Chapitre 1

La résolution des équations non linéaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions quelques méthodes de résolution d'équations de la forme $f(x) = 0$. Etant donnée une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, nous cherchons des réels x dans $[a, b]$ satisfont $f(x) = 0$. On dit aussi, surtout lorsque f est un polynôme, que x est un zéro de f ou encore une racine de f. on connait des formules permettant de calculer explicitement les racines de tout polynôme de degré < 5 mais de telles formules n'existent par pour les polynômes de degré supérieur à 5.

L'équation $x - 0.5\sin(x) - 0.5 = 0$ (cet exemple est emprunté à Dion et Gaudet) admet une racine réelle au voisinage de 0.615.

Les méthodes qui permettent de calculer des valeurs approchées des zéros d'une fonction sont toutes basées sur la notion d'itération.

Elles engendrent une suite de valeurs qui quand tout va bien, converge vers le zéro cherché. Permis le grand nombre des méthodes disponibles pour chercher sue le zéro d'une fonction f, nous étudierons quatre méthodes :

1- Méthode de dichotomie ou bissection.

2- Les méthodes de la sécante et de Newton qui consistent à remplacer l'équation $f(x) = 0$ par un polynôme première degré.

3- La méthode du point fixe où des approximations successives.

1.2 Préliminaires : séparations des racines

Pour parler sur ce point, on utilise des exemples

Exemple 1.1 *résoudre* $x - 0.2\sin(x) - 0.5 = 0$ x *réel.*

Exemple 1.2 *résoudre* $cos(x) = \exp(-x)$ $\quad x$ *réel.*

Solution 1.1 *Le premier travail consiste en une analyse mathématique minimale pour séparer les racines, c'est à dire déterminer des intervalles* $[a_i,\ b_i]$ *dans lesquels l'équation considérée a une solution et une seule.*

La méthode la plus simple est d'utiliser qu'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $[a_i,\ b_i]$ *et telle que* $f(a_i)\, f(b_i) \leq 0$ *a un zéro et un seul dans l'intervalle* $[a_i,\ b_i]$.

Par exemple

$$f_1(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$$

$$f_1'(x) = 1 - 0.2\cos(x) \geq 0$$

pour tout x.

Donc $f_1$est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme $f_1(0) = -0.5 < 0$, $f_1(\pi) = \pi - 0.5 > 0$, f_1 a un unique zéro dans $[0,\ \pi]$.

Solution 1.2 *La même chose pour deuxième exemple :*

$f_2(x) = \cos(x) - \exp(-x)$, la dérivée $f_2'(x) = \sin(x) + \exp(-x)$ est du même type de la fonction, ne peut pas séparer les zéros par cette fonction. Cette situation est bien sur beaucoup plus fréquente, on peut alors :

a- Choisir autre fonction $f_3(x) = \exp(x)\cos(x) - 1$. Les zéros de f_3 sont exactement les solutions de l'exemple 02. D'autre part : $f_3'(x) = \exp(x)(\cos(x) - \sin(x)) = \sqrt{2}\exp(x)\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Ainsi f_3 est strictement monotones sur les intervalles du type $\left[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} + (k+1)\frac{\pi}{2}\right]$, k entier. L'étude des signes successifs de $f\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$ permet alors de localiser les zéros éventuels.

b- On peut procéder par tâtonnements en s'aidant au maximum d'information complémentaires disponibles. Ainsi, dans deuxième notre exemple, le tracé des représentations graphiques des fonctions $x \longrightarrow \cos(x)$ et $x \longrightarrow \exp(-x)$ est particulièrement suggestif.

Dans la suite, nous nous placerons le plus souvent dans le cas où $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un unique zéro dans l'intervalle $[a,\ b]$.

1.3 Méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie, basée sur le théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions continues est, en quelque sorte, ce nous pourrions appeler une méthode de calcul par tâtonnements organisés.

Théorème 1.1 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,\ b]$ *et telle que :* $f(a)\ f(b) < 0$ *, alors* f *a au moins une racine dans* $[a,\ b]$.

Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, où f est continue sur $[a,\ b]$ et $f(a)$ $f(b) < 0$ on procède de la manière suivante :

1- Divisons l'intervalle $[a,\ b]$ en deux intervalles égaux et posons $x_0 = (a+b)/2$.

2- La solution $\overline{x}$ se trouve dans l'un des deux intervalles. Pour savoir lequel, il suffit d'utiliser les conditions suivantes

a- Si $f(a)\ f(x_0) \leq 0$, alors $\overline{x} \in [a,\ x_0]$

b- Si $f(x_0)\ f(b) \leq 0$, alors $\overline{x} \in [x_0,\ b]$

3- Notons le nouvel intervalle contenant $\overline{x}$: $[a_1,\ b_1]$

où $a_1 = \begin{cases} a & \text{si } \overline{x} \in [a,\ x_0] \\ x_0 & \text{si } \overline{x} \in [x_0,\ b] \end{cases}$ et $b_1 = \begin{cases} x_0 & \text{si } \overline{x} \in [a,\ x_0] \\ b & \text{si } \overline{x} \in [x_0,\ b] \end{cases}$

en itérant ce procède, on obtient une suite de valeurs : $x_0 = (a_0 + b_0)/2, x_1 = (a_1 + b_1)/2, ...,$ $x_n = (a_n + b_n)/2$

La question qui pose maintenant : combien de fois devons nous répéter la division de l'intervalle par deux ?

A près n tours, la dichotomie définit l'intervalle minimum ε_n qui sera le dernier susceptible de modifier effectivement la valeur $\overline{x}$, c'est à dire : $\varepsilon_n = b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$

par récurrence nous obtenons

$$\varepsilon_n = (b-a)/2^n \tag{1.1}$$

et si $\overline{x}$ est la racine de l'équation $f(x) = 0$, nous obtenons :

$$|\overline{x} - x_n| \leq b_{n+1} - a_{n+1} = (b-a)/2^{n+1}$$

Ce qui revient à ce qu'on aille dans les itérations jusqu'à ce que n vérifier l'inégalité

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\log(2)} \tag{1.2}$$

Si $\varepsilon = 10^{-5}, b = 2, a = 1$ alors $n \geq 15.6$

C'est-à-dire le nombre d'itérations nécessaires $n = 16$

1.3.1 Exercice d'application de la méthode de dichotomie

Exercice :

Soit $f(x) = x^3 + 4\ x^2 - 10,\ x \in [1,\ 2]$. Trouver une valeur approchée de la solution $\overline{x}$ de $f(x) = 0$ par la méthode de dichotomie.

Solution :

Soit $f(x) = x^3 + 4\ x^2 - 10$ est continue sur $[1,\ 2]$ et $f(1)\ f(2) < 0$. donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe au moins un racine $\overline{x} \in [1,\ 2]$. tel que $f(\overline{x}) = 0$. Puisque f est une fonction croissante sur $[1,\ 2]$, $\overline{x}$ est donc la seule solution de $f(x) = 0$. Cherchons une approximation de celle-ci.

En appliquant l'algorithme de dichotomie, nous obtenons le tableau des valeurs suivant :

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	1	2	1.5	2.375
1	1	1.5	1.25	-1.79687
2	1.25	1.5	1.375	0.16211
3	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
4	1.125	1.375	1.34375	0.35098
5	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
6	1.359375	1.3671875	1.3671875	0.03236
7	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215

Apres 8 itérations on peut dire que $x_8 = 1.36328125$ approxime $\overline{x}$ avec une erreur $\varepsilon_7 = 0.00390625$ qui vérifient l'inégalité $|\overline{x} - x_n| \leq (b-a)/2^{n+1}$.

1- Cette dernière inégalité nous montre que lorsque $n \longmapsto +\infty$, $x_n \longmapsto \overline{x}$ solution de $f(x) = 0$.

2- Cette même inégalité nous permet d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour approcher $\overline{x}$ avec une précision donnée ε.

1.3.2 Programme en Matlab de la méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ telle que $f(a)\ f(b) < 0$ alors pour trouver une solution approchée de $f(x) = 0$ on procède le programme en Matlab suivant :

$$
\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
n &= input('la\ valeur\ \max imale\ de\ nombre\ d''iteration') \\
a &= input('la\ valeur\ \min imale\ d''intervalle') \\
b &= input('la\ valeur\ \max imale\ d''intervalle') \\
epsilon &= input('l''erreur\ de\ la\ méthode\ :') \\
& syms\ x \\
f &= x * \exp(x) - 1; \\
fa &= subs(f, x, a); \\
fb &= subs(f, x, b); \\
for\ \ i &= 1 : n \\
c &= (a+b)/2 \\
fc &= subs(f, x, c); \\
if\ \ fa * fc &< \ = 0 \\
b &= c \\
& else \\
a &= c \\
& end \\
if\ \ abs(b-a) &< \ = epsilon \\
& break \\
& end \\
& end \\
& c \\
& i
\end{aligned}
$$

1.4 Méthode de Newton

On cherche à évaluer numériquement la racine $\overline{x}$ d'une équation $f(x) = 0$, en supposant qu'on dispose d'une valeur grossière x_0 de cette racine.

L'idée est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe $y = 0$ est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

En générale x_1 est une meilleure approximation de $\overline{x}$ que x_0, on peut trouver cette expression a partir du théorème de Taylor.

Soit x_n la $n^{ième}$ itération approximant la solution exacte $\overline{x}$ de $f(x) = 0$, où $f \in C^2[a,\ b]$ et $f'(x_n) \neq 0$. alors d'après la formule de Taylor on a :

$$f(\overline{x}) = 0 = f(x_n) + (\overline{x} - x_n) f'(x_n) + (\overline{x} - x_n)^2 f''(\xi)/2$$

où ξ est un nombre compris entre $\overline{x}$ et x_n, cette dernière équation nous donne $\overline{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, c'est à dire que la $(n+1)^{ième}$ itération approximant $\overline{x}$ est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, ..., n$$

Cette suite, si elle converge, doit converger vers la solution $\overline{x}$ de $f(x) = 0$.

1.4.1 Exercice d'application de la méthode de Newton

Exercice :

Soit $f(x) = x^3 - 4\ x + 1,\ x \in [0,\ 1]$. Trouver une valeur approchée de la solution $\overline{x}$ de $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

Solution :

Par itération de l'algorithme de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 4x_n + 1}{3x_n^2 - 4} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 4}$$

i	x_i
0	0
1	0.25
2	0.254098361
3	0.254101688
4	0.254101688

Ceci donne une valeur approchée de $\overline{x}$ à 10^{-9} prés environ. Le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-9} par la méthode de Newton est typiquement 3 ou 4 $\left(10^{-2^3},\ 10^{-2^4}\right)$.

Remarque :

- Pratiquement, on arrête le processus itératif des que la différence, en valeur absolue, de deux approximations successives x_i et x_{i-1} ne dépasse pas une certaine précision ε imposée à l'avance. C'est à dire $|\overline{x} - x_n| \leq \varepsilon$.

1.4.2 Programme en Matlab de la méthode de Newton

Soit $f(x) = 0$ et x_0 une approximation de la solution exacte $\overline{x}$ de $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
x0 &= input('la\ valeur\ initiale =') \\
epsilon &= input('l''erreur\ de\ la\ méthode :') \\
& syms\ x \\
f &= x * \exp(x) - 1; \\
df &= diff(f, x); \\
for\ i &= 1 : 1000000 \\
f1 &= subs(f, x, x0); \\
df1 &= subs(df, x, x0); \\
x1 &= x0; \\
if(df1\tilde{} &= 0) \\
x0 &= x0 - f1/df1 \\
if(abs(x1 - x0) &< = epsilon \\
& break \\
& end \\
& end \\
& end
\end{aligned}$$

1.5 Méthode de la sécante

Dans certaines situations, la dérivée f' est très compliquée ou même impossible à expliciter (c'est le cas par exemple si la fonction f est le résultat d'un algorithme complexe). On ne peut alors utiliser telle quelle la méthode de Newton.

L'idée est de remplacer f' par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle.

Supposons qu'on dispose de deux valeurs approchées x_0, x_1 de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$. Dans un voisinage de l'intervalle $[x_0, x_1]$ on remplace le graphe de $f(x)$ par une droite qui joint les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ on peut espérer trouver une nouvelle approximation de la racine cherchée en assimilant celle-ci au point x_2 où la droite coupe l'axe des x :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\tau_1} \quad \text{où} \quad \tau_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{1.3}$$

En suite, partant de $x_1$et x_2, on calcule x_3, etc.

Dans le cas général, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.4}$$

où $\tau_n = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ s'appelle le taux d'accroissement de f sur l'intervalle $[x_n, x_{n-1}]$.

1.5.1 Exercice d'application de la méthode de la sécante

Exercice :
Résoudre l'équation $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1 = 0$ par la méthode de la sécante.
Solution :
L'équation $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1 = 0$ admet une et une seule racine $\overline{x}$ dans $[0,\ 1]$. En effet la fonction $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1$, nous utilisons l'algorithme de la sécante $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$, on obtient le tableau des résultats suivant

n	x_{n+1}	$x_n - x_{n-1}$
1	0.15	-1
2	0.5750592	0.4250592
3	0.7787569	0.2036977
4	0.8533380	0.0745812
5	0.8749467	0.0216086
6	0.8824870	0.0003733
7	0.8825820	0.0000950
8	0.8826062	0.0000242

1.5.2 Programme en Matlab de la méthode de la sécante

Soit f une fonction sur l'intervalle $[x_0,\ x_1]$ alors pour trouver une solution approchée de $f(x) = 0$ on procède :

$$\begin{array}{rcl} & & clc \\ & & clear\ all \\ n & = & input('le\ nombre\ d''interaction\ \max imale') \\ x0 & = & input('la\ valeur\ \min imale\ d''intervalle') \\ x1 & = & input('la\ valeur\ d''intervalle\ \max imale') \\ epsilon & = & input('erreur\ d''approximation') \\ f & = & x\hat{}2 - x + 1; \\ for\ i & = & 1 : n \\ fx1 & = & subs(f, x, x1); \\ fx0 & = & subs(f, x, x0); \\ x2 & = & (x0 * fx1 - x1 * fx0)/(fx1 - fx0); \\ x0 & = & x1; \\ x1 & = & x2; \\ if\ \ x1 - x0 & < & = epsilon \\ & & break \\ & & end \\ & & end \\ & & i \\ & & x2 \end{array}$$

1.6 Méthode du point fixe (des approximations successives)

Parmi les méthodes de résolution de l'équation $f(x) = 0$ la méthode dite des approximations successives (ou du point fixe) est la plus importe. Son principe est basé sur la construction d'une suite itérative approchant de plus en plus la racine exacte, son premier élément (appelé initialisation) pouvant être n'importe quel point de l'intervalle de travail $[a, b]$.

cette méthode consiste à :

1 - Remplacer l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalant $x = g(x)$.

2 - Créer la suite de nombres $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = g(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, ...)$ et x_0 est une approximation grossière de $\overline{x}$ solution de $f(x) = 0$.

3 - Prendre x_n, lorsque n est suffisamment grand, comme une approximation de la racine $\overline{x}$ solution de $f(x) = 0$.

Théorème 1.2 (***du point fixe***)

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé (non nécessairement borne) et g une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$. S'il existe un réel $k < 1$ tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y| \qquad x, y \in [a, b]$$

alors l'équation $x = g(x)$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. Cette solution est limite de la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

(on est libre de choisir n'import quel x_0 dans $[a, b]$. De plus, si $\overline{x}$ est la solution de l'équation $x = g(x)$ alors :

$$|\overline{x} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \qquad n \geq 1 \tag{1.5}$$

1.6.1 Exercice d'application de la méthode du point fixe

Exercice :
Résoudre $f(x) = x - \sin(x) - \frac{1}{4} = 0$ par la méthode du point fixe.
Solution :
L'équation $f(x) = 0$ équivalant autre équation $x = g(x) = \sin(x) + \frac{1}{4}$, donc l'algorithme s'écrit comme

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sin(x_n) + \frac{1}{4},$$

nous choisissons une valeur $x_0 \in [1, 2]$ pour calculer une valeur approchée de la valeur $\overline{x}$ solution de $f(x) = 0$. Les résultats s'écrit dans le tableau suivant

n	x_n
0	1
1	1.091471
2	1.1373063
3	1.1575053
4	1.165804
5	1.1704012
6	1.1709071
7	1.1711041
8	1.1712292

où n est le nombre des itérations et la solution approchée est $x_8 = 1.171292$
Remarques :
1- La suite de la méthode du point fixe n'est pas toujours converge et par conséquent la $n^{ième}$ itération ne peut pas être une bonne approximation de la racine $\overline{x}$. Donc pour rendre possible l'application de cette méthode, la fonction g doit satisfaire à certaines conditions que nous allons citer.
2- Soit $g : [a, b] \longmapsto [a, b]$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ et telle que : $|g'(x)| \leq k < 1 \, \forall \, x \in [a, b]$, alors la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 1, 2, ...$, converge indépendamment de la valeur initiale x_0 vers l'unique point fixe $\overline{x}$ de la fonction g.
+ L'inégalité nous permet d'estimer à l'avance le nombre d'itération pour approximer $\overline{x}$ avec une précision donnée ε.
+ Elle nous montre aussi que si $|k|$ est très inférieure à 1 la méthode des approximations successives converge rapidement.

+ Pratiquement, on arrête le processus itératif des que la différence, en valeur absolue, de deux approximations successives x_n et x_{n-1} ne dépasse pas une certaine précision ε imposée à l'avance, c'est à dire $|\overline{x} - x_n| \leq \varepsilon$.

1.6.2 Programme en Matlab de la méthode du point fixe

Soit l'équation $x = g(x)$ et une approximation grossière x_0, alors nous pouvons écrire le programme en Matlab suivant :

$$
\begin{aligned}
& clc \\
& clear\ all \\
x0 &= input('la\ valeur\ initiale\ =') \\
epsilon &= input('l''erreur\ de\ la\ méthode\ :') \\
& syms\ x \\
g &= \exp(-x); \\
dg &= diff(f, x); \\
for\ i &= 1 : 1000000 \\
g1 &= subs(g, x, x0); \\
dg1 &= subs(dg, x, x0); \\
x1 &= x0; \\
if(dg1\tilde{} &= 1) \\
x0 &= g1 \\
if(abs(x1 - x0) &< = epsilon \\
& break \\
& end \\
& end \\
& end
\end{aligned}
$$

1.7 Série des exercices

Exercice 1- 1 :
Séparer les racines réelles des équations
a- $f(x) = x^4 + 4x + 2$
b- $g(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 1$
c- $h(x) = x - \sin(x)$.
Exercice 1- 2 :
Séparer les racines réelles des équations graphiquement
a- $y(x) = x\log(x) - 1$
b- $k(x) = x\exp(x) - 1$
c- $z(x) = x + 2\exp(x)$.
Exercice 1- 3 :
Soit l'équation $f(x) = x^4 - 5x - 7$

a)- Trouver la racine négative par la méthode de DICHOTOMIE dans l'intervalle $[-2,-1]$, trouver le nombre d'itération si la précision demandée est $\varepsilon = 0.05$.

b)- Donner trois écritures possibles par la méthode du POINT FIXE en étudiant la convergence pour chaque écriture dans l'intervalle $[-2,-1]$.

Exercice 1- 4 :

01)- Calculer la solution réelle de l'équation $\exp(x) - \frac{1}{x} = 0$ sur l'intervalle $[0.5,\ 0.7]$ par la méthode de DICHOTOMIE et la méthode de NEWTON, en effectuant quatre itérations (décompositions de l'intervalle).

02)- Comparer les résultats du deux méthodes.

Exercice 1- 5 :

Calculer la solution réelle de l'équation $10^x - 2\cos(x) = 0$ sur l'intervalle $[0.2, 0.3]$ par la méthode du POINT FIXE, en effectuant quatre itérations, en partant de $x_0 = 0.3$.

Exercice 1- 6 :

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - x - 2$

01)- Vérifier que la fonction f possède une racine réelle $\overline{x} \in [1, 2]$.

02)- Etudier la convergence des trois algorithmes suivants :

a- $x_{n+1} = 2x_n^3 - 2$, b- $x_{n+1} = \frac{2}{2x_n^2-1}$, c- $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{x_n}{2}}$

03)-Si l'une des algorithmes converge, l'utiliser pour déterminer $\overline{x}$ à 10^{-3} prés $(x_0 = 1)$.

Exercice 1- 7 :

On considère la fonction $f(x) = \exp(x) + 3\sqrt{x} - 2$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

1- Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans $[0, 1]$.

2- On veut calculer le zéro α de la fonction f par une méthode de point fixe convenable. En particulier on se donne deux méthodes de point fixe $x = \phi_i, i = 1, 2$, où les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont définies comme : $\phi_1 = Log(2 - 3\sqrt{x})$ et $\phi_2 = \frac{(2-\exp(x))^2}{9}$

Laquelle de ces deux méthodes utiliseriez-vous pour calculer numériquement le zéro α de la fonction f ? Justifiez votre réponse.

3- En utilisant la méthode de la bissection sur l'intervalle $[0, 1]$, pour calculer le zéro α de la fonction f avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$.

Exercice 1- 8 :

On se propose de résoudre dans R l'équation : $x\ ch(x) = 1$.

Pour cela, on introduit la fonction d'itération g définie sur R par : $g(x) = 1/ch(x)$ et on définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_0 = 0$ et $u_n = g(u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

1- Montrer que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$. En déduire que g admet un point fixe dans $[0, 1]$.

2- Calculer $g\prime$.

3- i. Montrer que pour tout $u \in R$ on a $\frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{2}$

3- ii. En déduire que $\forall x \in R\ |g\prime(x)| \leq 1/2$

(On rappelle que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$).

4- En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente.