
serie d'exercice 03
Variables aléatoires

Ex. 1 On lance 2 dés et on appelle X la somme des points obtenus. Donner la représentation graphique de la fonction de répartition de X. (On précisera, en particulier les points de discontinuité et leur nature).

Ex. 2 Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.
Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

Ex. 3 Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction F définie par : $F(x) = \frac{a(x+4)}{b+|x|} 1_{(x)_{]-\infty, 4[}}$ soit une fonction de répartition.

Ex. 4 Soit X une v.a.r. discrete prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que :
 $P([X < 5]) = 1/3; P([X > 5]) = 1/2; P([X = 3]) = P([X = 4])$.

Ex. 5
A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs.
Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne et les moteurs sont indépendants les uns des autres.
Sachant que chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombent en panne, quel avion choisissez-vous ?

Ex. 6 On tire 9 cartes dans un jeu de 52 cartes. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de carres obtenus. Trouver la loi de X.

Ex. 7 Soit X une v.a.r. à valeurs dans \mathbb{N} , telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([X = k]) = \lambda 3^{-k}$.
(a) Déterminer λ .
(b) X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

Ex. 8 Soit X une v.a.r. entière telle que $P([X = k]) = e^{-2}(1 + \alpha k) \frac{2^k}{4^{(k!)}}$ pour toute $k \in \mathbb{N}$.
Déterminer α

Ex. 9 Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 5 noires.
On appelle X le rang de la r-ième boule blanche tirée ($1 \leq r \leq 10$).
Déterminer la loi de X dans le cas de tirages sans remise puis dans le cas de tirage avec remise.

Ex. 10 Soit X une v.a.r. de densité f.
Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit $Y = aX + b$.

- (a) Exprimer la densite de Y a l'aide de f .
 (b) Meme question avec $Y = |X|$.
 (c) Meme question avec $Y = X^p$; $p \in \mathbb{N}$. (on distinguera les cas p impair et p pair).
 Application : Si X suit la loi normale $N(0, 1)$, quelle est la loi de $Y = X^2$?

Ex. 11 On suppose que la duree d'une communication telephonique est une v.a.r. de loi exponentielle $E(k)$.

- (1) Calculer, pour $k = 0, 8$, la probabilite pour qu'une communication dure :
 (a) : plus de 4 minutes ;
 (b) : entre 3 et 5 minutes.
 (2) Quelle valeur faut-il donner a k pour que la probabilite qu'une communication dure plus de 3 minutes soit egale a 0,1 ?

Ex. 12 Trouver la loi de $Y = e^{\frac{1}{X}}$ si X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Ex. 13 Soit X une v.a.r. absolument continue.

- (a) Déterminer la loi de $Y = \sin(\pi X)$ si X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
 (b) Déterminer la loi de $Z = \tan X$ si X suit la loi uniforme sur $] - \pi/2, \pi/2[$.

Ex. 14 On jette 10 pièces de monnaie truquées de telle sorte que, pour chacune, la probabilité d'obtenir "pile" soit 0,3.

Soit X le nombre de "piles" obtenus au cours de ce lancer.

- (a) Déterminer la loi de X .
 (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 "piles" ? au plus 3 "piles" ?

Ex. 15

Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre 8.

- (a) Déterminer la probabilité des evenements A "en une semaine, 8 voitures ont été vendues" et B "en une semaine, au moins 2 voitures ont été vendue".
 (b) Quelle est la probabilité qu'en une semaine il y ait eu au moins 6 et au plus 10 voitures vendues ?

Ex. 16

Sur un échantillon de population, on note que 11% des personnes mesurent moins de 1,60m et 8% plus de 1,80m.

En admettant que la taille d'une personne est une v.a.r. de loi normale, préciser les paramètres de cette loi

Ex. 17

La distribution des notes obtenues a un examen admet approximativement la loi normale de moyenne 32,5 et d'écart-type 8,5 (les notes allant de 0 a 60).

Sachant que 30% des étudiants ne sont pas admissibles et que 10% sont admis sans oral, quelles sont les barres d'admissibilité et d'admission ?