\right) = 0.48. \end{aligned}$$

3.3.5 Programme en Matlab de la méthode de Simpson

$$\begin{array}{rcl} & & clc \\ & & clear\ all \\ & & close\ all \\ f & = & input('les\ valeurs\ de\ la\ fonction\ pour\ chaque\ abscice') \\ a & = & input('la\ valeur\ \min imale\ d''intervalle') \\ b & = & input('la\ valeur\ \max imale\ d''intervalle') \\ n & = & length(f)-1 \\ h & = & (b-a)/n; \\ for\ i & = & 1:n+1 \\ x(i) & = & a+(i-1)*h \\ & & end \\ s1 & = & 0; \\ for\ i & = & 2:2:n-1 \\ s1 & = & s1+f(i); \\ & & end \\ s2 & = & 0; \\ for\ i & = & 3:2:n-2 \\ s2 & = & s2+f(i); \\ & & end \\ Isimpson & = & (h/3)*(f(1)+4*s1+2*s2+f(n)) \end{array}$$

3.4 Méthode de Newton

3.4.1 Principe de la méthode

Cette méthode regrouper quatre points de la courbe de la fonction f telle que :
$x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$ et $h = \dfrac{b-a}{3}$
alors : $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{b+3a}{3}$, $x_2 = \dfrac{a+2b}{3}$, $x_3 = b.$

On va utiliser dans cette méthode l'interpolation de Lagrange c'est-à-dire on remplace la fonction f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme de degré trois, puis on calcule l'intégrale de f.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré trois s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f_i = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_3(x) = f_0\int_a^b L_0(x)\,dx + f_1\int_a^b L_1(x)\,dx + f_2\int_a^b L_2(x)\,dx + f_3\int_a^b L_3(x)\,dx + \int_a^b \varepsilon_3(x)\,dx$$

où

$$\begin{gathered}
\int_a^b L_0(x) = \frac{1}{6h^3}\int_a^b \left[\left(x - \frac{b+2a}{3}\right)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)(x-b)\right] dx = \frac{3h}{8} \\
\int_a^b L_1(x) = \frac{1}{2h^3}\int_a^b \left[(x-a)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)(x-b)\right] dx = \frac{9h}{8} \\
\int_a^b L_2(x) = \frac{1}{-2h^3}\int_a^b \left[(x-a)\left(x - \frac{b+2a}{3}\right)(x-b)\right] dx = \frac{9h}{8} \\
\int_a^b L_3(x) = \frac{1}{6h^3}\int_a^b \left[(x-a)\left(x - \frac{b+2a}{3}\right)(x-b)\right] dx = \frac{3h}{8}
\end{gathered}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b P_3(x)\,dx + \int_a^b \varepsilon_3(x)dx \\
&= \frac{3}{8}h\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right] + \int_a^b E_N.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.4.2 Formule généralisée de Newton

On divisons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux $[x_0, x_3] = [x_3, x_6] = \cdots = [x_{n-3}, x_n]$ et on considère les erreurs entre les intervalles les aussi, avec : $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{3}$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x3} P_3(x)\,dx + \int_{x_3}^{x6} P_3(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} P_3(x)\,dx + E_N \\
&= \frac{3h}{8}\left[f_0 + 2\sum_{i=3k}^{n} f_i + 3\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3k}}^{n-1} f_i + f_n\right] + E_N.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

3.5 Méthode de Newton-Cotes

Dans la méthode de Newton-Cotes de rang n, qu'on désignera dans la suite par NC_n, on prend $n_i = n$ pour tout i, et les points $\xi_{i,j}$ $0 \le j \le n$, sont les points équidistants

$$\xi_{i,j} = x_i + j\frac{x_{i+1} - x_i}{n}$$

divisant $[x_i, x_{i+1}]$ en l sous-intervalles égaux. Pour déterminer la formule de quadrature élémentaire, on se ramène par changement de variable à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}] = [-1, 1]$, subdivisé par les points $\tau_j = -1 + j\dfrac{2}{n}$. Le polynôme d'interpolation d'une fonction $f \in C([-1,1])$ est donné par

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(\tau_j) L_j(x)$$

avec $L_j(x) = \prod_{k \neq j} \dfrac{x - \tau_k}{\tau_j - \tau_k}$ on a donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 2\sum_{j=0}^{n} w_j \ f(\tau_j)$$

avec $w_j = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_j(x)dx$.Par suite de la symétrie des points τ_j autour de 0, on a

$$\tau_{n-j} = -\tau_j, \quad L_{n-j}(x) = L_j(-x), \quad w_{n-j} = w_j$$

pour $l = 2$ par exemple, il vient

$$\tau_0 = -1, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1, \quad L_1(x) = 1 - x^2 \quad w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \frac{2}{3}$$

d'où $w_0 = w_2 = \dfrac{1}{2}(1 - w_1) = \dfrac{1}{6}$. Après changement de variable, les coefficients w_j restent inchangés, donc on obtient les formules

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq (x_{i+1} - x_i)\sum_{j=0}^{l} w_j \ f(\xi_{i,j})$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1}(x_{i+1} - x_i)\sum_{j=0}^{l} w_j \ f(\xi_{i,j})$$

Si $f \in P_n$, alors $P_n = f$, donc la méthode de Newton-Cotes de rang n est d'ordre $\geq n$.

De plus, lorsque $f \in C([-1,1])$ est un polynôme impaire, on a

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 = 2\sum_{j=0}^{l} w_j \ f(\tau_j)$$

Si n est paire, les formules sont donc encore exactes pour $f(x) = x^{n+1}$, et plus généralement pour $f \in P_{n+1}$ par linéarité.

On démontre en fait le résultat suivant que nous admettrons :

Proposition

Si n est pair, l'ordre de NC_n est $n + 1$

Si n est impair, l'ordre de NC_n est n

Les valeurs de w_j pour les degrés $n \leq 7$ sont

Méthode	n	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	(NC_n)	$E_{loc}(h)$	$E_{glob}(h)$
trapèzes	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$1 \sim$	$f^{(2)}h^3 \sim$	$(b-a)f^{(2)}h^2$
Si*mpson*	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$					$3 \sim$	$f^{(4)}h^5 \sim$	$(b-a)f^{(4)}h^4$
Newton	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$3 \sim$	$f^{(4)}h^5 \sim$	$(b-a)f^{(4)}h^4$
Boole−Vilarceau	4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$			$5 \sim$	$f^{(6)}h^7 \sim$	$(b-a)f^{(6)}h^6$
Weddle−Hardy	6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$	$7 \sim$	$f^{(8)}h^9 \sim$	$(b-a)f^{(8)}h^8$

Pour $n \geq 8$, il apparaît des coefficients $w_j < 0$, ce qui a pour effet de rendre les formules boucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis. Les méthodes NC_n ne sont donc utilisées en pratique que dans les cas ci-dessus.

Remarque

Les formules des trapèzes, de Simpson et de Newton sont des cas particulières des formules de Newton-Cotes.

3.5.1 Exercice d'application de la méthode de Newton

Exercice :

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode de Newton avec $n = 5$ sous-intervalles.

Solution :

La méthode de Newton composite à $(n+1)$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{3h}{8}(f(a)+2 \sum_{i=1,\ i=3k}^{n-1} f(a+ih)+3 \sum_{i=1,\ i\neq 3k}^{n-1} f(a+ih)+f(b)) \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Ici on a $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 5$ d'où $h = \frac{1}{5}$ et on obtient
$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{8}{5}$, $x_4 = \frac{9}{5}$, $x_5 = 2$, et

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{1}{8}(f(1) + 3 * f(1 + 1/5) + 3 * f(1 + 2/5) + 2 * f(1 + 3/5) + 3 * f(1 + 4/5) + f(2)) \\ &= \frac{3}{40}(1 + 3 * 25/36 + 3 * 25/49 + 2 * 25/64 + 3 * 25/81 + 1/4) = 0.492834. \end{aligned}$$

3.5.2 Programme en Matlab de la méthode de Newton

$$\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
f &= input('les\ valeurs\ de\ la\ fonction\ pour\ chaque\ abscice') \\
a &= input('la\ valeur\ \min imale\ d''intervalle') \\
b &= input('la\ valeur\ \max imale\ d''intervalle') \\
n &= length(f) - 1 \\
h &= (b-a)/n; \\
for\ i &= 1 : n+1 \\
x(i) &= a + (i-1) * h \\
& end \\
s1 &= 0; \\
for\ i &= 4 : 3 : n-1 \\
s1 &= s1 + f(i); \\
& end \\
s2 &= 0; \\
for\ i &= 1 : n-1 \\
s2 &= s2 + f(i); \\
& end \\
Inewton &= (3 * h/8) * (f(1) - s1 + 3 * s2 + f(n))
\end{aligned}$$

3.6 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss est une méthode qui permet de calcul l'intégrale par une somme pondéré prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration.

Cette méthode est une méthode de quadrature pour un polynôme de degré $2n-1$ avec n points pris sur le domaine d'intégration.

Si ce dernier est $]a,b[$ (pas nécessairement ouvert), la méthode est de la forme :

$$\forall P \in R_{2n-1}, \qquad \int_a^b P(x)\,\pi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ P(x_k) \tag{3.18}$$

où

$\pi(x) :]a,b[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction de pondération.

λ_k : sont appelé les coefficients de quadrature.

x_k : sont des réels distincts unique et sont les racines de polynômes orthogonaux.

Dans ce qui suit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux associé à la fonction de pondération avec P_n de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n, on note :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^k$$

avec $\alpha_n^{(n)} > 0$
la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_{-1}(x) = 0 \quad , \quad P_0(x) = \alpha_0^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b \pi(x)dx}} \\ b_{n+1}P_{n+1}(x) + a_nP_n(x) + b_nP_{n-1}(x) = xP_n(x) \qquad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = -\dfrac{\alpha_0^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}} & b_0 = 0 \\ a_n = \dfrac{\alpha_{n-1}^{(n)}}{\alpha_n^{(n)}} - \dfrac{\alpha_n^{(n+1)}}{\alpha_{n+1}^{(n+1)}} & b_n = \dfrac{\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{\alpha_n^{(n)}} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n a n racines distinctes dans $I =]a, b[$.

3.6.1 Comment calculer l'intégrale

Pour calculer l'intégrale, il faut déterminer les réels x_k et les coefficients λ_k.

Lemme 01 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe des coefficients réels λ_k $(1 \leq k \leq n)$ tels que la condition (3.18) soit vérifié si et seulement si les réels x_k $(1 \leq k \leq n)$ sont les racines du polynôme P_n.

Démonstration

Supposons qu'il existe des coefficients λ_k $(1 \leq k \leq n)$ tels que la condition (3.18) soit vérifié.

On désigne par W_n le polynôme unitaire de degré n qui s'annule en chacun des x_k $(1 \leq k \leq n)$.

Soit $W_n = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$

Pour tout polynôme $Q \in R_{n-1}[x]$, on a $W_nQ \in R_{2n-1}[x]$

et

$$\langle W_n \mid Q\rangle = \int_a^b W_n(x)\, Q(x)\, \pi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k W_n(x_k)\, Q(x_k) = 0$$

c'est à dire que W_n est orthogonal à $R_{n-1}[x]$, ce polynôme de degré n est donc proportionnel à P_n, et les x_k $(1 \leq k \leq n)$ sont des racines de P_n.

Réciproquement

Supposons que les x_k $(1 \leq k \leq n)$ soit les racines de P_n.

Par division euclidienne, tout polynôme $P \in R_{2n-1}[x]$ s'écrit sous la forme

$$P = QP_n + R$$

avec Q, R dans $R_{n-1}[x]$ et on a :

$$\int_a^b P(x)\, \pi(x)\, dx = \langle P_n \mid Q\rangle + \int_a^b R(x)\, \pi(x)\, dx = \int_a^b R(x)\, \pi(x)\, dx$$

puisque $P_n \in (R_{n-1}[x])^{\perp}$, en remarquant que :
$P(x_k) = R(x_k)$ pour tout k compris entre 1 et n

On déduit qu'il nous suffit de montre que (3.18) est verifié sur $R_{n-1}[x]$ ce qui équivaut à prouver l'existence des coefficients λ_k $(1 \leq k \leq n)$ solution du système linéaire de n équation à n inconnues :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i)^{k-1} \lambda_i = \int_a^b x^{k-1} \pi(x)\, dx \quad (1 \leq k \leq n)$$

le déterminant de ce système étant $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$ on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution λ_k les coefficients λ_k $(1 \leq k \leq n)$ qu'est définie sont appelé coefficients de Christoffel associés à la fonction poids π et à l'intervalle I.

On suppose dans ce qui suit que pour $n \geq 1$, les réels x_k sont les racines du polynôme P_n et on désigne par $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base de Lagrange de $R_{n-1}[x]$ définie par :

$\forall\ k \in \{1...n\}$

$$\begin{cases} L_k \in R_{n-1}[x] \\ L_k(x_i) = \begin{cases} 0\ si\ i \neq k \\ 1\ si\ i = k \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

cette base est également définie par :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) = \frac{P_n(x)}{(x - x_k) P_n'(x_k)} \quad (1 \leq k \leq n) \tag{3.20}$$

le résultat qui suit nous donne une formule explicite des coefficient de Christoffel.

Lemme 2 :

Pour tout k compris entre 1 et n on a

$$\lambda_k = \frac{1}{b_n} \frac{1}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)}$$

Démonstration

Pour tout k compris entre 1 et n, on a :

$$\int_a^b L_k(x)\,\pi(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_k(x_i) = \lambda_k$$

soit :

$$\lambda_k = \frac{1}{P'_n(x_k)} \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_k}\ \pi(x)dx \tag{3.21}$$

en utilisant l'identité de Darboux-Christoffel [4], on a :

$$(x - x_k) \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\,P_i(x_k) = -b_{n+1} P_n(x)\,P_{n+1}(x_k)$$

ce qui donne, pour $x \neq x_k$:

$$\frac{P_n(x)}{x - x_k} = -\frac{1}{b_{n+1}} \frac{1}{P_{n+1}(x_k)} \sum_{i=0}^{n} P_i(x)P_i(x_k)$$

on remplace cette équation dans l'equation(3.21), on obtient

$$\lambda_k = -\frac{1}{b_{n+1}} \frac{1}{P_{n+1}(x_k)P'_n(x_k)} \sum_{i=0}^{n} \frac{P_i(x_k)}{\alpha_0^{(0)}} \langle P_i \mid P_0 \rangle$$

tenant compte de l'orthogonalité de la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ on en déduit que :

$$\lambda_k = -\frac{1}{b_{n+1}} \frac{1}{P_{n+1}(x_k)P'_n(x_k)}$$

d'autre part, en utilisant la relation de récurrence(3.19) on a :

$$b_{n+1} P_{n+1}(x_k) + b_n\ P_{n-1}\ (x_k) = 0$$

soit :

$$b_{n+1} = -b_n \frac{P_{n-1}(x_k)}{P_{n+1}(x_k)}$$

et

$$\lambda_k = \frac{1}{b_n} \frac{1}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)}$$

3.6.2 Généralisation pour un intervalle fermé

Le domaine d'intégration $[a, b]$ doit être changer (changement de variable) en $[-1, 1]$ avant d'appliquer les méthodes de Gauss.

Le changement se déroule ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2})dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} g(x)dx \tag{3.22}$$

On peut écrire l'approximation de la valeur de l'intégrale comme suit :

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \; g(x_k) + E$$

tel que E est l'erreur de la méthode de Gauss.

3.6.3 Les défférent types de la méthode de Gauss

Pour chaque forme d'intégrale il existe une famille de polynômes orthogonaux, donc des points d'interpolation $(x_i,\, i = 1, ..., n)$ et des coefficients $(\lambda_i,\, i = 1, ..., n)$ et des fonctions de poids qui permet de calculer l'intégrale.

Méthode de Gauss-Tchebycheff

la fonction de poids est : $\pi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

l'intervalle considéré est : $]-1,1[$

les polynômes orthogonaux sont :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \quad \vdots \\ \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) = \cos(n \;\arccos(x)) \end{cases} \tag{3.23}$$

cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + E \tag{3.24}$$

Méthode de Gauss-Laguerre

La fonction de poids est : $\pi(x) = e^{-x}$

l'intervalle considéré est : $]0, +\infty[$

les polynômes orthogonaux sont :

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = 1 - x \\ \quad \vdots \\ L_n(x) = \dfrac{2n-1-x}{n} L_{n-1}(x) - \dfrac{n-1}{n} L_{n-2}(x) \end{cases} \tag{3.25}$$

cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + E \tag{3.26}$$

Méthode de Gauss-Legendre

La fonction de poids est : $\pi(x) = 1$
l'intervalle considéré est : $]-1, 1[$
les polynômes orthogonaux sont :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ \quad \vdots \\ P_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n+1} \left((2n+1)\ x\ P_n(x) - n\ P_{n-1}(x)\right) \forall n > 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + E \tag{3.28}$$

Méthode de Gauss-Hermite

La fonction de poids est : $\pi(x) = e^{-x^2}$
l'intervalle considéré est : $]-\infty, +\infty[$
les polynômes orthogonaux sont :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = x \\ \quad \vdots \\ H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x) \end{cases} \tag{3.29}$$

cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme :

$$\int_a^b e^{-x^2} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + E \tag{3.30}$$

3.7 Majoration de l'erreur de Gauss

On se donne une fonction f dans $C(]a,b[)$ tel que l'intégrale $\int_a^b f(t)\pi(t)dt$ soit convergente, et pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$E_n(f) = \int_a^b f(t)\pi(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Cette expression est l'erreur de Gauss

Théorème :

Si $f \in \mathrm{C}^{2n}(]a,b[)$ est telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\pi(t)dt$ est convergente et $f^{(2n)}$ est bornée sur]a,b[alors :

$$|E_n(f)| \leq \frac{\left\| f^{(2n)} \right\|_\infty}{(2n)!(\alpha_n^{(n)})^2} = \frac{\sup\limits_{x\in]a,b[} \left| f^{(2n)}(x) \right|}{(2n)!(\alpha_n^{(n)})^2} \tag{3.31}$$

Démonstration :

On désigne par H_{2n-1} le polynôme d'interpolation d'Hermite définie par :

$$\begin{cases} H_{2n-1} \in R_{2n-1}[x] \\ \qquad H_{2n-1}(x_k) = f(x_k),\ H'_{2n-1}(x_k) = f'(x_k), \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

en considérant que

$$\int_a^b H_{2n-1}(t)\ \pi(t)\ dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ H_{2n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ f(x_k)$$

on déduit que l'erreur de quadrature dans la méthode de Gauss est donnée par :

$$E_n(f) = \int_a^b f(t)\ \pi(t)\ dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ H_{2n-1}(x_k) = \int_a^b (f(t) - H_{2n-1}(t))\pi(t)dt \tag{3.32}$$

d'autre part, on sait que pour $f \in C^{2n}(]a,b[)$, l'erreur d'interpolation d'Hermite est de la forme :

$$f(x) - H_{2n-1}(x) = \frac{f^{(2n)}(c_x)}{(2n)!(\alpha_n^{(n)})^2}(P_n(x))^2$$

où $c_x \in]a,b[$ et pour $f^{(2n)}$ bornée sur $]a,b[$, on en déduit que :

$$|E_n(f)| \leq \frac{\left\|f^{(2n)}\right\|_\infty}{(2n!)(\alpha_n^{(n)})^2}\left\|P_n\right\|^2 = \frac{\sup\limits_{x\in]a,b[}\left|f^{(2n)}(x)\right|}{(2n)!(\alpha_n^{(n)})^2}$$

3.7.1 Exercice d'application de la méthode de Gauss

Exercice :

En utilisant la méthode de Gauss ($n = 2$), trouver la valeur approchée de $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)dx$.

Solution :

On a $\int\limits_a^b f(y)dy = \frac{b-a}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\ f(y_i)$, où $y_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_i$ et les x_i sont les racines du polynome de Legendre.

Pour $n = 2$ on a : $x_1 = 0.5773$, $x_2 = -0.5773$, $A_1 = A_2 = 1$.

$\int\limits_0^{\pi/2} f(y)dy = \frac{\pi/2-0}{2}(A_1 f(y_1) + A_2 f(y_2))$ où $y_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x_1$ et $y_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x_2$

$y_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(0.5773) = 1.2388$ d'où $f(y_1) = 0.9454$

$y_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(-0.5773) = 0.3320$ d'où $f(y_2) = 0.3259$

donc

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin(y)dy = \frac{\pi}{4}(0.9454 + 0.3259) = 0.9985$$

3.7.2 Programme en Matlab de la méthode de Gauss

$$
\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
& close\ all \\
t &= input('les\ valeurs\ des\ abscices') \\
w &= input('lesvaleursdewi') \\
a &= input('la\ valeur\ \min imale\ d''intervalle') \\
b &= input('la\ valeur\ \max imale\ d''intervalle') \\
n &= length(t) \\
for\ i &= 1:n \\
f(i) &= t(i)\hat{}2 - t(i) + 2. \\
& end \\
s &= 0; \\
for\ i &= 1:n \\
s &= s + w(i) * f(i); \\
& end \\
Igauss &= ((b-a)/2) * s
\end{aligned}
$$

3.8 Série des exercices

Exercice 3 - 1 :

En utilisant la table ci-dessous, calculer $\int_a^b f(x)dx$ par :

1- la méthode du trapèze
2- par la méthode de Simpson

x	1.1	1.3	1.5
$f(x)$	3.0042	3.6693	4.4817

Exercice 3 - 2 :

Soient les données suivantes :

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$f(x)$	1.543	1.811	2.151	2.577	3.107

Trouver la valeur approchée de $\int_{1.0}^{1.8} f(x)dx$, en utilisant :

1- la méthode du trapèze généralisée.
2- la méthode de Simpson généralisée.

Exercice 3 - 3 :

On définit la fonction $g(x) = \frac{1}{1-x}$

a- Calculer $F(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt$, $x < 1$, et quelle est la valeur de $F(x)$ en $x = 2/3$?

b- Donner le degré et l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole $g(x)$ aux points $0, 1/3$ *et* $2/3$.

c- Trouver des coefficients c_0, c_1 *et* c_2 tels que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, on ait $\int\limits_0^2 P(x)\,dx = c_0 P(0) + c_1 P(1) + c_2 P(2)$.

d- En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précédente les coefficients d_0, d_1 *et* d_2 tels que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$\int\limits_0^{2/3} Q(x)\,dx = d_0 Q(0) + d_1 Q\left(\frac{1}{3}\right) + Q_2 P\left(\frac{2}{3}\right)$.

Utiliser cette formule pour donner une valeur approchée de $\ln(3)$.