

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

2.1 Introduction

L'interpolation polynomiale est d'une grande importance dans l'analyse numérique : dérivation et intégration, résolution des équations différentielles,...etc. Jusqu'à maintenant on était concerné par le problème : trouver x tel que $f(x) = 0$, où f est connue : application linéaire ou non linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. Par contre dans le présent chapitre la fonction f n'est pas connue, sauf en certaines points, sur tout le domaine de définition de f . notre but est donc construire une "bonne approximation" de f à partir d'un nombre fini d'informations sur celle-ci voici un problème d'interpolation : un certain pays recense sa population tous les dix ans. La table ci dessous résume les résultats des recensements survenus dans la période :

Année	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Populations en millions	12.567	14.658	17.354	20.132	21.456	24.089

Question : En analysant ces données, peut on savoir quelle était la population en 2020 ou quelle sera la population en l'an 2030 ? Ce problème est un problème d'interpolation.

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les fonctions polynômes. Il est important de savoir approximer une fonction arbitraire par des polynômes. Dans ce cadre, l'un des outils de base est la méthode d'interpolation de Lagrange.

2.2 Méthode d'interpolation de Lagrange

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On se donne $(n + 1)$ points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $[a, b]$, deux à deux distincts, non nécessairement rangés par ordre croissant. on a donc $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$

2.2.1 Existence et unicité du polynôme d'interpolation

Problème :

Existe-t-il un polynôme de degré inférieure ou égale à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \quad (2.1)$$

un tel polynôme sera appelé polynôme d'interpolation (de Lagrange) de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Posons

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.2)$$

où le produit est effectué sur les indices j tels que $0 \leq j \leq n, j \neq i$. Il est clair que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (2.3)$$

Le problème ci dessus admet donc au moins une solution

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (2.4)$$

Théorème 2.1 *Le problème d'interpolation $P_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$, admet une solution et une seule, donnée par la formule précédente (2.4). Il reste à prouver l'unicité. Supposons que $Q_n(x)$ soit une autre solution du problème. Alors $P_n(x_i) = Q_n(x_i) = f(x_i)$, donc x_i racine de $Q_n - P_n$. Par suite le problème $w(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ divise $Q_n - P_n$. Comme $\deg(w(x)) = n + 1$ et $\deg(Q_n - P_n) = n$, la seule possibilité est que $Q_n - P_n = 0$ donc $Q_n = P_n$.*

Remarques :

1 - On a $w(x) = (x - x_i) \prod_{i=0, j \neq i}^n (x - x_j)$ d'où $w'(x) = \prod_{j \neq i}^n (x - x_j)$, alors les polynômes de Lagrange s'écrit comme :

$$L_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i) w'(x_i)} \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.5)$$

2 - Pour démontrer le théorème précédent, on peut également poser $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ et résoudre un système linéaire de $(n + 1)$ équations

$$\sum_{j=0}^n a_j x_i^j = f(x_i) \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.6)$$

en les $(n + 1)$ inconnues $a_0, a_1, \dots, a_n$. Le déterminant du système est un déterminant dit de Van der Monde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Il s'agit de montrer que $\Delta \neq 0$ car les x_i sont distincts. D'où, le polynôme d'interpolation existe et unique.

2.2.2 Détermination pratique des polynômes de Lagrange

La détermination de $(n + 1)$ polynômes $L_i(x)$ peut être conduite de la façon suivante : on dresse le tableau carré

$$\begin{array}{cccccc} (x - x_0) & (x_0 - x_1) & (x_0 - x_2) & (x_0 - x_3) & \cdots & (x_0 - x_n) \\ (x_1 - x_0) & (x - x_1) & (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_0) & (x_2 - x_1) & (x - x_2) & (x_2 - x_3) & \cdots & (x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n - x_0) & (x_n - x_1) & (x_n - x_2) & (x_n - x_3) & \cdots & (x - x_n) \end{array}$$

et on voit que

$$L_i(x) = \frac{\text{Le produit des termes diagonaux du tableau}}{\text{Le produit des termes de la } (i + 1) \text{ ième ligne du tableau}}$$

2.2.3 Exercices d'application de la méthode de l'interpolation de Lagrange

Exercice 1 :

- Calculer a) $\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$, b)- $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Solution 1 :

$$\begin{aligned} \text{a)- } \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} &= \prod_{i>j}^n (x_i - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \text{b)- } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} &= (1 - 2)(3 - 1)(3 - 2) = -2. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Déterminer les 5 polynômes $L_i(x)$ attachés aux valeurs $x_0 = 0, x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 2$, et $x_4 = 1$.

Solution 2 :

Considérons le tableau ci-après

$$\begin{array}{ccccc} x & -4 & 4 & -2 & -1 \\ 4 & x - 4 & 8 & 2 & 3 \\ -4 & -8 & x + 4 & -6 & -5 \\ 2 & -2 & 6 & x - 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & -1 & x - 1 \end{array}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{x(4)(-4)(2)(1)} = -\frac{1}{32}x^4 + \frac{3}{32}x^3 + \frac{7}{16}x^2 - \frac{3}{2}x - 1. \\
L_1(x) &= \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{(4)(x-4)(8)(2)(3)} = \frac{1}{192}x^4 + \frac{1}{192}x^3 - \frac{5}{96}x^2 + \frac{1}{24}x. \\
L_2(x) &= \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{(-4)(-8)(x+4)(-6)(-5)} = \frac{1}{960}x^4 - \frac{7}{960}x^3 + \frac{7}{480}x^2 - \frac{1}{120}x. \\
L_3(x) &= \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{(2)(-2)(6)(x-2)(1)} = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x. \\
L_4(x) &= \frac{x(x-4)(x+4)(x-2)(x-1)}{(1)(-3)(5)(-1)(x-1)} = \frac{1}{15}x^4 - \frac{2}{15}x^3 + \frac{16}{15}x^2 - \frac{32}{15}x.
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Cas particuliers des polynômes d'interpolation pour $n = 1$ et $n = 2$.

Solution 3 :

Pour $n = 1$

Le polynôme d'interpolation d'ordre 1 s'écrit

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

c'est l'équation d'une droite passant par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) donnés.

Pour $n = 2$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

qui l'équation d'une parabole qui passe par les trois points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) .

Exercice 4 :

Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $y = f(x) = \sin(\pi x)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$ et $x_2 = 1/2$.

Solution 4 :

Dans ce cas $n = 2$ et nous devons chercher un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 de la forme :

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

comme $y_0 = f(x_0) = 0$, $y_1 = f(x_1) = 1/2$ et $y_2 = f(x_2) = 1$; alors $P_2(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2$.

2.2.4 Programme en Matlab de la méthode de l'interpolation de Lagrange

Soit $(n + 1)$ points $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ données pour déterminer le polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n .

```

clc
clear all
x = input('le vecteur des abscices')
f = input('le vecteur des images pour chaque abscice')
syms t
n = length(x);
s = 0;
for i = 1 : n
    p = 1;
    for j = 1 : n
        if j ~= i
            p = p * (t - x(j)) / (x(i) - x(j));
        end
    end
    s = s + p * f(i);
end
pn(t) = s

```

2.3 Méthode d'interpolation de Newton

Nous pouvons utiliser autre méthode plus simple et efficace permettant de calculer les polynômes d'interpolation de f .

Soit P_n le polynôme d'interpolation de f aux $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

2.3.1 Différence divisée

On désigne par $\delta[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] f$ le coefficient directeur du polynôme P_n (=coefficient de x^n dans $P_n(x)$).

alors $P_n - P_{n-1}$ est un polynôme de degré $\leq n$ s'annulant aux points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ et admettant $\delta[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] f$ pour coefficient directeur. Par suite :

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = \delta[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] f (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Comme $P_0(x) = f(x_0)$, on en déduit la formule fondamentale

$$P_n(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^n \delta[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] f (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \quad (2.7)$$

Pour pouvoir comment exploiter cette formule, il reste bien entendu à évaluer les coefficients $\delta[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] f$, on utilise une relation de récurrence sur le nombre k de point x_i , où $\delta[x_0] f = f(x_0)$

pour $k \geq 1$, on a :

$$\delta [x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] f = \frac{\delta [x_1, x_2, \dots, x_k] f - \delta [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}] f}{x_k - x_0} \quad (2.8)$$

A cause de cette formule, la quantité $\delta [x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] f$ est appelée différence divisée d'ordre k de f aux points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$.

Pour calculer la différence divisée d'ordre n de la fonction f aux points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, on forme le tableau suivant en appliquant la formule de récurrence précédente colonne après colonne

x_i	f_i	δ_1	δ_2	δ_3	$\dots$	$\dots$	δ_n
x_0	f_0	$\delta [x_0, x_1] f$	$\delta [x_0, x_1, x_2] f$	$\delta [x_0, x_1, x_2, x_3] f$	$\dots$	$\dots$	$\delta [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] f$
x_1	f_1	$\delta [x_1, x_2] f$	$\delta [x_1, x_2, x_3] f$	$\delta [x_1, x_2, x_3, x_4] f$	$\dots$		
x_2	f_2	$\delta [x_2, x_3] f$	$\delta [x_2, x_3, x_4] f$	$\delta [x_2, x_3, x_4, x_5] f$			
x_3	f_3	$\delta [x_3, x_4] f$	$\delta [x_3, x_4, x_5] f$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$\vdots$	$\vdots$	$\delta [x_{n-1}, x_n] f$					
x_n	f_n						

D'après la formule (2.7), nous pouvons écrire la formule suivante pour $(n+1)$ points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P_n(x) = f_0(x) + \delta [x_0, x_1] f (x - x_0) + \delta [x_0, x_1, x_2] f (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \delta [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] f (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (2.9)$$

cette formule s'appelle la formule de Newton pour le polynôme d'interpolation.

2.3.2 Cas où les points d'interpolation sont équidistants

On considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas constant $h = \frac{b-a}{n}$. Les points d'interpolation sont donc $x_i = a + i h$, $0 \leq i \leq n$.

Différences finies progressives

On note $f_i = f(x_i)$ les valeurs de f correspondante et on introduit un opérateur noté Δ , appelée opérateur aux différences finies progressives défini par :

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i \\ \Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) \\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \end{aligned} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

Dans le cas général nous pouvons écrire :

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq i \leq n-k$$

où l'on convient que $\Delta^0 f_i = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Il est alors facile de montrer par récurrence que les différences divisées sont données par :

$$\delta [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] f = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k}$$

Récrivons avec ces notations la formule fondamentale (2.7). Pour $x \in [a, b]$, effectuons le changement de variable $x = a + s h$, $s \in [0, n]$.

On a alors

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) = h^k s(s-1)(s-2) \cdots (s-(k-1))$$

On obtient la formule de Newton suivante :

dans laquelle $s = (x - a) / h$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!} s(s-1)(s-2) \cdots (s-(k-1)) \\ &= f_0 + s \Delta f_0 + s(s-1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s-1)(s-2) \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \cdots + s(s-1)(s-2) \cdots (s-(n-1)) \Delta^n f_0 \end{aligned}$$

Pour calculer les différences finis progressives $\Delta^k f_0$, nous utilisons le tableau suivant :

x_i	f_i	Δ_1	Δ_2	Δ_3	$\cdots$	$\cdots$	Δ_n
x_0	f_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\cdots$	$\cdots$	$\Delta^n f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\cdots$		
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\vdots$			
x_3	f_3	Δf_3	$\vdots$	$\Delta^3 f_{n-3}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 f_{n-2}$				
$\vdots$	$\vdots$	Δf_{n-1}					
x_n	f_n						

Différences finies régressives

Nous pouvons écrire aussi ce polynôme par la relation des différences finies régressives.

On note l'opérateur $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ $1 \leq i \leq n$

dans le cas général nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \nabla^k f_i &= \nabla^{k-1} (\nabla f_i) \\ &= \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1} \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

dans le cas général nous pouvons écrire :

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad k \leq i \leq n$$

où l'on convient que $\nabla^0 f_i = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Il est facile de montrer par récurrence que les différences divisées sont données par :

$$\delta [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] f = \frac{\nabla^k f_{i+k}}{k! h^k}$$

Récrivons avec ces notations la formule fondamentale (2.7). Pour $x \in [a, b]$, effectuons aussi le même changement de variable précédent $x = a + s h$, $s \in [0, n]$.

On a alors

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\nabla^k f_n}{k!} (s-n)(s-n+1)\cdots(s-n+k)$$

$$= f_0 + (s-n)\nabla f_n + (s-n)(s-n+1)\frac{\nabla^2 f_n}{2!} + \cdots + (s-n)(s-n+1)\cdots(s-n)\frac{\nabla^n f_n}{n!}$$

2.3.3 Exercice d'application de la méthode de l'interpolation de Newton

Exercice :

Soit $(n+1)$ points $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots$, et (x_n, f_n) données dans le tableau suivant :

x_i	-1	2	4	5
f_i	-2	43	213	376

déterminer le polynôme d'interpolation de degré inférieure ou égal à n par la méthode de Newton.

solution :

La table de différences divisées s'écrit :

x_i	f_i	δ_1	δ_2	δ_3
-1	-2	15	14	2
2	43	85	26	
4	213	163		
5	376			

On en déduit le polynôme d'interpolation de degré inférieure ou égal à n par la méthode de Newton :

$$P_3(x) = -2 + 15(x+1) + 14(x+1)(x-2) + 2(x+1)(x-2)(x-4)$$

$$= 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$$

2.3.4 Programme en Matlab de la méthode de l'interpolation de Newton

Soit $(n+1)$ points $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots$, et (x_n, f_n) données pour déterminer le polynôme d'interpolation de degré inférieure ou égal à n .

```

    clc
    clear all
    close all
    x = input('le vecteur des abscices')
    f = input('le vecteur des images pour chaque abscice')
    syms t
    n = length(x);
    for i = 1 : n
        y(i,1) = f(i)
    end
    for j = 2 : n
        for i = 1 : n - j + 1
            y(i,j) = (y(i+1,j-1) - y(i,j-1))/(x(i+j-1) - x(i));
        end
    end
    s = y(1,1)
    for j = 2 : n
        p = 1;
        for k = 1 : j - 1
            p = p * (t - x(k));
        end
        s = s + p * y(1,j);
    end
    pn(t) = s

```

2.4 Formule d'erreur d'interpolation

On va estimer l'erreur mathématique noté $E(x)$

$$E(x) = |f(x) - P_n(x)| \quad (2.10)$$

dans le cas où la fonction est supposée $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle de travail $[a, b]$ et où sa dérivée d'ordre $(n+1)$ est bornée.

Les points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines de la fonction $E(x)$ alors la formule de l'erreur s'écrit comme :

$$E(x) = C(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

nous calculons la constante C d'après la dérivée d'ordre $(n+1)$ de la formule (2.10)

$$E^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x)$$

cette formule est équivalent de $C(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi)$

et donc, par application du théorème de Rolle à la fonction E dans les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, il existe des points $(\alpha'_i)_{i=0, \dots, n-1}$, telle que $E'(\alpha'_i) = 0$.

On réitère le théorème de Rolle pour la fonction E' , puisque $E'(\alpha'_0) = E'(\alpha'_1) = E'(\alpha'_2) = \dots = E'(\alpha'_{n-1}) = 0$, pour avoir cette fois n points $(\alpha''_i)_{i=0, \dots, n-2}$ tels que $E''(\alpha''_0) = E''(\alpha''_1) = E''(\alpha''_2) = \dots = E''(\alpha''_{n-2}) = 0$, puis, de proche en proche, il existe un point $\xi \in]a, b[$ telle que

$$E^{(n+1)}(\xi) = C(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi)$$

alors la constante $C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, A partir de l'expression de la constante C nous écrivons l'expression de l'erreur

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \text{où } \xi \in]a, b[\quad (2.11)$$

Cette expression est l'erreur de l'interpolation du polynôme.

2.5 Série des exercices

Exercice 2 - 1 :

Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction aux points indiqués :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \exp(x), & x_0 = -1, x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \\ f(x) = \sin(\pi x), & x_0 = 0, x_1 = 1/2 \text{ et } x_2 = 1 \\ f(x) = x^3, & x_0 = -1, x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 1 \\ f(x) = 3x + 2, & x_0 = 0, x_1 = 1/2 \text{ et } x_2 = 1 \end{array}$$

Exercice 2 - 2 :

On considère la fonction définie par :

x_i	0	1	2	3
f_i	16	9	0	-5

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de f par la méthode de Lagrange.
2. Construire les tables des différences divisées et des différences finies de f .
3. En déduire le polynôme d'interpolation par la méthode de Newton.

Exercice 2 - 3 :

Montrer que les polynômes de Lagrange vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1 - & L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ 2 - & \sum_{i=1}^n L_i(x) = 1 \\ 3 - & L_i(x) = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x)} \quad \text{où } w(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) \end{array}$$

Exercice 2 - 4 :

Soit une fonction dont on connaît les valeurs $f_0, f_1, \dots, f_n$ en $(n+1)$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$.
Etablir par récurrence les expressions suivantes :

$$\frac{\nabla^k f_j}{k! h^k} = \delta(x_{j-k}, x_{j-k+1}, \dots, x_j) f$$

$$\delta(x_0, x_1, \dots, x_n) f = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0 \text{ et } j \neq k}^n (x_k - x_j)}$$

Exercice 2 - 5 :

On considère la fonction $f(x) = \exp(-x/10)$ définie sur l'intervalle $[0, 3]$ par la table de valeurs :

x_i	0	1	2	3
f_i	1	0.904837	0.818730	0.740818

1. Calculer à l'aide de la méthode d'interpolation de Lagrange, la valeur de $f(1.5)$.
2. Calculer l'erreur d'interpolation que l'on commet alors.
3. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par les points donnés ci-dessus par la formule de Newton progressive.

Exercice 2 - 6 :

1)- Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange en points $-1, 0, 1, 2$ de la fonction $f(x) = \cos(\pi x - \pi)$.

2)- Montrer que les polynômes de Lagrange satisfont aux $(n+1)$ équations suivantes :

$$\sum_{i=0}^n x_i^k L_i(x) = x^k, \quad k = 0, \dots, n \quad (2.12)$$

où les $x_i, i = 0, \dots, n$, sont $(n+1)$ valeurs données.

3)- En notant par $\pi(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, montrer que les coefficients de Lagrange sont donnés par : $L_j(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_j) \pi'(x_j)}$.