Chapitre n=3

Variables aléatoires

I. Généralités

Soit (Ω, P) un espace de probabilité.

Définition 1 :
Une variable aléatoire est une application X : Ω → R.

Définition 2 :
Soit X une variable aléatoire. La loi de X est la probabilité P_X sur R définie par :
Pour tout B ⊂ R, $P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$.
PX peut aussi être vue comme une probabilité sur X(Ω), ensemble des valeurs prises par X , aussi appelé support de P_X. On note parfois $X \sim P_X$ pour indiquer que X suit la loi P_X .

Définition 3 :

Si A est un évènement, on introduit la variable aléatoire fonction indicatrice de A notée 1_A qui indique si l'évènement A est réalisé

Pour tout $\omega \in \Omega \quad 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$

Remarque 1 :
En général la probabilité Q est notée par P_X en effet :
$P_X(]a,b]) = P(X^{-1}]a,b])$
c.à.d. $P_X(]a,b]) = P_X(]-\infty,b]/]-\infty,a]) = P_X(]-\infty,b] - P_X]-\infty,a])$
Si l'on pose maintenant $\forall y \in R, F_X(y) = P_X(]-\infty,y])$
Alors $P_X(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$
Cette remarque nous donne la définition de la fonction de répartition

I. Variable aléatoire discrète

Définition 4 :
Une variable aléatoire X est dite discrète si l'ensemble X(Ω) des valeurs qu'elle prend est dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut trouver une suite qui énumère tous les éléments de X(ω) : c'est le cas notamment si X(Ω) est un ensemble fini, N, Z ou Q, mais pas l'intervalle [0,1] ni R). On dit aussi que la loi de X est discrète. Si X est discrète, alors, pour tout B ⊂ R, on peut calculer :
$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in B} P(X = x)$$
Pour caractériser une loi discrète, il suffit donc de se donner les probabilités élémentaires
$P_X(x) = P(X = x)$ pour tout x ∈ X(Ω)
Avec X c'est la variable aléatoire et le petit x sont les valeurs possibles de X

Définition 5:
Si X(Ω) est fini ou dénombrable, X définit une variable aléatoire discrète.

Exemple :
Considérons quatre épreuves répétées, identiques et indépendantes, telles qu'au cours de chacune d'elles, un événement A a une probabilité de se réaliser égale à p = P(A) = 0, 3 (et donc une probabilité de ne pas se réaliser égale à q = P(A) = 1 − p = 0, 7). Désignons par X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A au cours des quatre expériences aléatoires.
On a :

$P(X=0)=q^4=(0.7)^4=0.2401$ $\quad$ $P(X=1)=C_4^1 pq^3=4\times(0.3)(0.7)^3=0.4116$

$P(X=2)=C_4^2 p^2q^2=6\times(0.3)^2(0.7)^2=0.2646$ $\quad$ $P(X=3)=C_4^3 p^3q=4\times(0.3)^3(0.7)=0.0756$

$P(X=4)=C_4^0 p^4q^0=(0.3)^4=0.0081$

Remarquer bien qu'on a

$$\sum_{k=0}^{4} P(X=k)=1$$

Définition et proposition
Soit $E\subset R$. Une famille $(P(x))_{x\in E}\in R^E$ est une famille de probabilités élémentaires si

1. Pour tout $x\in E, P(x)\geq 0$
2. $\sum_{x\in E} P(X=x)=1$

Dans ce cas, il existe une variable aléatoire X (sur un espace de probabilité (Ω,P)), a valeurs dans E, de probabilité élémentaire $P_X=p$ c.à.d. pour tout x de E, $P(X=x)=p(x)$.

Pour la preuve est évidente (Exo TD)

I.1 Fonction de répartition :
Définition 6:
Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : R \to R$ définie par : pour tout $x \in R$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x])$.

Propriétés de la fonction de répartition (proposition) :
1. La fonction F est monotone croissante.
2. La fonction de répartition est admet un ensemble de points de discontinuité fini ou dénombrable
3. La fonction de répartition est continue à droite par la propriété d'additivité

Autrement :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
2. F est croissante, c.à.d. $y \geq x \Rightarrow F(y) \geq F(x)$
3. F est continue à droite, c.à.d. $\lim\limits_{y \to x^+} F(y) = F(x)$

Pour tout $(a,b) \in R^2$, $P(a \prec X \leq b) = F(b) - F(a)$

Réciproquement :

Proposition :
toute fonction monotone croissante continue à droite telle que (F(−∞) = 0 et F(+∞) = 1 a la limite) définit une loi de probabilité unique sur R.
Preuve : évidente (Exo TD)

Cas particuliers

1. **Variable aléatoire discrète**

Si X(Ω) est fini ou dénombrable, X définit une variable aléatoire discrète.
Densité de probabilité
Si la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est continue et dérivable presque partout, on dit que X est continue (ou plus exactement absolument continue) et sa dérivée f est la densité de probabilité.

II. Variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire réelle
Étant donné un espace probabilisé (Ω, E ,P), on appelle variable aléatoire réelle une application X définie sur Ω à valeurs dans R, telle que l'image réciproque par X de tout intervalle]a, b] de R soit un élément de la tribu E .

Densité d'une variable aléatoire
Pour qu'une fonction f soit une densité d'une variable aléatoire X elle doit vérifier les trois

Propriétés suivante :

1. f est positif
2. f est continu
3. l'aire délimitée par sa courbe représentative et par l'axe des abscisses doit être égale à 1

Autrement dit

Si f est une densité de probabilité alors :

1. f est une fonction positive: ∀ x > 0, f (x) ≥ 0,
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Proposition :

Soient $X:\Omega \to R$ une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition. Si F_X est une fonction dérivable sur R (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors X est une variable absolument continue. De plus, si on pos

$$D=\{x \in R : t \to F_X(t)\ est\ dérivable au\ point\ t=x\}$$

Alors la fonction de densité f_X peut être définie par $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x}\ si\ x\in D\\ 0\ ailleur\end{cases}$

Exemple

Soient c ∈ R, f la fonction définie par :

$$f_X(x)=\begin{cases}2ce^{\frac{-x}{3}}\ si\ x\geq 0\\ 0\ ailleur\end{cases}$$

Sous quelle condition la fonction f est la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle ?

Solution:

Pour que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire il faut quelle soit positive, ainsi $c \geq 0$, de plus on doit avoir $\int_R f_X(x)dx=1$ par conséquent

Ainsi, f est la fonction de densité d'une variable aléatoire si et seulement si c = 1/6.

III. Esperance et variance d'une variable aléatoire

III.1. Espérance

Définition 7

Dans de nombreux cas, il n'est pas nécessaire de connaître une propriété de la variable aléatoire aussi précise que sa fonction de répartition. Certains paramètres numériques caractérisent parfois cette variable aléatoire. L'étude de quelques-uns de ces paramètres fait l'objet du présent paragraphe.

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \cdots, p_n$. On définit une moyenne arithmétique des déférentes valeurs de X pondérées par leurs probabilités p_k . Cette moyenne pondérée est appelée espérance mathématique (ou moyenne stochastique) et elle est notée E(X) :

$$E(X)=p_1x_1+....+p_nx_n=\sum_{i=1}^{i=n}P_ix_i$$

Définition 8
X étant une variable aléatoire réelle, on appelle espérance mathématique de X le nombre E(X), si il existe, défini par

1. si X est une variable aléatoire finie
$$E(X)=\sum_{k=1}^{i=n} x_k P(X=x_k)$$
2. si X est une variable aléatoire discrète dénombrable (sous réserve de convergence)
$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$
3. si X est une variable aléatoire continue, f étant la densité de probabilité, on a (sous réserve de convergence)
$$E(X)=\int_R t.f(t)dt$$

Propriétés de l'espérance :

Soient X, Y deux variables réelles d'espérances finies et $\lambda \in R$, alors

1. Linéarité d'espérance $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda E(Y)$
2. Positivité de l'espérance $|E(X)|\leq E(|X|)$
3. Si X et Y sont indépendants $E(X\times Y)=E(X)\times E(Y)$
4. Pour toute fonction $h: R\rightarrow R \quad avec\, E(|h(X)|\prec +\infty$:
$$E(f(X))=\begin{cases}\int_R h(t)f_X(t)dt \quad en\ continu\\ \sum_{\omega\in\Omega} h(X(\omega)).P_X(\{\omega\})\ en\ discret\end{cases}$$

Ou f_X désigne la densité de probabilité de X. (c.à.d. la formule de transfert

Pour tout $A\in\xi$: $P(X\in A)=P_X(A)=E(1_A(X))$

Preuve : voir (TD exo)

Variance
Définition 9:
On appelle variance d'une variable aléatoire, son moment centré d'ordre 2. On la note Var(X).
$$Var(X)=\mu_2(X)=E((X-E(X))^2)$$
La variance est un nombre positif. Sa racine carrée définit l'écart-type dont l'expression est :
$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$$
Propriétés de la variance

1. La variance est toujours positive
2. Pour tout à, b ∈ R, on a

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

3. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
4. Si X1 et X2 sont deux variables aléatoires indépendantes
$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$

Preuve : voir (TD exo)

Attention : La variance n'est pas toujours définie. Il faut que l'espérance E[X] soit définie et que l'espérance converge. Ceci revient à demander à ce que E[X^2] converge.

Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebyshev

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire, pour tout $a \succ 0$, $P(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(|X|)}{a}$

Plus généralement, pour tout $a \succ 0$ et $r \succ 0$, $P(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(|X|^r)}{a^r}$

Preuve :

On a toujours $|X|^r \geq 0$ et si $|X| \geq a$, alors $|X|^r \geq a^r$ d'où $a^r 1_{\{|X|\geq a\}} \leq |X|^r$, ce qui donne en prenant l'espérance de chaque membre $E\left[a^r 1_{\{|X|\geq a\}}\right] \leq E\left[|X|^r\right]$

et $E\left[a^r 1_{\{|X|\geq a\}}\right] = a^r P(|X| \geq a)$, d'où le résultat annoncée (r=1 donne la première)

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire. Pour tout a > 0,

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Preuve :
Prendre r = 2 et remplacer X par X − E[X] dans l'inégalité de Markov.

Exemples d'application

Exemple1
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.
1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2) On lance deux fois le dé.
a. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair
b. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Solution :

1) On note a la probabilité que 1 soit tiré. Ainsi, la probabilité que 2 soit tiré est égale à $2a$; la probabilité que 3 soit tiré est a, …

La somme des probabilités est égale à 1 donc $a + 2a + a + 2a + a + 2a = 1$ soit $9a = 1$ et $a = \frac{1}{9}$.

La probabilité d'obtenir un 6 est donc $2a$, soit $\boxed{\frac{2}{9}}$

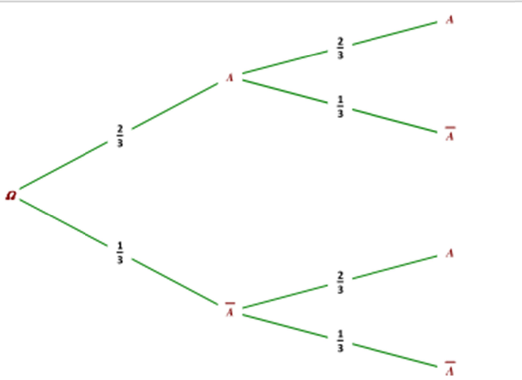
2)

a. On note A l'événement « le résultat d'un lancer est pair ». On a donc $p(A) = \frac{2}{3}$. La situation est modélisée sur l'arbre ci-contre.

$p(AA) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$

b. Les deux tirages sont indépendants donc les probabilités sont multipliées entre elles :

$p(\text{deux } 6) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{81}}$



Exercice 3

Exemple 2 :
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard. On note :
E1 = "la ligne A est occupée"
E2 = "la ligne B est occupée"
Après étude statistique, on admet les probabilités : P(E1) = 0,5 ; P(E2) = 0,6 et P(E1∩E2) = 0,3
Calculer la probabilité des événements suivants :
F = "la ligne A est libre"
G = "une ligne au moins est occupée"
H = "une ligne au moins est libre"

Solution

$$P(F) = P(\overline{E_1}) = 1 - P(E_1) = 0.5$$

$$P(G) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$$

$$P(H) = P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Exemple 3 :
On considère la loi de probabilité suivant.
Calculer P(x = 3) puis l'espérance et l'écart-type.

X	-2	-1	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,2	

Solution :

La somme des probabilités est égale à 1 donc $p(X=3) = 1-(0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}2) = \boxed{0{,}2}$

$E(X) = -2\times 0{,}1 - 1\times 0{,}2 + 1\times 0{,}3 + 2\times 0{,}2 + 3\times 0{,}2 = \boxed{0{,}9}$

$V(X) = (-2)^2\times 0{,}1 + (-1)^2\times 0{,}2 + 1^2\times 0{,}3 + 2^2\times 0{,}2 + 3^2\times 0{,}2 - 0{,}9^2$

$= 0{,}4+0{,}2+0{,}3+0{,}8+1{,}8-0{,}81 = 2{,}69$ donc $\sigma(X) = \sqrt{2{,}69} \approx \boxed{1{,}64}$

Exemple 4 :

Une urne contient 1 boule rouge et n boules blanches n ≥ 1. Les boules sont indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne. Si elle est rouge, on gagne 10€ et si elle est blanche, on perd 1€.

On considère la variable aléatoire 0 égale au gain algébrique du joueur.

1) On suppose dans cette question qu'il y a 10 boules blanches (n = 10)

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

2) On suppose maintenant que n est un entier positif quelconque.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Exprimer E(X) en fonction de n.

c. Pour quelles valeurs de n , E(X) =-1/2

Solution :

1) L'urne contient 1 boule rouge et 10 boules blanches, soit 11 boules au total.

a. Voir ci-contre.

x_i	10	-1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

b. $E(X) = 10\times\frac{1}{11} - \frac{10}{11} = 0$

2) L'urne contient $n+1$ boules.

a. Voir ci-contre

x_i	10	-1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$

b. $E(X) = \frac{10}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{10-n}{n+1}}$

c. $E(X) \geq 0 \Leftrightarrow 10-n \geq 0$ car $n+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow n \leq 10$

Il faut donc qu'il y ait moins de 10 boules blanches pour que l'espérance soit positive.

d. $E(X) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{10-n}{n+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(10-n) = -(n+1) \Leftrightarrow -n = -21 \Leftrightarrow n = 21$

Il faut qu'il y ait 21 boules blanches pour que l'espérance soit égale à $-\frac{1}{2}$.

Exercice 01

Pour la fonction définie sur l'intervalle [3;0] par f (x) = kx , déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.

Solution

$$\int_0^3 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 kxdx = 1 \Leftrightarrow \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1 \Leftrightarrow \left(k\times\frac{3^2}{2}\right) - \left(k\times\frac{0^2}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{9k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{9}$$

f est une densité de probabilité ssi :

Exercice 02

I. Soit X la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur IR+ par :

f (x) = 4exp (-4x).

a) Calculer F(5).

b) Calculer p (1 < X < 3).

II. Pour la fonction suivante, définie sur l'intervalle [0;2], déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité. f (x) = k x ^{3}.

Solution

I.

a) $$F(5) = p(X \leq 5) = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 4e^{-4x}dx = \left[\frac{4}{-4}e^{-4x}\right]_0^5 = \left[-e^{-4x}\right]_0^5$$
$$= \left(-e^{-4\times 5}\right) - \left(-e^{-4\times 0}\right) = -e^{-20} + 1 \cong 0.99$$

b) $$p(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)dx = \left[-e^{-4x}\right]_1^3 = \left(-e^{-4\times 3}\right) - \left(-e^{-4\times 1}\right) = -e^{-12} + e^{-4} \cong 0.0183$$

II. f est une densité de probabilité ssi :

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 kx^3 dx = 1 \Leftrightarrow \left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow \left(k\times\frac{2^4}{4}\right) - \left(k\times\frac{0^4}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$