Chapitre 5

Les méthodes numériques à un pas

5.1 Définition les Méthodes à un pas

Les méthodes à un pas sont des méthodes de résolution numérique qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \ , \ \forall 0 \leq n < N \tag{5.1}$$

où $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times R \times R \to R$ est une fonction qu'on supposera continue. Dans la pratique la fonction peut n'être définie que sur une partie de la forme $[t_0, t_0 + T] \times J \times [0, \delta]$ où J est un intervalle de R (de sorte en particulier que $[t_0, t_0 + T] \times J$ soit contenu dans le domaine de définition de l'équation différentiel). Dans toutes les méthodes numériques développées par la suite, on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en N intervalle de langueur $h = \frac{(t_0+T)-t_0}{N} = \frac{T}{N}$, telle que $h = \max_n h_n$, limités par les points $t_n = t_0 + nh$, $0 \leq n < N$.

Les types de l'erreur

Pour l'erreur on distingue deux cas :

L'erreur locale : $e_n = y(t_n) - y_n$.

L'erreur globale : $\varepsilon(h) = \max\limits_{0 \leq n \leq N} |e_n|$.

5.2 La méthode d'Euler

Définition de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) est une méthode simple de résolution d'une équation différentielle ordinaire (EDO). Comme son nom l'indique,elle est due au mathématicien et physicien suisse Euler (1707-1783). On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{5.2}$$

où f une fonction définie sur une partie de R^2où $u_0 \in R$ on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ par des points $t_0, t_1 ... t_N$ tellque : $t_0 < t_1 ... < t_n < t_{n+1} ... < t_N = t_0 + T$ est une suite nombre réelle equipartis tell que :

$h_n = t_{n+1} - t_n$
avec le pas $h = \max_n h_n$
$t_n = t_0 + nh$, pour tout $0 \leq n \leq N$
La solution du problème de Cauchy vérifié :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Notation :
★ y_n une approximation de $y(t_n)$.
★y_{n+1} une approximation de $y(t_{n+1})$.

La formule générale d'euler

- La méthode d'Euler consiste à calculer, par récurrence des valeurs approchées de respectivement au moyen de la formule suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \tag{5.3}$$

Démonstration de La formule générale d'euler : On considère que $y(t)$ est une solution exacte de problème de Cauchy et continue sur $[t_0, t_0 + T]$
en t_0 : $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$
et on a $t_{n+1} = t_n + h \rightarrow t_1 = t_0 + h$
la solution d'Euler en cette point est

$$y(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0) \tag{5.4}$$

pour le deuxième point $t_2 = t_1 + h$ s'écrit :

$$y(t_2) = y_1 + hf(t_1, y_1) \tag{5.5}$$

alors on peut écrire la formule suivante :

$$y(t_{n+1}) = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{5.6}$$

L'expression de l'erreur de la méthode de Euler est

$$\varepsilon_1(t) = \frac{h^2}{2} f'(t, y)$$

et aussi s'écrit

$$\varepsilon_1(t) = \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{dt} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{dy} f(t_n, y_n)\right) \tag{5.7}$$

Justification géométrique :

Le point (t_{n+1}, y_{n+1}) est sur la droite contenant (t_n, y_n) et de pente $f(t_n, y_n)$ or, $f(t_n, y_n)$ est le pente de la tangente à la courbe de solution du problème de Cauchy suivante :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = u_0 \end{cases}$$

La solution approchée y s'obtient graphiquement en traçant pour chaque n les segment joignant (t_n, y_n), (t_{n+1}, y_{n+1})

On construit de même une solution approcher sur en prenant des pas $h_n < 0$.

Précision de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode du premier ordre, c'est –à-dire que l'erreur au point t_n s'exprime par l'inégalité $|y_n - y(t_n)| \leq kh$ où y_n est la valeur approchée définie par l'algorithme d'Euler, $y(t_n)$ est la valeur exacte de la solution de problème de Cauchy au point $t = t_n = t_0 + nh$ et k une constance indépendante de n et de h.

Démonstration : Soit la formule d'Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.

Erreur due au schéma numérique (Euler) :

-La solution exacte et le schéma numérique vérifient :
$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n$
$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.
Alors, comme $e_n = y(t_n) - y_n$, on obtient $e_{n+1} = e_n + h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)) + \varepsilon_n$.
-Si F est localement lipchitzienne en y uniformément en t (hypothèse du théorème de Cauchy-Lipchitz),on a

$$|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)| \leq L\,|e_n|$$

et

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|\,(1 + Lh) + |\varepsilon_n|\,.$$

Deux lemmes intermédiaires

Lemme 1 Soit $(\theta_n)_{n\geq 0}$ une suite positive vérifiant
$\forall 0 \leq n \leq N$, $\theta_{n+1} \leq a\ \theta_n + \alpha$; avec $a > 0$ et $\alpha > 0$ alors, $\forall 1 \leq n \leq N+1$,
$\theta_n \leq a^n\theta_0 + \displaystyle\sum_{n=0}^{n-1} a^i = a^n\theta_0 + \alpha\frac{1-a^n}{1-a}$.

Lemme 2 De plus, si $a = 1 + \rho$ avec $\rho > 0$, comme $(1+\rho)^n \leq e^{n\rho}$, on a

$$\theta^n \leq e^{n\rho} + \theta_0 + \frac{\alpha}{\rho}(e^{n\rho} - 1);\ 1 \leq n \leq N+1.$$

on a $\varepsilon_n = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$, on pose M_2=$\sup_{[t_0,t_0+T]}|y''(t)|$ alors $\varepsilon_n \leq \frac{h^2}{2}M_2$.
on a, pour tout $0 \leq n \leq N-1$
$|e_{n+1}| \leq |e_n| + (1 + Lh) + |\varepsilon_n|\,,$
$\leq |e_n| + (1 + Lh) + \frac{M_2}{2}h^2$. (car $|\varepsilon_n| \leq \frac{M_2}{2}h^2$)

on applique le Lemme 2 avec $\rho = lh$ et $\alpha = \frac{M_2}{2}h^2$.
$|e_n| \leq e^{nLh}|e_0| + \frac{M_2}{2L}h(e^{nLh}-1)$, $1 \leq n \leq N$.
mais, pour $1 \leq n \leq N$, $nh \leq Nh = T$,et
$|e_n| \leq e^{LT}|e_0| + \frac{M_2}{2}\frac{e^{LT}-1}{l}h$, $\forall 1 \leq n \leq N$,
donc a la majoration de l'erreur est vérifier
ainsi, si $e_0 = 0$:

$$\varepsilon(h) \leq \frac{M_2}{2}\frac{e^{LT}-1}{l}h$$

alors

$$K = \frac{M_2}{2}\frac{e^{LT}-1}{l}$$

Remarque important :

La résolution de l'équation du premier ordre avec condition initial (problème de Cauchy) est universellement connue. Mais pour résoudre l'équation différentielle du deuxième ordre $y" = f(t, y(t))$ Euler ce faire, il réécrit cette équation sous forme d'un système de deux équations du premier ordre : $\frac{dy}{dt} = p$, $\frac{dp}{dt} = v(t, y, p)$.

Pour que le problème soit posé correctement il faut donner une condition initiale supplémentaire $p_{t=t_0} = v$,en plus de la condition initiale évidente $y(t_0) = u_0$ c'est-à-dire que :

$$\left\{ \begin{array}{c} y" = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = u_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y' = p, \\ p' = v(t, y, p) \\ p_{t=t_0} = y'(t_0) = v \\ y(t_0) = u_0 \end{array} \right.$$

Par exemple :
On a l'équation différentielle suivant :

$$ay" + h\sin y = 0 \tag{5.8}$$

Pour résoudre cette équation on posant :
$y' = \frac{dy}{dt} = g(y)$.on a :$y" = g'y' = g'g$ et (5.8) devient :
$ag'g + h\sin y = 0$.
qui s'écrit encore : $g' = -\frac{h}{a}\cdot\frac{\sin y}{g} = f(t, y)$.

Expression d'Euler explicite(progressif)

$$\left\{ \begin{array}{c} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y(t_0) = u_o \end{array} \right. \tag{5.9}$$

Cette expression, elle permete d'obtenir directement y_{n+1} à partir de y_n.

Expression d'Euler implicite (Rétrograde)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y(t_0) = u_o \end{cases}$$

Cette expression, elle se ramener à la résolution d'un problème non linéaire pour chaque n. Ceci nécessitera de choisir une méthode numérique pour résoudre une équation algébrique non-linéaire pour chaque n.

Remarque : On dit que les schémas d'Euler progressif et rétrograde sont des schémas à un pas puisqu'elles ne font intervenir les solutions approchées qu'aux points t_n et t_{n+1} et la méthode d'Euler explicite et implicite est du premier ordre.

5.2.1 Exercice d'application de la méthode d'Euler

Exercice :

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy.

2. Soit Δt le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO).

3. En déduire une forme du type

$$y_{k+1} = g(t; k)$$

avec g(t ; k) à préciser (autrement dit, l'itérée en t_k ne dépend que de t et k et ne dépend pas de y_k).

4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour trouver les solutions sur l'intervalle $[0, 10]$ avec la méthode d'Euler où $\Delta t = 2.5, 0.5$.

Solution :

1. Il s'agit d'une EDO à variables séparables. L'unique solution constante est $y(t) = 0$, toutes les autres solutions sont du type $y(t) = Ce^{-t}$. Donc l'unique solution du problème de Cauchy est $y(t) = e^{-t}$ définie pour tout $t \in \Re$.

2. La méthode d'Euler est une méthode d'intégration numérique d'EDO du premier ordre de la forme $y'(t) = F(t; y(t))$ C'est une méthode itérative : la valeur y à l'instant $t + \Delta t$ de déduisant de la valeur de y à l'instant t par l'approximation linéaire

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t = y(t) + F(t; y(t))\Delta t$$

En choisissant un pas de discrétisation Δt, nous obtenons une suite de valeurs $(t_k; y_k)$ qui peuvent être une

excellente approximation de la fonction $y(t)$ avec

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_1 + k\Delta t \\ y_{k+1} = y_k + F(t_k, y_k)\Delta t \end{cases}$$

La méthode d'Euler explicite pour cette EDO s'écrit donc

$$y_{k+1} = y_k - y_k\Delta t$$

3. En procédant par récurrence sur k, on obtient

$$yk + 1 = (1 - \Delta t)^{k+1}$$

4. On a donc
– si $\Delta t = 2.5$ alors

$$y_k = \left(\frac{-3}{2}\right)^{k+1}$$

– si $\Delta t = 0.5$ alors

$$y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

5.2.2 Programme en Matlab de la méthode d'Euler

$$\begin{array}{rcl} & & clc \\ & & clear\ all \\ & & close\ all \\ a & = & input('la\ valeur\ \min imale\ de\ l''intervalle') \\ b & = & input('la\ valeur\ \max imale\ de\ l''intervalle') \\ n & = & input('le\ nombre\ des\ intervalles') \\ y(1) & = & input('la\ valeur\ initiale\ de\ la\ solution') \\ h & = & (b-a)/n \\ f & = & -z; \\ for\ i & = & 0:n \\ x(i+1) & = & a+i*h \\ & & end \\ for\ i & = & 1:n \\ f1 & = & subs(f,t,x(i),z,y(i)) \\ y(i+1) & = & y(i)+f1*h \\ & & end \\ & & x \\ & & y \end{array}$$

5.3 Méthode d'Euler modifier

la méthode d'Euler modifier est une méthode qui est obtenue d'apprêt le développement de la méthode supérieur à celui de la méthode d'Euler donc on d'après la formule de taylor :

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \varepsilon_n \ ; 0 \leq \ n \leq N$$

où

$$y''_n = \frac{y'_{n+1} - y'_n}{h}$$

alors

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}(\frac{y'_{n+1} - y'_n}{h}) + \varepsilon_n$$

$$= y_n + hy'_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} - y'_n) + \varepsilon_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n) + \varepsilon_n$$

et on peut écrire

$$y_{n+1=}y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1,}y_{n+1}) + f(t_n, y_n)$$

donc la forme générale d'Euler modifier :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \end{cases} \tag{5.10}$$

5.3.1 Exercice d'application de la méthode d'Euler modifier

Exercice :

Faire trois itérations avec $h = 0.1$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = t^2 + y^2(t) + 1 \qquad (y(1) = 0)$$

Solution :
La forme générale d'Euler modifier

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \end{cases}$$

On a que $h = 0.1, t_0 = 1, y_0 = 0$ et que $f(t_n, y_n) = t_n^2 + y_n^2 + 1$.
donc $t_1 = t_0 + h = 1.1$, $t_2 = t_1 + h = 1.2, t_3 = t_2 + h = 1.3$.
- Première itération
$\widehat{y} = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0.1 \times f(1, 0) = 0,2$
$y1 = y0 + h/2(f(t_0, y_0) + f(t_0 + h, \widehat{y})) = 0 + 0.05 \times (f(1, 0) + f(1.1, 0.2)) = 0.2125$ à $t_1 = 1.1$

- Deuxième itération
$\widehat{y} = y1 + hf(t_1, y_1) = 0.2125 + 0.1 \times f(1.1, 0.2125) = 0.4380156$
$y2 = y1 + h/2(f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, \widehat{y}))$
$y2 = 0.2125 + 0.05 \times (f(1.1, 0.2125) + f(1.2, 0.4380156)) = 0.45685069$ à $t_2 = 1.2$
- Troisième itération
$\widehat{y} = y + hf(t_2, y_2) = 0.45685069 + 0.1 \times f(1.2, 0.45685069) = 0.7217219$
$y3 = y2 + h/2(f(t_2, y_2) + f(t_2 + h, \widehat{y}))$
$y3 = 0.45685069 + 0.05 \times (f(1.2, 0.45685069) + f(1.3, 0.7217219)) = 0.74983045$ à $t_3 = 1.3$

5.3.2 Programme en Matlab de la méthode d'Euler modifier

$$
\begin{array}{rcl}
 & & clc \\
 & & clear\ all \\
 & & close\ all \\
a & = & input('la\ valeur\ \min imale\ de\ l''intervalle') \\
b & = & input('la\ valeur\ \max imale\ de\ l''intervalle') \\
n & = & input('le\ nombre\ de\ \operatorname{div} iseure') \\
x(1) & = & input('la\ valeure\ initiale') \\
y(1) & = & input('la\ premiere\ valeure\ de\ la\ solution') \\
h & = & (b-a)/n \\
f & = & t*t - z*z + 1 \\
for\ i & = & 0:n \\
x(i+1) & = & a + i*h \\
 & & end \\
for\ i & = & 1:n \\
x1 & = & x(i) + h \\
k1 & = & h*subs(f, t, x(i), z, y(i)); \\
k2 & = & h*subs(f, t, x1, z, y(i) + k1); \\
y(i+1) & = & y(i) + (h/2)*(k1 + k2); \\
 & & end \\
 & & y
\end{array}
$$

5.4 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

5.4.1 *Introduction*

Karl Rung (1856,1927) et Martin Kutta (1867,1944) on proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy. Les méthodes Runge Kutta tire les avantages des méthodes de Taylor tout en gardant une Simplicité d'exécution de la méthode d'Euler. en pratique, Runge Kutta remplace l'évaluation analytique des ordres y^m, $m > 1$ par des dérivées numériques obtenues en évaluant la fonction $f(t, y(t)$ à différents endroits afin d'obtenir presque les mêmes résultats que ceux obtenu avec la méthode de Taylor.

5.4.2 *Définition*

Cette méthode est équivalente à la méthode d'Euler modifier, une méthode simple qui donner une solution approcher de la solution exacte de problème de Cauchy comme la méthode d'Euler, les méthodes de Runge Kutta peuvent être appliquées à une fonction arbitraire. La quasi-équivalence de la méthode Runge Kutta d'ordre 2 avec la méthode de Taylor d'ordre 2 n'est pas évidente sans quelques manipulations mathématiques néanmoins, on peut rapidement vérifier que leur comportement au niveau numérique est similaire.

5.4.3 La formule générale de méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

La formule de méthode de Runge Kutta d'ordre 2 s'ecrit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + ht^{(2)}(t_{n,}y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\ f(t_n + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)) \end{cases} \tag{5.11}$$

Démonstration : La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est donnée d'après le développement de Taylor d'ordre 2 suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n$$

$$= y_n + h(y'_n + \frac{h}{2} y''_n)$$

$$= y_n + ht^{(2)}(t_{n,}y_n)$$

avec

$$t^{(2)}(t_{n,}y_n) = y'_n + \frac{h}{2} y''_n \text{ est trés minimale}$$

$$= f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(t_n, y_n)$$

le principe de la méthode de Runge-Kutta 2 est de remplace $t^{(2)}(t_{n,}y_n)$ par $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ où $a_{1,}\alpha_{1,}\beta_1$ sont des constantes à détermener. Celle-ci doivent autre choisi de telle sorte que

$$t^{(2)}(t_{n,}y_n) - a_{1,} f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$$

avec

$$y'_n = f(t_n, y_n)\ , y''_n = f'(t_n, y_n)$$

et on a

$$df(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t_n, y_n)}{dt} dt + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{dy} dy$$

on peut ecrire

$$\frac{df(t_n, y_n)}{dt} = f'(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t_n, y_n)}{dt} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{dy} f(t_n, y_n)$$

en remplace dans l'expression de $t^{(2)}(t_{n,}y_n)$

$$t^{(2)}(t_{n,}y_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(t_n, y_n)$$

$$= f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{dt} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{dy} f(t_n, y_n)) \tag{5.12}$$

d'après la formule de Taylor applique à la fonction $f(t_n, y_n)$

$$f(t+\alpha_1, y+\beta_1) = a_1\alpha_1 + \alpha_1 \frac{\partial f}{dt}(t, y) + \beta_1 \frac{\partial f}{dy}(t, y) + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{2\alpha_1\beta}{2!} \frac{\partial^2 f(t, y)}{dtdy} + \frac{b_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t, y)}{dy^2} \tag{5.13}$$

multiplions l'equation(5.13) par $a_1$et comparer par rapport a l'equation (5.12)
par comparisont on obtient

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1\alpha_1 = \frac{h}{2} \\ a_1\beta_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{h}{2} \\ \beta_1 = \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \end{cases} \tag{5.14}$$

avec l'erreur de la méthode de Runge-Kutta 2 est $e_2(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f(t,y)}{dtdy} + \alpha_1\beta_1 \frac{\partial^2 f(t,y)}{dtdy} + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f(t,y)}{dy^2}$
alors

$$\varepsilon_2(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)) = \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, y)}{dtdy} + \frac{h^2}{4} f(t_n, y_n) \frac{\partial^2 f(t, y)}{dtdy} + \frac{h f(t_n, y_n)}{4} \frac{\partial^2 f(t, y)}{dy^2}$$

5.4.4 Précision de la méthode de Runge-Kutta 2

La méthode de Runge-Kutta 2 est une méthode du second ordre, c'est–à-dire que l'erreur au point t s'exprime par l'inégalité

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh^2.$$

(La constante k est précisé dans la démonstration).

Démonstration : On procède $f \in C^2([t_0, t_0 + T])$ alors $y \in C^3([t_0, t_0 + T])$ et on a :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(\xi_n)$$

en soustrayant de la relation :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) f(t_n, y_n) \tag{5.15}$$

On obtient :

$$\begin{array}{c} e_{n+1} = e_n + h\left[f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n)\right] \\ +\frac{h^2}{2}\left[\begin{array}{c} (\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) f(t_n, y_n) \\ -(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) f(t_n, y(t_n)) \end{array}\right] \\ -\frac{h^3}{6} y'''(\xi_n) \end{array} \tag{5.16}$$

Comme $y \in C^3([t_0, t_0 + T])$ la dérive troisième est bornée, Posons :

$$M_3 = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |y'''(t)|$$

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| \left(1 + hL_0 + \frac{h^2}{2} L_1\right) + \frac{h^3}{6} M_3$$

et l'application des lemmes 1 et 2 donne le résultat avec :

$$k = \frac{h^2 M_3}{6L_0}\left[e^{((t_0+T)-t_0)(L_0+\frac{h_0}{2}L_1)} - 1\right]$$

5.4.5 Exercice d'application de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Exercice :

Faire trois itérations avec $h = 0.1$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 pour l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = t^2 + y^2(t) + 1 \qquad (y(1) = 0)$$

Solution :

$$\begin{cases} y(a) = y_1 \\ \quad y_{n+1} = y_n + h\ f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)) \end{cases}$$

On a que $h = 0.1, t_0 = 1, y_0 = 0$ et que $f(t_n, y_n) = t_n^2 + y_n^2 + 1$.

– Pour la première itération, on obtient :

$y_1 = y_0 + h\ f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)) = 0.1 \times ((1.05)^2 + (0.1)^2 + 1.) = 0.21125$

alors $\quad y_1 = 0.21125$

De même, on trouve que :

– Deuxième itération :

$y_2 = y_1 + h\ f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(t_1, y_1)) = 0.21125 + 0.1 \times ((1.15)^2 + (0.324)^2 + 1.) = 0.454$

alors $\quad y_2 = 0.454$

– Troisième itération :

$y_3 = y_2 + h\ f(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} f(t_2, y_2)) = 0.454 + 0.1 \times ((1.25)^2 + (0.5863)^2 + 1.) = 0.7446$

alors $\quad y_3 = 0.7446$

5.4.6 Programme en Matlab de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$
\begin{array}{rcl}
 & & clc \\
 & & clear\ all \\
 & & close\ all \\
a & = & input('la\ valeur\ \min imale\ de\ l''intervalle') \\
b & = & input('la\ valeur\ \max imale\ de\ l''intervalle') \\
n & = & input('le\ nombre\ des\ intervalles') \\
y(1) & = & input('la\ valeur\ initiale\ de\ la\ solution') \\
h & = & (b-a)/n \\
f & = & -z; \\
for\ i & = & 0:n \\
x(i+1) & = & a+i*h \\
 & & end \\
for\ i & = & 1:n \\
f1 & = & subs(f,t,x(i),z,y(i)) \\
y(i+1) & = & y(i)+f1*h \\
 & & end \\
 & & x \\
 & & y
\end{array}
$$

5.5 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Une méthode simple qui donner une solution approcher de la solution exacte de problème de Cauchy. L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 repose sur une estimation plus précise de l'intégrale de l'équation et pour obtenir la formule de *Runge-Kutta d'ordre 4 on* va utilise la même manière de l'obtenir de la méthode de *Runge-Kutta d'ordre 2.*

alors la formule de *Runge-Kutta d'ordre 4 est :*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2\ k_2 + 2\ k_3 + k_4) + \varepsilon_n(h^5). \\
y(t_0) = u_0
\end{array}
\right.
\tag{5.17}
$$

avec

$$
\begin{array}{c}
k_1 \ = hf(t_n, y(t_n)) \\
k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 = hf(t_n + h, y(t_n) + k_3)
\end{array}
$$

L'idée est que la valeur suivante (y_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (y_n) et du produit de la taille de l'intervalle (h) par la pente estimée. La pente est obtenue par une moyenne pondérée de pentes

Notons que la pente est obtenue par une moyenne pondérée de pentes :
· k_1 est la pente au début de l'intervalle ;
· k_2 est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 ;
· k_3 est la pente au milieu de l'intervalle en utilisant la pente k_2 ;
· $k_4$est la pente à la fin de l'intervalle, en utilisant k_3.
dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

5.5.1 Précision de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est une méthode d'ordre quatre, c'est–à-dire que l'erreur au point t s'exprime par l'inégalité

$$|y_n - y(t_n)| \leq k\ h^4.$$

5.5.2 Exercice d'application de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Exercice :

Faire trois itérations avec $h = 0.1$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = t\ sin(y(t)) \qquad (y(0) = 2)$$

Solution :

$$\begin{cases} k1 = h\ f(t_n, y_n) \\ k2 = h\ f(t_n + h/2,\ y_n + k1/2) \\ k3 = h\ f(t_n + h/2,\ y_n + k2/2) \\ k4 = h\ f(t_n + h,\ y_n + k3) \\ y_{n+1} = y_n + (1/6) * (k1 + 2k2 + 2k3 + k4) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

On a que $h = 0.1, t_0 = 0, y_0 = 2$ et que $f(t_n, y_n) = t_n\ sin(y_n)$.
donc $t_1 = t_0 + h = 0.1$, $t_2 = t_1 + h = 0.2, t_3 = t_2 + h = 0.3$.
– Pour la première itération, on obtient :
$k1 = hf(t_0, y_0) = 0.1 \times 0 \times sin(2) = 0$
$k2 = h\ f(0 + 0.05, 2 + 0) = 0.1\ f(0.05, 2) = 0.1 \times 0.05 \times sin(2) = 0.004546487$
$k3 = 0.1\ f(0.05, 2 + 0.004546487/2) = 0.1\ f(0.05, 2.002273244)$
$= 0.1 \times 0.05 \times sin(2.002273244) = 0.004541745$
$k4 = 0.1\ f(0.1, 2.004541745) = 0.00907398$
alors

$$y_1 = 2 + (1/6)(k1 + 2k2 + 2k3 + k4) = 2.004541741.$$

De même, on trouve que :
– Deuxième itération :

$k1 = 0.009074,\ k2 = 0.013582, k3 = 0.013568, k4 = 0.018032$

$$y_2 = 2.01810947$$

– Troisième itération :
$k1 = 0.018032, k2 = 0.022442,\ k3 = 0.022418,\ k4 = 0.026751$

$$y_3 = 2.0405264$$

5.5.3 Programme en Matlab de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\begin{array}{rcl}
 & & clc \\
 & & clear\ all \\
 & & close\ all \\
a & = & input('la\ valeur\ \min imale\ de\ l''intervalle') \\
b & = & input('la\ valeur\ \max imale\ de\ l''intervalle') \\
n & = & input('le\ nombre\ de\ \mathrm{div}\, iseure') \\
x(1) & = & input('la\ valeure\ initiale') \\
y(1) & = & input('la\ premiere\ valeure\ de\ la\ solution') \\
h & = & (b-a)/n \\
f & = & t*t - z*z + 1 \\
for\ i & = & 0:n \\
x(i+1) & = & a + i*h \\
 & & end \\
for\ i & = & 1:n \\
x1 & = & x(i) + h/2 \\
x2 & = & x(i) + h \\
k1 & = & h*subs(f, t, x(i), z, y(i)); \\
k2 & = & h*subs(f, t, x1, z, y(i) + k1/2); \\
k3 & = & h*subs(f, t, x1, z, y(i) + k2/2); \\
k4 & = & h*subs(f, t, x2, z, y(i) + k3); \\
y(i+1) & = & y(i) + (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4); \\
 & & end \\
 & & y
\end{array}$$

5.6 Étude générale des méthodes a un pas

5.6.1 Consistance :

Définition "consistance"

l'erreur de consistance e_n relative à une solution exacte y est
l'erreur $e_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$; $\forall 0 \leq n < N$
en supposant $y_n = y(t_n)$. On a donc

$$e_n = y(t_{n+1}) - y_n - h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

on dit que la méthode est **consistante** si pour toute solution exacte y la somme des erreurs de consistance relatives à y, soit $\sum\limits_{0 \leq n \prec N} |\varepsilon_n|$ tend vers 0,

quand $h_{\max}$ tend vers 0. C'est à dire

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{N} |\varepsilon_n| = 0.$$

Estimation de l'erreur de consistance

On a la méthode d'Euler est la formule suivant $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$,On suppose que la solution exacte vérifie $y \in C^2\left([t_0, t_0 + T], R\right)$

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y_n - h_n f(t_n, y_n, h_n)$$

où $y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$
$y'(t_n) = f(t, y(t))$
d'où

$$\varepsilon_n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Majoration de l'erreur de consistance

On a l'erreur de consistance est $\varepsilon_n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$.
Majoration M_2=$\sup_{[t_0, t_0+T]} |y''(t)| \Rightarrow \varepsilon_n \leq \frac{h^2}{2} M_2$.

Erreur due au schéma numérique

La solution exacte et le schéma numérique vérifient $y(t_{n_{+1}}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n$
$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
alors, comme $e_n = y(t_n) - y_n$, on obtient
$e_{n+1} = e_n + h(f(t_n, y(t_n) - f(t_n, y_n)) + \varepsilon_n$

Schéma de l'erreur de consistance

Théorème 5.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit consistance avec l'équation différentielle est* $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$.

Démonstration

Condition nécessaire La méthode est consistante, donc $\lim\limits_{h\to 0}\max_n(\frac{1}{h}(y(t_{n+1})-y(t_n))-\Phi(t_n,y(t_n),h))=0$.

ou encore

$$\lim_{h\to 0}\max_n(\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x,y(x))dt-\Phi(t_n,y(t_n),h))=0.$$

pour tout $t\in[t_0,t_0+T]$, il existe un encadrement $[t_n,t_{n+1}]$ telle que, même lorsque h tend vers 0. (i.e) lorsque n tend vers l'infini), $t\in[t_n,t_{n+1}]$. dans ces conditions, $\lim\limits_{h\to 0} t_n=t$ et $\lim\limits_{h\to 0} t_{n+1}=t$.

La continuité des fonctions f et Φ permet alors d'écrire

$$\lim_{h\to 0}\max_n(\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x,y(x))dt-\Phi(t_n,y(t_n),h))=f(t,y(t))-\Phi(t,y(t),0)=0.$$

$$\Rightarrow f(t,y(t))=\Phi(t,y(t),0).$$

Condition suffisante de $f(t,y(t))=\Phi(t,y(t),0)$, il vient
$\frac{1}{h}(y(t_{n+1})-y(t_n))-\Phi(t_n,y(t_n),h)$
$=\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x,y(x))dx-\Phi(t_n,y(t_n),h)$
$=\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x,y(x))-\Phi(t_n,y(t_n),h))dx$
$=\frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(\Phi(x,y(x),0)-\Phi(t_n,y(t_n),h))dx$
et, d'après la continuité de Φ ,
$\lim\limits_{h\to 0}\max_n(\Phi(x,y(x),0)-\Phi(t_n,y(t_n),h))=0$.
puis $\lim\limits_{h\to 0}\max_n(\ \frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x,y(x))dt-\Phi(t_n,y(t_n),h))=0$.

Définition "Ordre de méthode à un pas "

On dit qu'une méthode à 1 pas est d'ordre $\geq p$¸ si pour toute solution exacte y d'une équation différentielle où $y'=f(t,y)$où f est de classe C^p, il existe une constante $C\geq 0$ telle que l'erreur de consistance relative à y vérifie

$$|\varepsilon_n|\leq Ch_n^{p+1},\ 0\leq n<N.$$

Remarque La méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1 car
$y_{n+1}=y_n+hy'(t_n)+\varepsilon_n(h^2)=y_n+hf(t_n,y_n)+\varepsilon_n(h^2)$
$=y_{n+1}+\varepsilon_n(h^2)$.

Consistance et ordre

Si $p\geq 1\rightarrow$la méthode à 1 pas est consistance.

5.6.2 La convergence

Définition "La convergence "

On dit que la méthode est convergente si pour toute solution exacte y, la suite (y_n) vérifie

$$\max_n |y_n - y(t_n)| \to 0$$

quand $y_0 \to y(0)$ et $h_{\max} \to 0$
Posons $\widetilde{y}_n = y(t_n)$. Par définition d'erreur de consistance on a
$\widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y} + h_n\Phi(t_n, \widetilde{y}_n, h_n) + e_n$.
Si la méthode est stable, de constante S, l'erreur globale est donc
$\max_n |y_n - y(t_n)| \leq S(|y_0 - y(0)| + \sum_n |e_n|$.

Démonstration de convergence de la méthode d'Euler :

Pour démontrer que la méthode d'Euler est convergence il faut démontrer que :

$$\varepsilon(h) = \lim_{h\to 0} \max_{0\leq n\leq N} |e_n| \to 0$$

Soit la formule d'Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.
On a l'erreur de la méthode d'Euler est vérifier la formule suivant :

$$|e_n| \leq e^{nLh} |e_0| + \frac{M}{2L} h(e^{nLh} - 1), 1 \leq n \leq N.$$

mais, pour $1 \leq n \leq N,\ nh \leq Nh = T$, et

$$|e_n| \leq e^{LT} |e_0| + \frac{M}{2} \frac{e^{LT} - 1}{l} h, \forall 1 \leq n \leq N,$$

ainsi, si $e_0 = 0$, $\varepsilon(h) \leq \frac{M}{2}\frac{e^{LT}-1}{l}h$
et

$$lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0,\ \text{donc}\ \lim_{h\to 0} \max_{0\leq n\leq N} |e_n| \to 0$$

5.6.3 Stabilité :

Définition "Stabilité" :

L'idée est de vérifier si de petites perturbations du schéma ne perturbent pas trop la solution approchée. On dit que la méthode est stable s'il existe une constante $S \geq 0$¸ telle que pour toutes suites (y_n), $(\widetilde{y})$ définies par
$y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n)\,;\ 0 \leq n < N$
$\widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y}_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n) + \varepsilon_n\,;\ 0 \leq n < N$
On ait
$\max_n |\widetilde{y}_n - y_n| \leq S(|\widetilde{y}_0 - y_0| + \sum_n |\varepsilon_n|$

Théorème (CS de stabilité).

Pour que la méthode soit stable, il suffit que la fonction Φ soit Lipchitzienne en y, de constante L : $|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)| \leq L\,|y_1 - y_2|$,

Pour tout $t \in [0, T]$, tout $(y_1, y_2) \in R^2$ alors on peut prendre pour constante de stabilité

$$S = e^{\lambda t}.$$

Remarque :

L'intégration numérique est un vaste domaine d'analyse numérique, en générale ce n'est toujours évident d'intégrer des fonctions continues on reconnut à l'intégration numérique.

En général, un nombre de points de 4 à 6 est largement suffisant pour la plupart des applications.

Les méthodes de Gauss sont donne des résultats exactes pour les polynômes de dégréé inférieur où égale au nombre des racines de polynôme qui choisit (le nombre des points).

5.7 Série des exercices

Exercice 5 - 1 :

Vérifier que les fonctions suivantes sont des fonctions Lipchitziennes en y sur $D \subset \Re^2$.

$$\begin{array}{ll} 1- \quad f(x,y) = x\,|y|\,, & D = \{(x,y) \in \Re^2 /\ \ 0 \leq x \leq 2,\ \ -3 \leq y \leq 4\} \\ 2- \quad f(x,y) = 1 + x\sin(x\ y), & D = \{(x,y) \in \Re^2 /\ \ 0 \leq x \leq 2\}\,, \\ 3- \quad f(x,y) = -y + x + 1, & D = \{(x,y) \in \Re^2 /\ \ 0 \leq x \leq 1\}\,. \end{array}$$

Exercice 5 - 2 :

01)- Démontrer que pour tout $T \neq 0$, ce problème admet une solution unique.

$y' = 1 + x\sin(x\ y), \qquad D = \{(x,y) \in \Re^2/\ \ 0 \leq x \leq T\}$ et $y(0) = 0$.

02)- Démontrer que ce problème admet une solution unique.

$y' = -y + \frac{x}{(1+x)^2}, \qquad D \equiv \Re^2$ et $y(0) = 1$.

Exercice 5 - 3 :

Utiliser la méthode d'Euler pour trouver les premières quatre valeurs de la solution $y = f(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$, en prenant le pas $h = 0.1$. Effectuer les calculs avec trois décimales exactes.

Exercice 5 - 4 :

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = x - y + 1, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1, & h = 0.1 \end{cases}$$

Trouver les valeurs approchées de $y(x_i)$, $i = 0, 1, ..., N$ par :

01)- la méthode d'Euler.

02)- la méthode d'Euler modifie.

Comparer les résultats obtenus avec la solution exacte.

Exercice 5 - 5 :

Calculer les valeurs approchées de la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aux points $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.4$ d'après les méthodes Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4. Effectuer les calculs avec 4 décimales exactes.

Estimer les résultats obtenus, si la solution exacte est $y(x) = \sqrt{2x+1}$.

Exercice 5 - 6 :

On considère, pour $t \in [0, 2]$, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \exp(-y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

1- Le problème admet-il une et une seule solution ?

2- Donner la solution exacte de ce problème. Quelle est la valeur de $y(2)$?

3- On prend un pas de temps $\Delta t = 0.5$. Quelle approximation de $y(2)$ obtient-on avec le schéma d'Euler ?

Exercice 5 - 7 :

On considère l'équation différentielle par :

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{(x+1)} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

avec $x \in [0, 1]$

1)- Montrer que cette équation admet une solution unique.

2)- Résoudre cette équation par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 dans l'intervalle $[0, 1]$ avec un pas de 0.2.

3)- On considère l'équation différentielle par :

$$\begin{aligned} (1+x)\, y'' + y' &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

avec $x \in [0, 1]$

Par un changement de variable adéquat, déduire de la question précédente les valeurs de : $y'(0.2)$, $y'(0.4)$, $y'(0.6)$, $y'(0.8)$ *et* $y'(1)$.