Chapitre n=4

Lois de probabilités usuelles

Introduction

A priori, les lois de distribution des phénomènes physiques, économiques, etc. sont innombrables. Chaque cas semble particulier. Dans cette partie, nous présentons les lois de probabilités les plus souvent utilisées dans les études. Elles permettent de modéliser une grande variété de problèmes. Nous noterons X la variable aléatoire étudiée. Une expérience correspond à une observation de la variable aléatoire (v.a) X, elle est notée xi. Nous disposons d'une série d'observations xi, i = (1, 2, . . ., n),

On utilise des variables aléatoires discrètes pour compter des évènements qui se produisent de manière aléatoire, et des variables aléatoires continues quand on veut mesurer des grandeurs “continues” (distance, masse, pression...).

I. Lois d’une variable aléatoire discrète.

L’application X permet de transporter la probabilité P de Ω en une probabilité PX sur R : on considère pour cela les $P(X = x_k)$ comme des masses ponctuelles pk situées en les points x_k de la droite réelle, on définit ainsi une probabilité sur R (le point x_k a la Probabilité pk). La probabilité, pour cette loi, d’une partie quelconque de R est alors la somme des masses ponctuelles qu’elle contient.

Les probabilités pk = P(X = xk) sont appelées probabilités ponctuelles de la v.a. X .
Dans la suite, le symbole ~ signifiera « a pour loi ». Par exemple, on notera X ~ B(n, p)
pour signifier que la v.a. X suit la loi binomiale B(n, p).

Remarque :

1. Notons en particulier que comme $\sum_{k,x_k\in\Omega} P_k = 1$, $P_X(B)$ est une sous-série d’une série a termes positifs convergente donc convergente : $P_X(B)$ est donc toujours bien définie pour toute partie $B \subset R$. Ce ne sera pas aussi simple dans le cas des variables aléatoires réelles (pour lesquelles les observables seront réduits aux intervalles de R).
2. Attention, deux variables aléatoires. peuvent avoir la même loi sans pour autant être égales. Par exemple si on dispose d’un dé rouge et d’un dé bleu et que X , Y désignent la somme des points obtenus après un lancer respectivement du dé rouge et du dé bleu, X et Y ont la même loi. Pourtant bien sûr, on n’a pas X = Y, ce qui équivaudrait à dire que les tirages des deux dés sont nécessairement identiques.

I.1 Loi de Bernoulli de paramètre p

Loi de Bernoulli de paramètre p notée B(p).

Définition

Une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle ne prend que deux valeurs, la plupart du temps 0 et 1 avec :
$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$.

Notation :

$X \to B(P)$ *si*,

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p \text{ si } x = 1 \\ 1 - p = q \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

f est bien une densité care elle vérifier les trois propriétés de la densité :

1. Elle est positive
2. L'ensemble de x ou f (x) positif est dénombrable
3. $\sum_x f_X(x) = 1$

Caractéristiques de la loi

Espérance , variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi de Bernoulli alors

- $E(X) = p$
- $Var(X) = pq = p(1-p)$
- $\sigma_X = \sqrt{pq}$

Démonstration :

1. $E[X] = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$
2. $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$

I.2 Loi de binomiale de paramètre (n,p)

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p), notée B (n, p).

Proposition : soit $X \sim B(n, p)$ alors la fonction f définie par :

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{1-x} \text{ si } x \in \{0,1,\dots,n\} \\ 0 \text{ ailleur} \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Remarque :

La loi de Bernoulli est la loi binomiale B (1, p), c.à.d. n=1

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Binomial alors

- E(X) = np
- Var(X) = npq=np(1-p)
- $\sigma_X = \sqrt{npq}$

Preuve :

1. Calculons l'espérance

$$E(X) = \sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \quad puisque\ nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k$$

$$E(X) = np(p+q)^{n-1} = np$$

2. Pour le calcul de la variance Var(X) = E[X^2] − E[X] ^{2}

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{k=n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} + np\sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}$$

$$E(X^2) = np(n-1)p + np$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Donc $VarX) = np(n-1)p + np - (np)^2$

$$Var(X) = npq$$

Autre technique de calcule Var(X)

En en effet : utilisant les notions des séries :

En effet $E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 p^k (1-p)^{n-k} = S_q(p)$ où $q = 1-p$ et $S_q(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^k q^{n-k}$.
Or

$$\begin{aligned} S_q(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^k q^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^{k-1} q^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} C_n^k k (x^k)' q^{n-k} \\ &= x \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^k q^{n-k} \right)' = x \left(x \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1} q^{n-k} \right)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x \left(x \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x^k)' q^{n-k} \right)' = x \left(x \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k q^{n-k} \right)' \right)' \\ &= x \left(x \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k q^{n-k} \right)' \right)' = x \left(x[(x+q)^n]' \right)' \\ &= x \left(x \times n(x+q)^{n-1} \right)' = xn(x+q)^{n-1} + x^2 \times n(n-1)(x+q)^{n-2}. \end{aligned}$$

D'où $E[X^2] = S_{1-p}(p) = pn + p^2 n(n-1)$ et

$$\mathrm{Var}(X) = pn + p^2 n(n-1) - (np)^2 = n(p - p^2) = np(1-p).$$

3. $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq}$

Remarque : La loi est appelée loi binomiale dans la mesure où les probabilités correspondent aux termes du développement du binôme de Newton.

I.3 Loi multinomiale

Supposons qu'il y ait dans une urne N boules de r couleurs distinctes $c_1, c_2, ..., c_r$. Soit n_i le nombre de boules de couleur C_i et $p_i = n_i / N$ la proportion de boules de la couleur C_i dans l'urne. On a : $N = \sum_1^r n_i$, $P = \sum_1^r p_i$

Supposons que l'on effectue un tirage de n boules, chaque boule étant remise dans l'urne avant le tirage de la boule suivante ; les tirages répétés des boules sont des épreuves indépendantes. On cherche la probabilité d'obtenir l'événement A défini par :

- m_1 boules de la couleur C1
- m_2 boules de la couleur C2 . . .
- m_i boules de la couleur Ci . . .
- m_r boules de la couleur C_r avec $m_1 + m_2 + . . . + m_r = n$

Cet événement est réalisé par exemple avec le n-uplet

$$\underbrace{C_1,...C_1}_{m_1 boules\, C_1} \quad \underbrace{C_2,...C_2}_{m_2 boules\, C_2} \quad ...\underbrace{C_r,...,C_r}_{m_r boules\, C_r}$$

De probabilités $P_1^{m_1} p_2^{m_2} ... P_r^{m_r}$ .le nombre de ces n-uplets est égal au nombre de façons de disposer m_1 fois la lettre C_1, m_2 fois de la lettre C_2 …m_r fois la lettre C_r dans un mot de longueur $n = \sum_{i=1}^{i=r} m_i$ d'où la probabilité de l'évènement A est :

$$P(A) = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} ... C_{m_r}^{m_r} (p_1)^{m_1} (p_2)^{m_2} ... (p_r)^{m_r}$$

On a la relation $C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} ... C_{m_r}^{m_r} = \dfrac{n!}{m_1! m_2! ... m_r!}$

Par conséquent $P(A) = \dfrac{n!}{m_1! m_2! ... m_r!} (p_1)^{m_1} (p_2)^{m_2} ... (p_r)^{m_r}$

Exemple :

Une urne est composée de 10% de boules rouges, 20% de boules blanches, 40% de boules vertes, 30% de noires. Le nombre de boules de l'urne est N > 20. On e• ectue un tirage avec remise de 12 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges, 5 boules blanches, 3 boules vertes et une boule noire ?.

Solution :

Il suffit d'appliquer la formule précédente :

$$P(A) = \frac{12!}{3! \times 5! \times 5! \times 1!} (0.1)^3 \times (0.2)^5 \times (0.4)^3 \times (0.3)^1$$

I.3 Loi de Poisson de paramètre λ

Proposition : soit X une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre positive λ

X ~ P(λ) alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \; si \; k \in N \\ 0 \quad ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Poisson alors :

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

Preuve :

1. L'espérance mathématique de X est donnée par

$$E(X) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \sum_{1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

2. Pour calculer la variance, commençons par calculer $E(X(X-1))$

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} n(n-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 \sum_{2}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$dou\; Var(X) = \lambda$$

3. $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda}$

La loi de Poisson modélise des comptages qui suivent un processus de Poisson. Par exemple, le nombre d'appels à un central téléphonique pendant une période donnée, le nombre de voitures qui passent à un carrefour en un temps donné.

Exemple :

Un central **téléphonique** reçoit en moyenne 100 appels par heure. En supposant que le nombre d'appels durant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson,
1. quelle est la probabilité que le central reçoive trois appels en deux minutes?
2. quelle est la probabilité pour qu'en deux minutes, il reçoive au moins un appel?

Solution :
En deux minutes, on peut s'attendre à ce que le nombre d'appel soit

$$\lambda = E(X) = \frac{2 \times 100}{60} = \frac{10}{3}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir trois appels en deux minutes es

$$P(X=3)=\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{3!}\ \exp\left(-\frac{10}{3}\right)=0.220$$

et la probabilité d'obtenir au moins un appel en deux minutes est

$$P(X\geq 1)=1-\exp\left(-\frac{10}{3}\right)=0.964$$

I.4 Loi géométrique G(P) de paramètre p
Soit X une variable aléatoire suit la loi de géométrique de paramètre p
Pour p ∈ [0, 1], A ∈ N et m ≤ A,
On définit la loi géométrique, notée G(p), par :

$$f_X(k)=P(X=k)=\begin{cases}(1-p)^{k-1}p=q^{k-1}p\ si\ x\in N^*\\ 0\quad ailleur\end{cases}$$

Proposition :

X ~ G(p) alors la fonction f définie par :

$$f_X(k)=P(X=k)=\begin{cases}(1-p)^{k-1}p=q^{k-1}p\ si\ x\in N^*\\ 0\quad ailleur\end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Géométrique alors :

- $E(X)=\dfrac{1}{p}$
- $Var(X)=\dfrac{q}{p^2}$
- $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{q}{p^2}}=\dfrac{\sqrt{q}}{p}$

Par exemple, la probabilité $q^{k-}1p$ correspond à la probabilité d'obtenir dans une succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes, $k - 1$ échecs suivis d'un succès. De plus, la loi géométrique est le premier modèle discret de la mort d'une particule radioactive. En effet, la durée de vie de la particule radioactive, notée T, suit la loi de probabilité pour $k \in \mathbb{N}$

$$P(T = k) = q^k p$$

Preuve : par exemple pour calculer la variance : on utilise les notions des séries :

En effet $E[X^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = pS(1-p)$ avce $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$. Puis

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\right)' \\
&= \left(x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\right)' = \left(x\sum_{k=1}^{+\infty}(x^k)'\right)' \\
&= \left(x\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)'\right)' \\
&= \left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \left(x\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

D'où $E[X^2] = pS(1-p) = p\dfrac{1}{(1-(1-p))^2} + p\dfrac{2-2p}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2-2p}{p^2}$ et

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{p} + \frac{2-2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{p(1-p)}{p^2}.$$

Exercice (Temps d'attente de métros).

On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro suit une loi géométrique. Durant les heures de pointes du matin, le temps d'attente moyen d'un métro pour la ligne 8 est de 3 minutes tandis qu'il est de 2 min pour la ligne 9.

(a) Quels sont les paramètres des lois géométriques pour les lignes n° 8 et n° 9 ?
(b) Quelle est la probabilité d'attendre entre 2 et 4 minutes un métro de la ligne 8 ? de la ligne 9 ?
(c) Même question pour un temps d'attente de plus de 5 minutes.

Solution

Notons X le temps d'attente de la ligne 8 et Y celui de la ligne 9.

(a) Le temps moyen d'attente est l'espérance donc on doit avoir E(X) = 3 et E(Y) = 2. L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est 1/p donc le paramètre de X est 1/3 tandis que celui de Y est 1/2. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{2}{3})^{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = k) = \tfrac{1}{2} \times (\tfrac{1}{2})^{k-1} = (\tfrac{1}{2})^k.$$

(*b*) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \le X \le 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)\\ &= \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{2}{3})^{2-1} + \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{2}{3})^{3-1} + \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{2}{3})^{4-1} = \tfrac{2}{9} + \tfrac{4}{27} + \tfrac{8}{81} = \tfrac{18+12+8}{81}\\ &= \boxed{\tfrac{38}{81}} \simeq 46{,}91\,\%.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \le Y \le 4) &= \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4)\\ &= (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{4+2+1}{16}\\ &= \boxed{\tfrac{7}{16}} \simeq 43{,}75\,\%.\end{aligned}$$

(c)on a (rappelons qu'une loi géométrique prend ses valeurs dans N donc ne prend jamais la valeur 0)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \ge 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3) - \mathbb{P}(X = 4)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(2 \le X \le 4) = 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{38}{81} = \tfrac{81-27-38}{81}\\ &= \boxed{\tfrac{16}{81}} \simeq 19{,}75\,\%.\end{aligned}$$

I.5 Loi hypergéométrique H(N,n,P)

Définition :

Soit une urne contenant N boule dont une proportion p de boules blanches. On prélève de cette urne un échantillon (sans remise) de n boules. On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches de l'échantillon. On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et on note X → H (N, n, p).

Proposition :

X ~ H (N, n, p).alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_{NP}^{k} C_{qN}^{n-x}}{C_N^n} & si \max(0, n - Nq) \le k \le \min(n, NP) \\ 0 \quad ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :exo TD

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Hypergéométrique alors :

- $E(X) = np$
- $Var(X) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1} npq}$

Preuve : exo TD

Exemple :

On tire n boules (sans remise) dans une urne contenant pa boules rouges et qa boules bleues, soit un nombre total de boules de a = pa + qa. Alors la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges suit une loi hypergéométrique H (n, p, a).

II. Loi d'une variable aléatoire continue.

Définition :

On appelle densité de probabilité toute fonction réelle positive, d'intégrale 1.

Attention ! Pour une v.a. continue X , la densité f ne représente pas la probabilité de l'évènement {X = x}.

Important :

La loi d'une v.a. X est donnée par :
- sa densité ou
- les probabilités P [a ≤ X ≤ b] pour tous a, b ou
- les probabilités F (x) = P [X ≤ x] pour tout x (F est la fonction de répartition).

Remarque : P [X = x] = 0 pour tout x.

II.1 Loi uniforme

Définition et proposition :

Une v.a. X suit une loi uniforme sur [a, b], si elle admet pour densité

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \; si \quad a \prec X \prec b \\ 0 \quad si\ non \end{cases}$$

Preuve :

Il est facile de vérifie facilement que f est une densité

Notation : On note X ~ U [a,b].

Fonction de répartition

La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 \; si \quad x \prec a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad si\ a \leq x \prec b \\ 1 \; si\ x \succ b \end{cases}$$

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi uniforme X ~ U [a,b] alors

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Preuve :

Il est très facile de montrer la proposition

II.2 Loi exponentielle

Définition:

Soit λ > 0. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité f est donnée par :

$$f(X) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \in [0,+\infty[\\ 0 & ailleur \end{cases}$$

Notation : X ~ exp(λ)

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Par exemple, les temps, d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi exponentielle X ~ exp(λ) alors :

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

Preuve : (Exo TD)

Proposition :

La fonction de répartition de la loi Exp(λ) est égale a :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0\ ailleur \end{cases}$$

II.3 Loi Lois normales ou gaussiennes

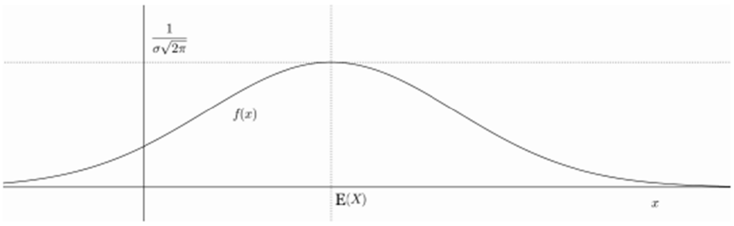
Elles jouent un rôle capital dans l'étude des lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes (cf. le théorème central limite, résultat central comme son nom l'indique en théorie des probabilités). On parle encore de loi gaussiennes.
Parfois sous le vocable loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

Définition

On dit que la v.a.r. X suit une loi gaussienne ou normale N (m, σ2) si elle a pour densité la fonction :

$$f_{m,\sigma} : R \to R, \quad t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \right)$$

L'allure caractéristique en cloche de la densité de la loi normale :



Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale X $\sim$ N(m,σ^2) alors :

$$E(X) = m\ , \quad Var(X) = \sigma^2\ , \quad \sigma(X) = \sigma$$

Remarque

Notons que f est bien une densité puisque :

$$\int_R \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

En effet, par le changement de variable $u = \frac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$, il suffit de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_R \exp\left(-u^2\right)du = \sqrt{\pi}$

Pour cela, effectuons un changement de variable en coordonnées polaires :

$$I^2 = \int \exp\left(-x^2\right)dx \times \int_R \exp(-y^2)dy = \int_{R^2} \exp(-(x+y)^2)dxdy$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \exp(-r^2)rdrd\vartheta = 2\pi\int_0^{+\infty} \exp(-r^2)rdr$$
$$= -\pi\left[\exp(-r^2)\right]_0^{+\infty} = \pi$$

Preuve :

Calculons l'espérance et la variance par le changement de variable $u = \frac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$

$$E(X) = \int_R tf_{m,\sigma}(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_R t.\exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})dt$$
$$= \int_R \frac{\sqrt{2}\sigma u + m}{\sqrt{\pi}}\, e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_R ue^{-u^2}\, du + \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_R e^{-u^2}\, du = m$$

$$Var(X) = \int_R (t-m)^2 f_{m,\sigma}(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_R (t-m)^2.\exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})dt$$
$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_R u^2\, e^{-u^2}\, du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\left[-ue^{-u^2}\right]_R + \frac{1}{2}\int e^{-u^2}\, du\right) = \sigma^2$$

II.4 Loi normale centrée réduite N (0, 1)

Définition :

La loi normale centrée réduite est une la loi continue, d'une v.a. X `a valeurs ,dans X(Ω) = R tout entier, définie à partir de la densités :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Il n'existe par contre pas d'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale.

$$\forall a \in R, \quad F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale X $\sim$ N(0,1) alors :

$E(X) = 0$, $Var(X) = 1$, $\sigma(X) = 1$

Proposition :

Si la v.a.r. X suit une loi N (m, σ^2), alors la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale N(0,1)

Preuve :

Calculons pour a < b quelconques P(a ≤ Y ≤ b) :

$$P(a \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq b) = P(\sigma a + m \leq X \leq \sigma b + m)$$
$$= \int_{\sigma a+m}^{\sigma b+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})dt$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $S = \dfrac{t-m}{\sigma}$ pour obtenir :

$$\forall a \in R, \quad P(a \leq Y \leq b)$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{S^2}{2})dS$$

C'est à dire Y suit la loi N (0, 1).

Propriétés :

Si $Y \sim$ N (0, 1), c'est-à-dire Y suit une loi normale centrée réduite de moyenne (0) et D'écart type (1), alors les propretés ci-dessous sont toujours vérifiées :

1. $\forall y \in R, F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$
2. $\forall y \in R, F(-y) = 1 - F(y)$
3. $\forall y \in R, P(Y \succ y) = 1 - P(Y \leq -y)$

Manipulation de la loi normale

On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N (0, 1). On utilise les valeurs de Φ(a) tabulées et le changement de variable pour calculer les valeurs de la fonction de répartition F d'une loi normale générale.

Exemple

Considérons X une v. a. qui suit une loi N (6, 4) et Z une v.a. de loi N (0, 1), on a par exemple

$$F_X(7) = P(X \leq 7) = p\left(\frac{X-6}{2} \leq \frac{7-6}{2}\right)$$

$$= P(Y \leq \frac{1}{2}) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6915$$

Les valeurs ne sont tabulées que pour des valeurs de a positives, mais on s'en sort à l'aide de la propriété suivante de la fonction de répartition Φ de la loi normale :

Propriété :

Soit Z une v.a. de loi N (0, 1) ; on a alors $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ et en particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

D'autre part : $P(|Y| \leq a) = 2.\Phi(a) - 1$

Exemple

$$P(X \succ 1) = P\left(\frac{X-6}{2} \succ \frac{1-6}{2}\right) = P(Y \succ -2.5) = \Phi(2.5) = 0.9938$$

$$P(4 \leq X \leq 8) = P(-1 \leq Y \leq 1) = P(|Y| \leq 1) = 2\Phi(1) = 0.6826$$

II.5 Lois log-normales

Définition :

Une variable aléatoire réelle X suit une loi log-normale si elle admet la densité :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2} & si\ t \geq 0 \quad m \in R, \sigma \in R^* \\ 0 \quad ailleur & \end{cases}$$

Proposition :

Si X est de loi log-normale alors ln(X) suit une loi normale et réciproquement.

Preuve : TDexo

II.6 Lois de Cauchy

Définition : soit $a \in R_+^*$

On appelle loi de Cauchy de paramètre a la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{a}{\pi\left(a^2 + x^2\right)},\ x \in R$$

Remarque : l'espérance de la loi de Cauchy n'est pas définie

II.7 Lois de Gamma

Définition :

Soient r > 0, λ > 0. On définit la fonction Γ par :

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres r, λ si sa fonction de densité f est donnée par :

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} 1_{]0,+\infty[}(x)$$

Notation : X ~ Γ(λ,r)

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale X ~ Γ(λ,r) alors :

$$E(X) = \frac{r}{\lambda},\quad Var(X) = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2,\quad \sigma(X) = \frac{r}{\lambda}$$

Preuve : Exo TD

II.8 Loi de Laplace

Définition : On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad x \in R$$

Notation : X ~ Γ(λ,r)

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Laplace X ~ L alors :

$$E(X) = 0,\quad Var(X) = 2,\quad \sigma(X) = \sqrt{2}$$

Preuve : Exo TD

II.9 Loi du χ2

Définition :
On dit que X suit la loi du χ2 (“khi-deux”) à k degré(s) de liberté si

$$f_k(t)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}t^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}},\quad t\succ 0$$

La loi du χ2 est une loi très classique en statistique. Elle est liée au test du χ2 qui permet, par exemple, de savoir si un échantillon donné est en adéquation avec une loi de probabilité définie a priori.

Espérance e, variance et écart type
Proposition :
Soit X une variable aléatoire suit la loi de χ2, X ~ χ2 alors :

$$E(X)=k\,,\ \ Var(X)=2k\,,\ \ \sigma(X)=\sqrt{2k}$$

II.10 la Loi Beta

Définition :

Soit X une variable aléatoire, on dit que X suit la loi de Beta de paramètre (a,b) si sa densité est donnée par : $f_X(x)=\dfrac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{]0,1[}(x)$

où β(a, b) désigne la fonction Beta définie par :

$$\beta(a,b)=\beta(b,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Espérance e, variance et écart type
Proposition :
Soit X une variable aléatoire suit la loi β(a, b) d’alors :

$$\forall k\in N\,,E(X^k)=\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}\quad \text{Donc}$$

$$E(X)=\frac{a}{a+b}\quad Var(X)=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}\quad \sigma(X)=\frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)}}$$

II.11 Loi de Student

Définition :

Soient X ~ N (0; 1) et Y ~ χ2(n). Posons $f_T(t)=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$

Alors T suit une loi de Student a n degré de liberté et on la note T (n)

La fonction de densité de la loi de Student est définie sur R et continue :

Le plus souvent, elle est définie à l'aide de la fonction Gamma :

$$f_n(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Student, X ~ T_n alors :

$$E(T)=0\,,n\succ 1,\quad Pour\ tout\ n\succ 2,\quad Var(T)=\frac{n}{n-2},\quad \sigma(T)=\sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

Preuve : TD exo

II.12 Loi de Weibull

Définition :

Une variable aléatoire X suit la loi de Weibull de paramètres λ>0 et α>0 si elle est absolument continue et admet pour densité

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\lambda e^{-\lambda x^{\alpha}}x^{\alpha-1}\ si\, x\geq 0\\ 0\ \sin on\end{cases}$$

Remarque : lorsque $\alpha=2,\lambda=\frac{1}{2}$, on l'appelle aussi loi de Rayleigh

Espérance

Si X suit la loi de Weibull alors X admet alors une espérance : $E(X)=\dfrac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}$

Remarque :
La loi de Rayleigh apparaît souvent pour décrire le bruit en sortie de certains récepteurs de transmissions. La loi de Weibull elle est utilisée notamment en théorie de la fiabilité, lorsque le système que l'on étudie vieillit et que le taux de panne augmente au cours du temps.

II.13 Loi de Fischer-Snedecor

Définition :

La loi de Fischer-Snedecor est une loi continue dépendant de deux paramètres notés ν1 et ν2, entiers naturels non nuls. La variable X distribuée selon cette loi prend toutes ses valeurs dans R_+^* ou dans R^+.

Si Y suit la loi de $\chi^2_{\upsilon_1}$ et Z suit la loi $\chi^2_{\upsilon_2}$ Y et Z étant indépendantes, la variable $X=\dfrac{\frac{Y}{\upsilon_1}}{\frac{Z}{\upsilon_2}}$ suit la loi de Fischer-Snedecor. On note $X\to F_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}$

La loi F de Fischer-Snedecor à (υ_1,υ_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du rapport de deux variables de khi-deux indépendantes divisées par leurs nombres de degrés de liberté (υ_1 pour le numérateur, υ_2 pour le dénominateur). Pour $\upsilon_1=1$, la loi F de Fischer-Snedecor à (1, υ_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du carré d'une variable de Student à υ_2 degrés de liberté.

Densité de la variable aléatoire de Fischer-Snedecor

La densité de probabilité est, par définition

$$f_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}(x)=\upsilon_1^{\frac{\upsilon_1}{2}}\upsilon_2^{\frac{\upsilon_2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\right)\quad x^{\frac{\upsilon_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{\upsilon_2}{2}\right)\left(\upsilon_1 x+\upsilon_2\right)^{\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}}}\quad ,x\succ 0,\upsilon_1 et \upsilon_2\in N^*$$

Dans cette formule, Γ est la fonction Gamma d'Euler définie, lorsque la partie réelle de x est positive.

Pour la preuve : TD exo